JOUR 6
Corrigé

BUT : Montrer que toute fonction polynomiale de degré impair a au moins une racine réelle.

a. Considérer une fonction polynomiale réelle de degré impair. Que peut-on dire de sa continuité ?
b. Que peut-on dire de ses limites en $+\infty$ et en$-\infty$?
c. Conclure grâce au corollaire du TVI.

a. Soit P une fonction polynomiale de degré impair. Comme toute fonction polynomiale, P est continue sur $\mathbb{R}$.

b. Posons $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d$ où $d = \deg(P) \geq 1, et\ a_0, a_1, \ldots, a_d\ réels\ et\ a_d \neq 0$.
Alors, $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d = a_d x^d \left(1 + \frac{a_{d-1}}{a_d}\frac{1}{x} + \frac{a_{d-2}}{a_d}\frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{a_0}{a_d}\frac{1}{x^d}\right)$.
Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 1 + \frac{a_{d-1}}{a_d}\frac{1}{x} + \frac{a_{d-2}}{a_d}\frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{a_0}{a_d}\frac{1}{x^d} = 1,\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} a_d x^d$. Or, comme d est impair, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^d = +\infty\ et\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^d = -\infty\ \ et\ par\ suite,\ \lim\limits_{x\to+\infty} a_d x^d = \begin{cases} +\infty\ si\ \ a_d > 0 \\ -\infty\ si\ \ a_d < 0 \end{cases}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} a_d x^d = \begin{cases} -\infty\ si\ \ a_d > 0 \\ +\infty\ si\ \ a_d < 0 \end{cases}$. J'en déduis que $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x)$ existent et sont des infinis opposés.

c. Par conséquent, P prend au moins une valeur positive et une valeur négative sur $\mathbb{R}$. Alors le corollaire du TVI assure que notre fonction continue P s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Dérivée de $f(x) = e^{\sqrt[5]{x^2}}$

$Df = \mathbb{R}$ et f est continue sur $\mathbb{R}$ (car son expression non intégrale et non par morceaux n'est constitutée que de fonctions continues sur $\mathbb{R}$).
Dans l'expression de f, seule la fonction racine cinquième réelle n'est pas dérivable sur tout son domaine de définition, elle n'est dérivable que sur $\mathbb{R}^*$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}^*, x^2 \in \mathbb{R}^*$. Donc, f est **au moins** dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \neq 0, f'(x) = u'(x)e^{u(x)}\ avec\ u(x) = \sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}}$ et $u'^{(x)} = \frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1} = \frac{2}{5}x^{\frac{-3}{5}} = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$. Donc, $\forall x \neq 0, f'(x) = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}\ e^{\sqrt[5]{x^2}}$.
Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ et **au moins** dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{x\to 0^\pm} \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}\ e^{\sqrt[5]{x^2}} = \pm\infty$, le critère du taux d'accroissement assure que $\lim\limits_{x\to 0^\pm} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \pm\infty$. J'en déduis que f n'est pas dérivable en 0 et par suite, f est **exactement** dérivable sur $\mathbb{R}^*$ i.e. $Df' = \mathbb{R}^*$.