Jour 3

Corrigé

ERREUR d'ENONCE

BUT : Trouver tous les $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que la fonction f suivante est-elle continue sur $\mathbb{R}$? $f(x) = \begin{cases} (1+ax)^{\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \\ \frac{b+x^3}{x^2+3x+2} \; si \; x \in]-1{,}0] \\ -\frac{c}{2} \; si \; x = -1 \\ c\,\frac{e^{x+1}-1}{x^2-1} \; si \; x < -1 \end{cases}$

On pose $u(x) = (1+x)^{\frac{a}{x}}$, $v(x) = \frac{b+x^3}{x^2+3x+2}$ et $w(x) = c\,\frac{e^{x+1}-1}{x^2-1}$.

a. Quelle forme spéciale a u et comment doit-on écrire u ?
b. Pourquoi u, v et w sont-elles continues sur respectivement $]0,+\infty[,]-1{,}0[\; et \;]-\infty,-1[$? Qu'en déduit-on sur f ?
c. Montrer que v a une limite finie en $(-1)^+ \; sietssi \; b = 1$. Déterminer cette limite. Quelle est l'unique valeur de b possible ?
d. En déduire l'unique valeur de a qui rend f continue en 0.
a. En déduire l'unique valeur de c qui rend f continue en -.1 $u(x) = (1+x)^{\frac{a}{x}}$ est de la forme $\varphi(x)^{\theta(x)}$ $avec\; \varphi(x) = 1 + x \; et \; \theta(x) = \frac{a}{x}$. Donc par définition, on doit écrire : $u(x) = e^{\frac{a}{x}\ln(1+x)}$

b. u est définie sur $]0,+\infty[$ car $\forall x > 0, 1 + x > 0$. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$. Donc v est définie sur $]-1;\; 0]$. Enfin, , $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Donc w est définie sur $]-\infty,-1[$.

De plus, $u, v \; et \; w$ e sont constituées que de fonctions continues sur leur propre domaine de définition donc u, v et w sont-elles continues sur respectivement $]0,+\infty[,]-1{,}0[\; et \;]-\infty,-1[$. Et, par conséquent, f l'est aussi.

ATTENTION : v est aussi définie et continue en 0 mais comme 0 est un point de raccord entre deux expressions de f , on ne peux pas encore dire si f est continue en 0 .

Je peux par contre dire que $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} v(x) \underbrace{=}_{car\; v\; est\; continue\; en\; 0} v(0)$.

c. Si $b \neq 1$ alors la limite de v en $(-1)^+$ n'est pas une FI et donne $\frac{b-1}{0^+} = \begin{cases} +\infty \; si \; b > 1 \\ -\infty \; si \; b < 1 \end{cases}$.

Si $b = 1$ alors $v(x) = \frac{1+x^3}{x^2+3x+2} = \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{x^2-x+1}{x+2}$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} v(x) = 3$.

Ainsi, v a une limite finie en $(-1)^+ \; sietssi \; b = 1$. Et si $b = 1$ alors $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} v(x) = 3$. L'unique valeur de b possible pour que f soit continue en -1 est donc $b = 1$. Désormais $b = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} f(x) = 3$

d. Tout d'abord $\frac{1}{2} = f(0) \; et \; pour \; que \; f \; soit \; continue \; en \; 0 \; il \; faut \; et \; il \; suffit \; que \; \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f(x) = f(0)$

Etudions la limite de f en 0^+: $u(x) = e^{a\frac{\ln(1+x)}{x}}$. Or $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \; donc \; \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} u(x) = e^a \; .Et \; par \; suite \; \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = e^a$.

Etudions la limite de f en 0: $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} v(x) \underbrace{=}_{car\; v\; est\; continue\; en\; 0} v(0) \underbrace{=}_{car\; b=1} \frac{1}{2} = f(0)$.

Donc pour que f soit continue en 0 il faut et il suffit que $e^a = \frac{1}{2}$ i.e. $a = -\ln(2)$. Désormais $a = -\ln(2)$.

e. Tout d'abord $-\frac{c}{2} = f(-1) \; et \; pour \; que \; f \; soit \; continue \; en -1 \; il \; faut \; et \; il \; suffit \; que \; \lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x<-1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x<-1}} f(x) = f(-1)$.

Or, $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} f(x) = 3$ donc, pour que f soit continue en -1, il est nécéssiaire que $-\frac{c}{2} = 3 \; i.e. c = -6$. Désormais $c = -6$.

Alors, $w(x) = -6\frac{e^{x+1}-1}{x^2-1} = -6\frac{e^{x+1}-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{6}{1-x}\,\frac{e^{x+1}-1}{(x+1)}$. Or, $\begin{cases} \lim\limits_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1 \\ \lim\limits_{x\to -1} x+1 = 0 \end{cases}$, donc par composition, $\lim\limits_{x\to -1} \frac{e^{x+1}-1}{x+1} = 1$. J'en déduis que $\lim\limits_{x\to -1} w(x) = \frac{6}{2} = 3$. Et par suite, $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x<-1}} f(x) = 3 = \lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} f(x) = f(-1)$. Je conclus que f est continue en -1.

Bilan : f est continue sur $\mathbb{R}$ sietssi $\begin{cases} a = -\ln(2) \\ b = 1 \\ c = -6 \end{cases}$.

Dérivée de $f(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1-8x^3}$

$\boldsymbol{Df}$: $f(x)$ *existe* $\Leftrightarrow \begin{cases} 1-8x^3 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)} \begin{cases} (1-2x)\left(\underbrace{1+2x+4x^2}_{\substack{>0 \\ car\ \Delta<0}}\right) \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2}. \\ x \neq 0 \end{cases}$

Donc, $Df =]-\infty;0[\cup]0;\frac{1}{2}]$.

$\boldsymbol{Dc}$: f est continue sur tout son domaine de définition car elle n'est pas défnie par morceaux ni sous forme intégrale et n'est constituée que de fonctions continues sur leur propre domaine de définition. Ainsi, $Dc = Df$.

$\boldsymbol{Df'}$ **:** Dans l'expression de f, seule la fonction racine carrée n'est pas dérivable sur tout son domaine de définition. La fonction racine carrée n'est dérivable que sur $\mathbb{R}^{+*}$. Or, $\forall x \in\ Df\backslash\{1/2\}, 1-8x^3 \in \mathbb{R}^{+*}$. Alors par compostion, je peux conclure que f est au moins dérivable sur $Df\backslash\{1/2\}$.

Et $\forall x \in Df\backslash\{1/2\}. f'(x) = h'(x)g(x) + h(x)g'(x)$ où $h(x) = e^{u(x)}$ *et* $g(x) = \sqrt{v(x)}$ et $u(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ *et* $v(x) = 1-8x^3$. $u'(x)e^{u(x)}\sqrt{v(x)} + \frac{v'(x)}{2\sqrt{v(x)}}\ e^{u(x)}$où $u(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ *et* $v(x) = 1-8x^3$. Or, $u'(x) = -x^{-2}$ *et* $v'(x) = -24x^2$.

Donc, $\forall x \in Df\backslash\{1/2\}. f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1-8x^3} - 12\frac{x^2}{\sqrt{1-8x^3}}e^{\frac{1}{x}}$.

Dérivabilité en ½ ? $\forall x \in Df\backslash\{1/2\}. \frac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}} = \frac{2e^{\frac{1}{x}}\sqrt{(1-2x)(1+2x+4x^2)}}{2x-1} \underbrace{=}_{\substack{car\ sur\ Df, \\ 2x-1\geq 0}} \frac{2e^{\frac{1}{x}}\sqrt{(1+2x+4x^2)}}{\sqrt{2x-1}}$. Donc, $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \frac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}} = +\infty$. J'en déduis que f n'est pas dérivable en ½ . De plus, comme f est continue en ½ , je peux conclure que Cf a une tangente vefrticale en ½.

Ainsi, f est exactement dérivable sur $Df\backslash\{1/2\}$. $Df' = Df\backslash\{1/2\}$.