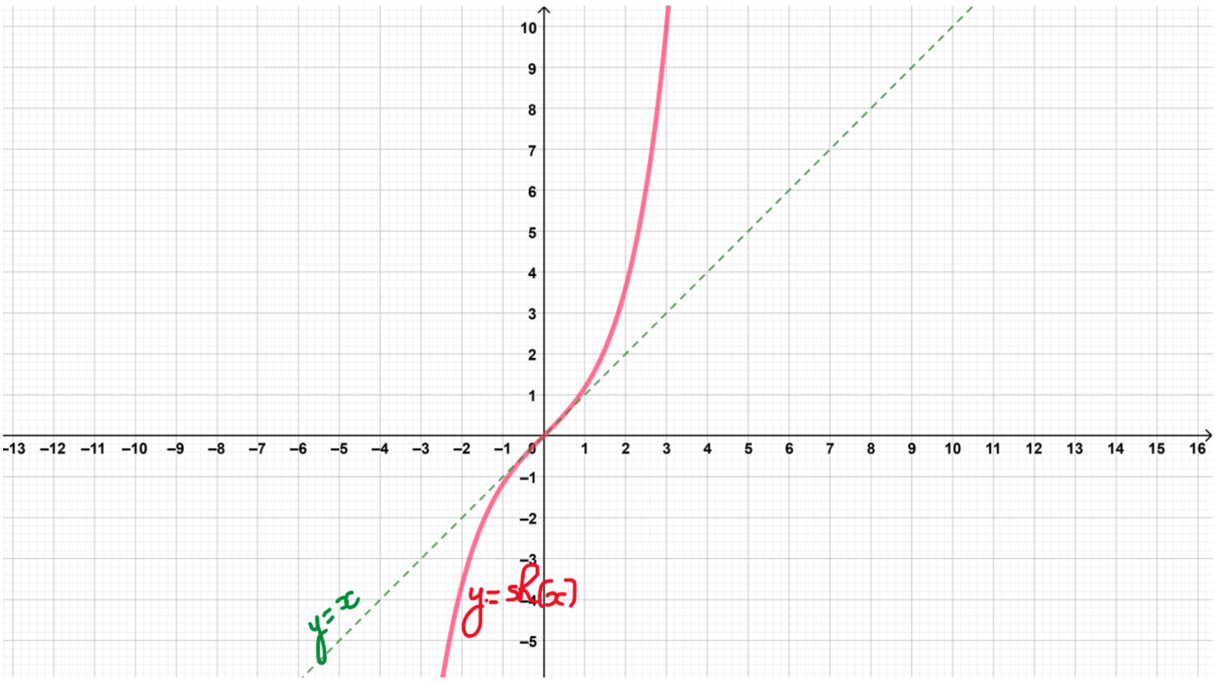
JOUR 10
Corrigé

On pose $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

BUT : Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à déterminer et donner une expression de sh^{-1}. Tracer enfin C_{sh} et $C_{sh^{-1}}$ sur un même dessin.

a. Etudier rapidement sh dans le but le tracer sa courbe C_{sh}.
b. Appliquer le $TBCSM$ à sh. En déduire J.
c. Fixer $y \in J$. Soit x l'unique antécédent de y par sh (d'après 2. cet antécédent existe et est unique). Exprimer x en fonction de y. En déduire une expression de sh^{-1}.
d. Tracer enfin $C_{sh^{-1}}$ sur le même dessin.

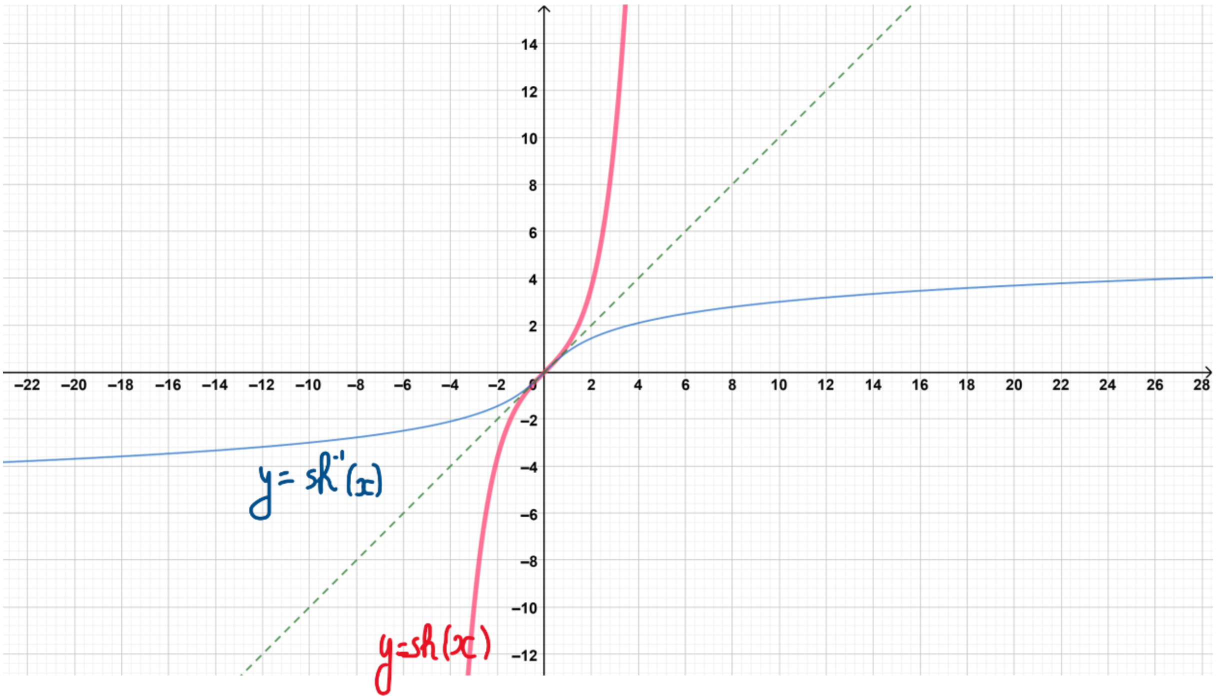
a. sh est définie, impaire, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, sh'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) > 0$. Donc sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. $Et \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $et\ par\ imparité, \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. De plus, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty\ car \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \overset{CC}{=} +\infty$ et par imparité, $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$; on dit alors que Cf a une branche parabolique de direction asymptotique (Oy) ; autrement dit, C_{sh} tend très vite vers l'infini en plus et moins l'infini.



b. sh est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ donc le TBSCM assure que :

1) $J = sh(\mathbb{R}) =]\lim_{x\to-\infty} sh(x), \lim_{x\to+\infty} sh(x)[= \mathbb{R}$.
2) *sh est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.*
3) *sh^{-1} est continue sur $\mathbb{R}$ et impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*

c. Soit y un réel.
Soit x l'unique réel vérifiant $sh(x) = y$. Donc, $x =$l' unique antécédent de y par $sh = sh^{-1}(y)$.
Exprimons x en fonction de y. Pour cela, posons $X = e^x$.
Je sais que $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y$ donc $X - \frac{1}{X} = 2y$ et finalement $X^2 - 2yX - 1 = 0$.
Posons $\Delta = 4y^2 + 4 = \left(2\sqrt{y^2+1}\right)^2$ et $X_1 = \frac{2y + 2\sqrt{y^2+1}}{2} = y + \sqrt{y^2+1}$ et $X_2 = y - \sqrt{y^2+1}$.
Donc $X = X_1$ ou $X = X_2$.
Mais $X > 0$. Or $X_2 < 0 < X_1$ $\left(car\ \pm y \le |y| \le \sqrt{y^2+1}\right)$. Donc, $X = X_1 = y + \sqrt{y^2+1}$.
Et enfin, $x = \ln(X) = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$.
J'en conclus que $\forall y \in \mathbb{R}, sh^{-1}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$.



Dérivée de $\boldsymbol{f(x) = Arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right)}$

$\boldsymbol{Df}$? $f(x) existe \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ -1 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-x)(1+x) \geq 0 \\ 0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1;1] \\ 0 \leq 1-x^2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1;1] \\ 0 \leq x^2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1;1].$

Donc $Df = [-1;1]$.

$\boldsymbol{Dc}$? l'expression de f n'est constituée que de fonctions continues sur leur propre domaine de définition donc f est continue sur Df.

$\boldsymbol{Df'}$? Dans l'expression de f , deux fonctions ne sont pas dérivables sur leur domaine de définition : $Arccos$ n'est dérivable que sur $]-1;1[$ et $\sqrt{\ldots}$ n'est dérivable que sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Or, $1-x^2 \in \mathbb{R}^{+*} \Leftrightarrow x \in]-1,1[$. Et, $\sqrt{1-x^2} \in]-1;1[\Leftrightarrow 0 \leq 1-x^2 < 1 \Leftrightarrow x \in [-1;1] \backslash \{0\}$.

Donc f est au moins dérivable sur $]-1,1[\backslash\{0\}$.

Et, $\forall x \in]-1;0[\cup]0;1[, f'(x) \underbrace{=}_{u(x)=\sqrt{1-x^2}} u'(x) \times Arccos'\left(u(x)\right) = \frac{-u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$ et $u'(x) \underbrace{=}_{v(x)=1-x^2} \frac{v'(x)}{2\sqrt{v(x)}} = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Donc $\forall x \in]-1\,;0[\cup]0\,;1[, f'(x) = \frac{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-(1-x^2)}} = \frac{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{x^2}} = \frac{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{|x|} = \frac{-x}{|x|\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{|x|\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \; si \; x \in]0;1[\\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \; si \; x \in]-1;0[\end{cases}$.

Dérivabilité en -1 ; en 1 et en 0 ? Appliquons le critère de limite du taux d'accroissement.

f est continue sur $[-1;1]$, dérivable au moins sur $]-1;0[\cup]0;1[$ et $\begin{cases} \lim_{x\to 1} f'(x) = -\infty \\ \lim_{x\to -1} f'(x) = +\infty \\ \lim_{x\to 0^+} f'(x) = -1 \\ \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 1 \end{cases}$. Donc le critère de limite du taux d'accroissement assure que $\begin{cases} \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty \\ \lim_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = +\infty \\ \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1 \neq -1 = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \\ \left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \; n'a \; donc \; pas \; de \; limite \; en \; 0 \right) \end{cases}$. Donc f n'est dérivable ni en 1, ni en -1 ni en 0.

Ainsi, f est exactement dérivable sur $]-1,1[\backslash\{0\}$.