JOUR 7
Corrigé

Soit f et g deux fonctions réelles, continues sur un intervalle I et telles que : $\forall x \in I, f(x)^2 = g(x)^2$ et $f(x) \neq 0$.

BUT : Montrer que $\forall x \in I, f(x) = g(x)$ ou $\forall x \in I, f(x) = -g(x)$.

a. En quoi ces deux phrases mathématiques sont-elles différentes :

- $\forall x \in I, f(x) = g(x)$ *ou* $\forall x \in I, f(x) = -g(x)$.
- $\forall x \in I, f(x) = g(x)$ *ou* $f(x) = -g(x)$.

b. Justifier que f et g conservent un signe strict sur l'intervalle I en appliquant le corollaire du TVI.

c. Conclure.

a. Dans la deuxième phrase « $\forall x \in I, f(x) = g(x)$ *ou* $f(x) = -g(x)$." , il peut exister deux réels x_1 *et* x_2 tels que $f(x_1) = g(x_1)$ et $f(x_2) = -g(x_2)$.

Dans la première phrase « $\forall x \in I, f(x) = g(x)$ *ou* $\forall x \in I, f(x) = -g(x)$." , ou bien tous les x de I vérifient $f(x) = g(x)$, ou bien tous les x de I vérifient $f(x) = -g(x)$.

b. f est continue l'intervalle I et f ne s'annule pas sur I donc le corollaire du TVI assure que f conserve un signe strict sur l'intervalle I . De plus, $\forall x \in I, g(x)^2 = f(x)^2 \neq 0$. Donc g ne s'annule pas sur I. Alors comme g est aussi continue sur l'intervalle I, g conserve un même signe strict sur I.

c. $\forall x \in I, g(x)^2 = f(x)^2$ donc $\forall x \in I, g(x) = f(x)$ ou $g(x) = -f(x)$. Par conséquent,

ou bien f et g ont le même signe sur I alors nécessairement $\forall x \in I, g(x) = f(x)$;

ou bien f et g ont un signe opposé sur I alors nécessairement $\forall x \in I, g(x) = -f(x)$.

Dérivée de $f(x) = \frac{1}{2-x}$

$Df = \mathbb{R}\backslash\{2\}$ et f est continue et dérivable sur Df (car son expression.....) . Et $\forall x \in Df, f'(x) = -\frac{-1}{(2-x)^2} = \frac{1}{(x-2)^2}$.

Dérivée de $f(x) = \frac{1}{3x-7}$

$Df = \mathbb{R}\backslash\{\frac{7}{3}\}$ et f est continue et dérivable sur Df (car son expression.....) . Et $\forall x \in Df, f'(x) = -\frac{3}{(3x-7)^2}$.

$$\frac{1}{u(x)} = u(x)^{-1} \xrightarrow{\textit{dérive par rapport à } x} -u'(x)u(x)^{-2} = -\frac{u'(x)}{u(x)^2}$$