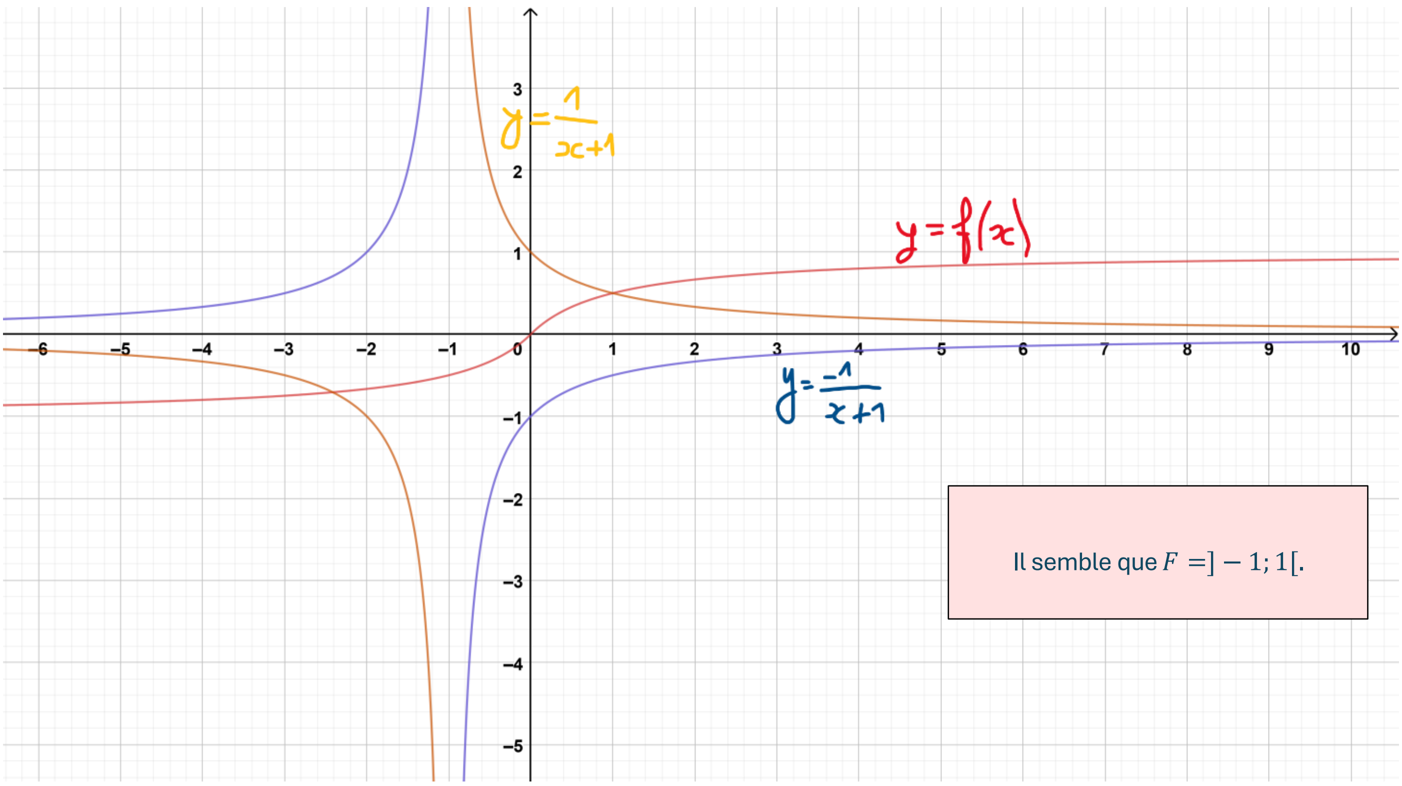
JOUR 9
Corrigé

BUT : Montrer que $f:\left(x\mapsto \frac{x}{1+|x|}\right)$ est bijective de Df sur un domaine F à déterminer et donner une expression de f^{-1}. Tracer enfin Cf et Cf^{-1} sur un même dessin.

a. Déterminer Df.
b. Tracer rapidement Cf pour découvrir F.
c. Montrer que $x>0 \Leftrightarrow f(x)>0$.
d. Fixer $y\in\mathbb{R}$. Résoudre $f(x)=y$ d'inconnue x en distinguant deux cas qui découlent de c.
e. En déduire que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur un domaine F et décrire f^{-1}

a. $\forall x\in\mathbb{R}, |x|\geq 0$ donc $1+|x|\geq 1$ donc $1+|x|\neq 0$. Donc $Df=\mathbb{R}$.

b. f est impaire . $\forall x\in\mathbb{R}^+,\ f(x)=\frac{x}{1+x}=\frac{1+x-1}{1+x}=1-\frac{1}{1+x}$ donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ et la courbe de f a pour allure :



c. $\forall x\in\mathbb{R},\ 1+|x|>0$ donc $f(x)$ est du signe de x.

d. Soit y un réel.

1^er^ cas $y\geq 0$. Alors d'après c., les antécédents de y par f ,f,s'il en existe, sont positifs. Donc,

$$y=f(x)\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x}{1+x}=y\\ x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=(1+x)y\\ x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(1-y)x=y\\ x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\begin{cases}x=\frac{y}{1-y}\ si\ y\neq 1\\ x\geq 0\end{cases}\\ impossible\ si\ y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{y}{1-y}\ si\ 0\leq\ y<1\\ impossible\ si\ y\geq 1\end{cases}.$$

Donc parmi les réels positifs, seuls les réels y compris dans $[0,1[$ ont un antécédent par f et cet antécédent est unique et vaut $\frac{y}{1-y}$.

2^ème^ cas $y<0$. Alors d'après c., les antécédents de y par f ,f,s'il en existe, sont négatifs. Donc,

$$y=f(x)\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x}{1-x}=y\\ x<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=(1-x)y\\ x<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(1+y)x=y\\ x<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\begin{cases}x=\frac{y}{1+y}\ si\ y\neq -1\\ x\geq 0\end{cases}\\ impossible\ si\ y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{y}{1+y}\ si-1<\ y<0\\ impossible\ si\ y\leq -1\end{cases}.$$

Donc parmi les réels strictement négatifs, seuls les réels y compris dans $]-10[$ ont un antécédent par f et cet antécédent est unique et vaut $\frac{y}{1+y}$.

Bilan et conclusion : tout réel de $]-1;1[$ a un unique antécédent par f qui est $\begin{cases} \frac{y}{1-y} \; si \; y \in [0,1[\\ \frac{y}{1+y} \; si \; y \in]-1;0[\end{cases}$ *et* les autres réels n'ont pas d'antécédents par f. J'en conclus que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1;1[$ et

$$\forall y \in]-1;1[, f^{-1}(y) = \begin{cases} \dfrac{y}{1-y} \; si \; y \in [0,1[\\ \dfrac{y}{1+y} \; si \; y \in]-1;0[\end{cases} = \frac{y}{1-|y|}.$$

Dérivée de $f(x) = Arcsin(2x-1)$

$\boldsymbol{Df}$? $Arcsin(2x-1)\ existe \Leftrightarrow -1 \leq 2x-1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 2x \leq 2 \Leftrightarrow x \in [0,1]$. Donc $Df = [0,1]$.

$\boldsymbol{Dc}$? f est la composée de deux fonctions continues sur leur propre domaine définition donc f est continue sur Df.

$\boldsymbol{Df'}$?
Dans l'expression de f seule la fonction $Arcsin$ n'est pas dérivable sur tout son domaine de définition. $Arcsin$ n'est dérivable que sur $]-1\,;1[$. Or , $-1 < 2x-1 < 1 \Leftrightarrow x \in]0,1[$. Donc f est au moins dérivable sur $]0,1[$.

$$Et\ \forall x \in]0,1[, f'(x) \underbrace{=}_{\substack{formule \\ de\ dérivation \\ d'une\ composée}} u'(x) \times Arcsin'(u(x)) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}} \text{ avec } \begin{cases} u(x) = 2x-1 \\ u'(x) = 2 \end{cases}.$$

Donc, $\forall x \in]0,1[, f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{4x-4x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$.

Dérivabilité en 0 et en 1 : Appliquons le critère de limite du taux d'accroissement.
f est continue sur $[0,1]$ dérivable au moins sur $]0,1[$ et $\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty = \lim_{x\to 1} f'(x)$. Donc le critère de limite du taux d'accroissement assure que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$. J'en déduis que f n'est pas dérivable ni en 0, ni en 1. Ainsi, f est exactement dérivable sur à $]0,1[$ i.e. $Df' =]0,1[$.