JOUR 5
Corrigé

BUT : Montrer que $f : (x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor})$ est continue sur $\mathbb{R}$.

a. Déterminer Df.

b. Dans l'expression de f, quelle fonction n'est pas continue sur tout son domaine de définition. Où est-elle continue ? En déduire que f est continue au moins sur ....

c. Soit k un entier relatif.

i. Calculer $\lim_{x \to k^+} f(x)$ en se plaçant sur un bon voisinage de k^+.

ii. Faire de même pour $\lim_{x \to k^-} f(x)$.

iii. Conclure.

a. $f(x) exsite \Leftrightarrow, x - \lfloor x \rfloor \geq 0$. Or par définition de la partie entière, $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq \lfloor x \rfloor$ donc $Df = \mathbb{R}$.

b. Dans l'expression de f, seule la fonction partie entière n'est pas continue sur tout son domaine de définition qui n' est continue que sur $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$. J'en déduis que f est continue au moins sur $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$.

c. Soit k un entier relatif. Tout d' abord $f(k) = k$. Donc, f est continue en $k \Leftrightarrow \lim_{x \to k^+} f(x) = k = \lim_{x \to k^-} f(x)$.

i. $\forall x \in]k, k+1[, \lfloor x \rfloor = k$ donc $f(x) = k + \sqrt{x - k}$ et par suite, $\lim_{x \to k^+} f(x) = k + \sqrt{0} = k$.

ii. $\forall x \in]k-1, k[, \lfloor x \rfloor = k - 1$ donc $f(x) = k - 1 + \sqrt{x - (k-1)}$ et par suite, $\lim_{x \to k^+} f(x) = k - 1 + \sqrt{k - (k-1)} = k - 1 + \sqrt{1} = k$.

iii. J'en conclus que f est continue en k. Comme k est un entier arbitraire, je peux conclure que est continue en tout point de $\mathbb{Z}$ et finalement, f est continue sur $\mathbb{R}$.

Dérivée de $f(x) = \frac{\tan(x)}{\sqrt{1-2x}}$

$\boldsymbol{Df}$ **:** $f(x)\ existe \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_{tan} \\ 1 - 2x \geq 0 \\ \sqrt{1-2x} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_{tan} \\ 1 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_{tan} \\ x < \frac{1}{2} \end{cases}$. Donc, $Df =]-\infty ; \frac{1}{2}[\backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}^{*-}\right\}$.

$\boldsymbol{Dc}$: f est continue sur Df car son expression n'est ni intégrale, ni par morceaux et n'est constituée que de fonctions continues sur leur propre domaine de définition.

$\boldsymbol{Df'}$: Dans l'expression de f, seule la racine carrée n'est pas dérivable sur tout son domaine de définition, la racine carrée n'est dérivable que sur $\mathbb{R}^{+*}$. Or, $\forall x \in Df, 1 - 2x \in \mathbb{R}^{+*}$. Donc finalement, f est dérivable sur Df.

Et, $\forall x \in Df, f(x) = \tan(x)(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$ donc $f'(x) = tan'(x)g(x) + \tan(x)\, g'(x)$ avec $\begin{cases} g(x) = (1-2x)^{-\frac{1}{2}} = (u(x))^{-\frac{1}{2}} \\ u(x) = 1 - 2x \end{cases}$

Donc, $g'(x) = \left(-\frac{1}{2}\right) u'(x) u(x)^{-\frac{1}{2}-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)(-2)(1-2x)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-2x)^3}}$.

Donc, $f'(x) = \frac{(1+tan^2(x))}{\sqrt{1-2x}} + \frac{\tan(x)}{\sqrt{(1-2x)^3}} = \frac{(1-2x)(1+\tan^2(x))+\tan(x)}{\sqrt{(1-2x)^3}}$

> Pour calculer $f'(x)$, vous pouvez utiliser la formule de dérivée d'un quotient ou celle d'un produit.... Nous devons obtenir la même dérivée (peut-être écrite de manière un peu différente)
>
> $$f(x) = \frac{\tan(x)}{\sqrt{1-2x}} = \tan(x)(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$$
>
> J'ai choisi celle du produit !