JOUR 2

CORRIGE

Déterminer les asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$ de Cf où $f(x)=\sqrt{4x^2-5x+6}$ en calculant successivement

a. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ (mettre les termes dominants sous la $\sqrt{.}$)

b. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \overset{def}{\triangleq} a$ (mettre les termes dominants en facteur sous la $\sqrt{.}$ et utiliser les propriétés de $\sqrt{.}$)

c. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-ax \overset{def}{\triangleq} b$. (utiliser la quantité conjuguée puis mettre les termes dominants en facteur et utiliser les propriétés de $\sqrt{.}$)

ATTENTION : $\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases} x\ si\ x\geq 0 \\ -x\ si\ x<0 \end{cases}$.

a. Notons $P(x)=4x^2-5x+6$. $\Delta_P<0$. Donc, $\forall x\in\mathbb{R}, P(x)>0$. Ainsi, $Df=\mathbb{R}$.

$$\forall x\neq 0, f(x) \underbrace{=}_{\substack{mettre \\ le\ terme\ dominant \\ en\ facteur}} \underbrace{\sqrt{4x^2\left(1-\frac{5}{4}\frac{1}{x}+\frac{3}{2}\frac{1}{x^2}\right)} \overset{\substack{car\ 4x^2\geq 0 \\ donc\ 1-\frac{5}{4}\frac{1}{x}+\frac{3}{2}\frac{1}{x^2}=\frac{P(x)}{4x^2}>0}}{\triangleq}}_{\substack{propriété\ de\ \sqrt{\dots}\ : \\ si\ a\geq 0\ et\ b\geq 0 \\ alors\ \sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}}} 2|x|\sqrt{1-\frac{5}{4}\frac{1}{x}+\frac{3}{2}\frac{1}{x^2}}.$$ Par suite, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$.

b. $\forall x\neq 0, \frac{f(x)}{x}=\frac{2|x|}{x}\sqrt{1-\frac{5}{4}\frac{1}{x}+\frac{3}{2}\frac{1}{x^2}}=\begin{cases} 2\sqrt{1-\frac{5}{4}\frac{1}{x}+\frac{3}{2}\frac{1}{x^2}}\ si\ x>0 \\ -2\sqrt{1-\frac{5}{4}\frac{1}{x}+\frac{3}{2}\frac{1}{x^2}}\ si\ x>\text{à} \end{cases}$. Par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2\ et\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$.

c. $\underbrace{Soit\ x>0}_{\substack{je\ me\ place\ au\ voisinage \\ de +\infty\ pour\ simplifier \\ l'expression}}$.

$$f(x)-2x=\underbrace{\sqrt{4x^2-5x+6}-2x}_{FI\ "\infty-\infty"} \underbrace{=}_{\substack{quantité \\ conjuguée}} \frac{\left(\sqrt{4x^2-5x+6}-2x\right)\left(\left(\sqrt{4x^2-5x+6}+2x\right)\right)}{\left(\sqrt{4x^2-5x+6}+2x\right)}=\frac{4x^2-5x+6-4x^2}{\left(\sqrt{4x^2-5x+6}+2x\right)}$$

$$f(x)-2x=\frac{-5x+6}{\left(\sqrt{4x^2-5x+6}+2x\right)} \underbrace{=}_{car\ x>0} \frac{-5x\left(1-\frac{6}{5x}\right)}{2x\left(\sqrt{1-\frac{5}{4}\frac{1}{x}+\frac{3}{2}\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\frac{-5\left(1-\frac{6}{5x}\right)}{2\left(\sqrt{1-\frac{5}{4}\frac{1}{x}+\frac{3}{2}\frac{1}{x^2}}+1\right)}.$$

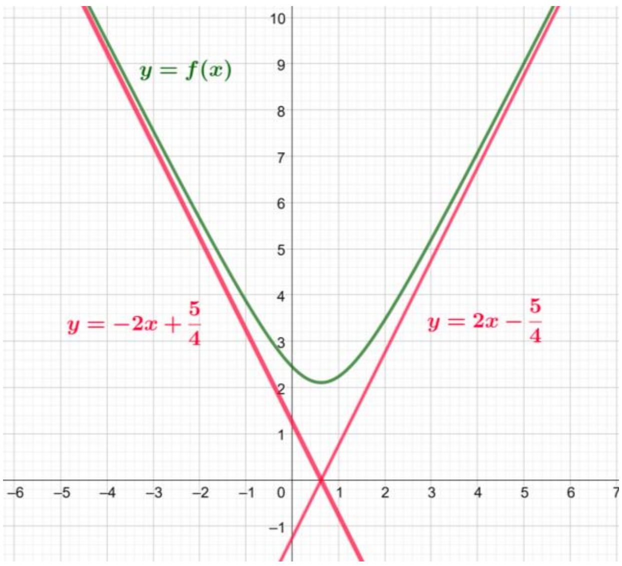
Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-2x=-\frac{5}{4}$. Par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\left(2x-\frac{5}{4}\right)=0$. J'en conclus que la droite d'équation $y=2x-\frac{5}{4}$ est asymptote à Cf en $+\infty$.

$Soit\ x<0$.

$$f(x)+2x=\underbrace{\sqrt{4x^2-5x+6}+2x}_{FI"\infty-\infty"} \underbrace{=}_{\substack{quantité \\ conjuguée}} \frac{\left(\sqrt{4x^2-5x+6}-2x\right)\left(\left(\sqrt{4x^2-5x+6}+2x\right)\right)}{\left(\sqrt{4x^2-5x+6}-2x\right)}$$

$$f(x)+2x=\frac{-5x+6}{\left(\sqrt{4x^2-5x+6}-2x\right)} \underbrace{=}_{car\ x<0} \frac{-5x\left(1-\frac{6}{5x}\right)}{2x\left(-\sqrt{1-\frac{5}{4}\frac{1}{x}+\frac{3}{2}\frac{1}{x^2}}-1\right)}=\frac{-5\left(1-\frac{6}{5x}\right)}{2\left(-\sqrt{1-\frac{5}{4}\frac{1}{x}+\frac{3}{2}\frac{1}{x^2}}-1\right)}.$$

Donc, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+2x=\frac{5}{4}$. Par suite, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-\left(-2x+\frac{5}{4}\right)=0$. J'en conclus que la droite d'équation $y=-2x+\frac{5}{4}$ est asymptote à Cf en $-\infty$.



2. Soit $f(x) = \cos(\sqrt[3]{x}) - \sqrt[3]{\cos(x)}$.

- $Df = \mathbb{R}$ et f est continue sur $\mathbb{R}$ car cos et $u: (x \mapsto \sqrt[3]{x})$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}$.
- Dans l'expression de f, seule la fonction racine cubique, n'est pas dérivable sur tout son domaine de définition. La racine cubique n'est dérivable que sur $\mathbb{R}^*$. Par conséquent, $\varphi: (x \mapsto \cos(\sqrt[3]{x}))$ est dérivable au moins sur $\mathbb{R}^*$.

Posons $E = \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[$. $\forall x \in E, \cos(x) \in \mathbb{R}^*$. Donc, $\theta: (x \mapsto \sqrt[3]{\cos(x)}.)$ est dérivable au moins sur E. J'en déduis que f est **au moins** dérivable sur $E \cap \mathbb{R}^* = E\backslash\{0\}$.

Et $\forall x \in E\backslash\{0\}, f'(x) = u'(x) \times cos'(u(x)) - cos'(x) \times u'(\cos(x)) \underbrace{=}_{\substack{u'(t)=\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} \\ et\ cos'(t)=-\sin(t)}} \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\left(-\sin\left(x^{\frac{1}{3}}\right)\right) - (-\sin(x)) \times \frac{1}{3}(\cos(x))^{-\frac{2}{3}}$.

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left[\frac{\sin(x)}{\sqrt[3]{cos^2(x)}} - \frac{\sin(\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x^2}}\right].$$

- Dérivabilité en 0 ? Appliquons le **critère 35 à ajouter au chap 5 (Cf cahier de prépa)** :

« Si f est continue sur I, dérivable au moins sur $I\backslash\{a\}$ et $\lim_{x\to a} f'(x) = L$ alors $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = L$ ».

f est continue sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et dérivable au moins sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\backslash\{0\}$ et $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\backslash\{0\} f'(x) \frac{1}{3}\left[\frac{\sin(x)}{\sqrt[3]{cos^2(x)}} - \frac{\sin(\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}} \times \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right]$.

Or, $\begin{cases} \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x} = 0 \\ \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1 \end{cases}$ donc par composition, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}} = 1$. Et par suite, $\lim_{x\to 0^{\mp}} f'(x) = \pm\infty$. J'en déduis, par le critère, que $\lim_{x\to 0^{\mp}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \pm\infty$. Ainsi, f n'est pas dérivable en 0 et f étant continue en 0, Cf a une tangente verticale en 0.

- Dérivabilité en $\frac{\pi}{2} + k\pi\ tq\ k \in \mathbb{Z}$? Faire de même :

f est continue sur $]k\pi, \pi + k\pi[$ et dérivable au moins sur $]k\pi, \pi + k\pi[\ \backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$ et $\forall x \in]k\pi, \pi + k\pi[\ \backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$, $f'(x)\frac{1}{3}\left[\frac{\sin(x)}{\sqrt[3]{cos^2(x)}} - \frac{\sin(\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}} \times \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right]$. Donc, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+k\pi} f'(x) = +\infty$. J'en déduis, par le critère, que $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+k\pi} \frac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty$.

Donc f n'est pas dérivable en $\frac{\pi}{2} + k\pi$ et comme f est continue en $\frac{\pi}{2} + k\pi$, Cf a une tangente verticale en $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

- J'en conclus que f est **exactement** dérivable sur $E \cap \mathbb{R}^* = E\backslash\{0\} = Df'$.