Jour 4

Corrigé

BUT : Montrer que f: $\left(x \mapsto \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x-1}\right) \text{ si } x \in]-1,1[\\ \frac{1}{2} \text{ si } x = \pm 1 \end{cases} \right)$ **n'est continue ni en 1, ni en -1.**

En 1 : Si f est continue sur 1 i.e. $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = \frac{1}{2}$, alors pour toute suite réelle (u_n) telle que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1^-$, $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = \frac{1}{2}$.

Nous allons donc chercher une suite réelle (u_n) telle que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1^-$, $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) \neq \frac{1}{2}$. Et plus exactement , cherchons une suite réelle (u_n) telle que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1^-$, $\lim_{n \to +\infty} u_n \sin\left(\frac{1}{u_n - 1}\right) = 0$.

Or, si $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1^-$ et $\lim_{n \to +\infty} u_n \sin\left(\frac{1}{u_n - 1}\right) = 0$ alors nécessairement , $\lim_{n \to +\infty} \sin\left(\frac{1}{u_n - 1}\right) = 0$

Mais $\sin\left(\frac{1}{u_n - 1}\right) = 0 \Leftarrow \frac{1}{u_n - 1} = -n\pi \Leftarrow u_n - 1 = \frac{-1}{n\pi} \Leftarrow u_n = 1 - \frac{1}{n\pi}$.

Posons $u_n = 1 - \frac{1}{n\pi}$. Alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1^-$. et $\sin\left(\frac{1}{u_n - 1}\right) = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} u_n \sin\left(\frac{1}{u_n - 1}\right) = 0$. .

J'en conclus que f ne peut pas tendre vers $f(1)$ en 1 donc f n' est pas continue en 1.

En -1 : $\lim_{\substack{x \to (-1)^+ \\ (i.e. x > -1)}} x\sin\left(\frac{1}{x-1}\right) = -\sin\left(-\frac{1}{2}\right) = \sin\left(\frac{1}{2}\right) \neq \frac{1}{2} = f(-1)$. Donc f n'est pas continue en -1.

INUTILE ICI D'UTILISER LES SUITES !!

***Dérivée de* $f(x) = \ln(\ln(x))$**

Df : $f(x)$ *existe* $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$. Donc, $Df =]1, +\infty[$.

***Dc* et *Df'* :** f n'est pas définie pas morceaux ni par une expression intégrale, et n'est constituée que de fonctions continues et dérivables sur leur propre domaine de définition donc f est continue et dérivable sur Df. Ainsi, $Df = Dc = Df'$. Et $\forall x \in Df, f'(x) = \frac{ln'(x)}{\ln(x)} = \frac{1}{x ln(x)}$.