Jour 8
Corrigé

BUT : Montrer que $f: \left(x \mapsto \begin{cases} 3-x \text{ si } x \in [1,2] \\ x^2 \text{ si } x \in [0,1[\end{cases}\right)$ est bijective de $[0,2]$ sur $[0,2]$ sans être ni continue, ni strictement monotone sur l'intervalle $[0,2]$. Donner une expression de f^{-1}. Tracer enfin Cf et Cf^{-1} sur un même dessin.

a. Montrer que $x \in [0,1[\Leftrightarrow f(x) \in [0,1[$ et $x \in [1,2] \Leftrightarrow f(x) \in [1,2]$.
b. Fixer $y \in [0,2]$. Résoudre $f(x) = y$ d'inconnue $x \in [0,2]$ en distinguant deux cas qui découlent de 1.
c. En déduire que f est bijective de $[0,2]$ sur $[0,2]$ et décrire f^{-1}.
d. Justifier que f n'est ni croissante, ni décroissante.
e. Justifier que f n'est pas continue sur $[0,2]$.

a. Si $x \in [0,1[$ alors $f(x) = x^2 \in [0,1[$. Si $f(x) = x^2 \in [0,1[$ alors $x \in]-1\,;1[$ et $x \in Df$ donc $x \in [0,1[$.

Et, $x \in [1,2] \Leftrightarrow \begin{cases} -x \in [-2,-1] \\ x \in [1,2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x \in [1,2] \\ x \in [1,2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [1,2] \\ f(x) \in [1,2] \end{cases}$.

Ainsi, $(x \in [0,1[\Leftrightarrow f(x) \in [0,1[\,)$ et $(x \in [1,2] \Leftrightarrow f(x) \in [1,2])$.

b. Fixons $y \in [0,2]$ et résolvons l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in [0,2]$.

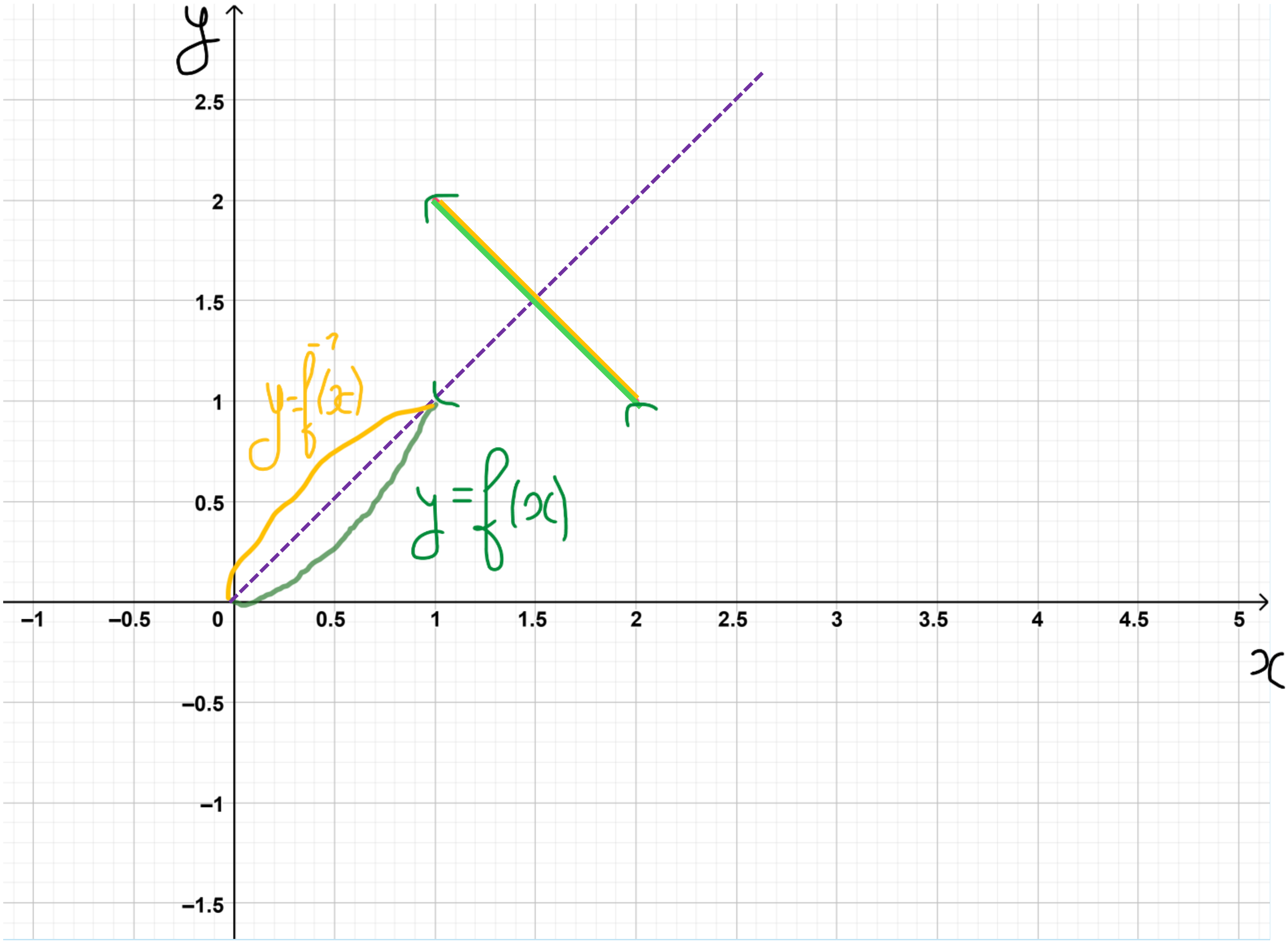
1^er^ cas $y \in [0,1[$. Alors les solutions de l'équation $f(x) = y$ sont dans $[0,1[$ d'après 1.

$f(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0,1[\\ x^2 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0,1[\\ x = \sqrt{y} \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{car\ \sqrt{y} \in [0,1[} x = \sqrt{y}$. Donc $\sqrt{y}$ est l'unique antécédent de y par f.

1^er^ cas $y \in [1,2]$. Alors les solutions de l'équation $f(x) = y$ sont dans $[1,2]$ d'après 1.

$f(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [1,2] \\ 3-x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [1,2] \\ x = 3-y \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{car\ 3-y \in [1,2]} x = 3-y$. Donc $3-y$ est l'unique antécédent de y par f.

Conclusion : tout y de $[0,2]$ a un unique antécédent par f qui est $\begin{cases} \sqrt{y} & \text{si y} \in [0,1[\\ 3-y & si\ y \in [\in 1,2] \end{cases}$. J'en conclus que f est bijective de $[0,2]$ sur $[0,2]$ et $\forall y \in [0,2], f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{y} & \text{si y} \in [0,1[\\ 3-y & si\ y \in [\in 1,2] \end{cases}$.



c. Par contre-exemple : $\begin{cases} f(0) = 0 < 1 = f(2) \\ 0 < 2 \end{cases}$ mais $\begin{cases} f(1) = 2 > 1 = f(2) \\ 1 < 2 \end{cases}$. Donc f n'est ni croissante, ni décroissante.

d. Montrons que f n'est pas continue en 1. $f(1) = 2$. Mais $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} x^2 = 1 \neq f(1)$. Donc f n'est pas continue en 1 et par suite, f n'est pas continue sur $Df = [0,2]$.

Dérivée de $f(x) = \frac{1-2x^5}{x^2+7x+6}$

$-x^2 + 7x + 6 \underbrace{=}_{\substack{car -1+(-6)=-7=-\frac{b}{a} \\ (-1)\times(-6)=6=\frac{c}{a}}} (x+1)(x+6)$. Donc $Df = \mathbb{R}\backslash\{-1\,;-6\}$. f est continue et dérivable sur Df (car son .....)

et $\forall x \in Df, f'(x) = \frac{-10x^4(x^2+7x+6)-(1-2x^5)(2x+7)}{(x^2+7x+6)^2} = \frac{-6x^6-56x^5-60x^4-2x-7}{(x^2+7x+6)^2}$.

En décomposant f en éléments simples, je trouve $f(x) = -2x^3 + 14x^2 - 86x + 518 + \frac{3}{5} \times \frac{1}{x+1} - \frac{15553}{5} \times \frac{1}{x+6}$.

Alors, $f'(x) = -6x^2 + 28x - 86 + \frac{3}{5} \times \frac{-1}{(x+1)^2} - \frac{15553}{5} \times \frac{-1}{(x+6)^2}$ et cette écriture est la décomposition en éléments simples de f'.

RQUE : il est plus facile de dériver f sous sa forme décomposée en éléments simples !!!!!