JOUR 1

CORRIGE

EX 1 : Montrer que $f: \left(x \mapsto 2sin\left(\frac{3x}{2}\right) - 7cos\left(\frac{x}{5}\right)\right)$ est périodique et bornée.

a. Trouver la plus petite période de $u: \left(x \mapsto sin\left(\frac{3x}{2}\right)\right)$..

Je cherche $T > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, sin\left(\frac{3(x+T)}{2}\right) = sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{3T}{2}\right) = sin\left(\frac{3x}{2}\right)$. Comme sin est 2π −périodique, j'en déduis que T tel que $\frac{3T}{2} = 2\pi$, convient. Autrement dit, u est $\frac{4\pi}{3}$ −périodique . Et par suite, $\forall k \in \mathbb{Z}^*, u$ est $\frac{4k\pi}{3}$ −périodique.

b. Faire de même, pour $v : \left(x \mapsto cos\left(\frac{x}{5}\right)\right)$

Je cherche $T > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, cos\left(\frac{x+T}{5}\right) = cos\left(\frac{x}{5} + \frac{T}{5}\right) = cos\left(\frac{x}{5}\right)$. Comme cos est 2π −périodique, j'en déduis que T tel que $\frac{T}{5} = 2\pi$, convient. Autrement dit, v est 10π −périodique . Et par suite, $\forall p \in \mathbb{Z}^*, v$ est $10p\pi$ −périodique.

c. Trouver une période commune pour u et v . En déduire la périodicité de f.

Je cherche k et p entiers non nuls tels que : $\frac{4k\pi}{3} = 10p\pi$. Or, $\frac{4k\pi}{3} = 10p\pi \Leftrightarrow 4k = 30p \Leftarrow \begin{cases} p = 2 \\ k = 15 \end{cases}$. Donc u et v sont 20π −périodiques. J'en déduis que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + 20\pi) = 2u(x + 20\pi) - 7v(x + 20\pi) = 2u(x) - 7v(x) = f(x)$. Ainsi, f est 20π −périodiques.

d. Justifier par un simple résultat de cours que f est bornée.

u et v sont bornées car $\forall t \in \mathbb{R}, |\sin(t)| \leq 1$ *et* $|\cos(t)| \leq 1$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, \left|\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\right| \leq 1$ *et* $\left|\cos\left(\frac{x}{5}\right)\right| \leq 1$. Or le cours assure que toute combinaison linéaire de fonctions bornées est bornée. Ainsi, $f = 2u - 7v$ est bornée.

$\forall x, |f(x)| \overset{I.T}{\lessapprox} 2\left|\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\right| + 7\left|\cos\left(\frac{x}{5}\right)\right| \leq 9.$

Dérivée de $f(x) = sin(5x^2 - 3 + 2\sqrt[3]{x})$

$Df = \mathbb{R}$. f est continue sur $\mathbb{R}$ (i.e. $Dc = \mathbb{R}$) car son expression n'est constituée que de fonctions continues sur leur domaine de définition respectif.

Dans l'expression de f, seule la racine cubique n'est pas dérivable sur tout son domaine de définition, la racine cubique n'est dérivable que sur $\mathbb{R}^*$, je peux affirmer que f est au moins dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et en posant $u(x) = 5x^2 - 3 + 2\sqrt[3]{x}$,

$$\forall x \neq 0, f'(x) = u'(x) \times sin'(u(x)) = \left(10x + \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}-1}\right) \times \cos(\,5x^2 - 3 + 2\sqrt[3]{x}) = \left(10x + \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}\right) \times \cos(\,5x^2 - 3 + 2\sqrt[3]{x})$$

EN COMPLEMENTS : Pour étudier la dérivabilité de f en 0, je vais étudier la limite quand $x \to 0$ de $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

On peut calculer cette limite de deux manières :

1. $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sin(\,5x^2-3+2\sqrt[3]{x})-\sin(-3)}{x} = \frac{\sin(\,5x^2-3+2\sqrt[3]{x})-\sin(-3)}{5x^2-3+2\sqrt[3]{x}+3} \times \frac{5x^2-3+2\sqrt[3]{x}+3}{x} = \frac{\sin(\,5x^2-3+2\sqrt[3]{x})-\sin(-3)}{5x^2-3+2\sqrt[3]{x}+3} \times \left(5x + \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}\right).$

Or, $\begin{cases} \lim\limits_{t\to-3} \frac{\sin(t)-\sin(-3)}{t+3} = \cos(-3) \\ \lim\limits_{x\to 0} 5x^2 - 3 + 2\sqrt[3]{x} = -3 \end{cases}$;donc par composition, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(\,5x^2-3+2\sqrt[3]{x})-\sin(-3)}{5x^2-3+2\sqrt[3]{x}+3} = \cos(-3) \neq 0$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0}\left(5x + \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}\right) = +\infty$.

Donc f n'est pas dérivable en 0 et comme f est continue en 0 , je peux en déduire que Cf a une tangente verticale en 0.

2. En utilisant le critère 35 (à rajouter dans le cours , Cf cours dans CAHIER DE PREPA) suivant :

« Si f est continue sur I , dérivable au moins sur $I\backslash\{a\}$ et $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = L$ alors $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = L$ ».

f est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable au moins sur $\mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = " + \infty \times \cos(-3)" = +\infty$. Donc le critère assure que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$.

Donc f n'est pas dérivable en 0 et comme f est continue en 0 , je peux en déduire que Cf a une tangente verticale en 0.