JOUR 11

Corrigé

BUT : Montrer que l'équation $\tan(x) = x$ admet une seule solution u_n dans chaque intervalle $I_n =]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$ où $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

a. Sait-on résoudre algébriquement l'équation $\tan(x) = x$? Quelle méthode va-t-on alors appliquer pour résoudre cette équation ?Montrer que l'équation $\tan(x) = x$ admet une seule solution u_n dans chaque intervalle I_n.

b. Trouver un encadrement de u_n qui permet d'en déduire sa limite.

a. Non on ne sait pas résoudre algébriquement… on va étudier la fonction différence des deux membres dans le but de connaitre son signe.

Posons $f(x) = \tan(x) - x$. f est bien définie, continue et dérivable sur chaque intervalle $I_n =]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$. Soit n un entier naturel. $\forall x \in I_n, f'(x) = 1 + tan^2(x) - 1 = tan^2(x) \geq 0$. f' est positive sur l'intervalle I_n et ne s'annule qu'au poitn isolé $n\pi$. J'en déduis que f est strictement croissante sur I_n. Comme de plus, f est continue sur l'intervalle I_n. Donc , le TBCSM assure que $f(I_n) =]\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^+} f(x), \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^-} f(x)[= \mathbb{R}$ et f est bijective de I_n sur $\mathbb{R}$. Donc 0 admet un unique antécédent u_n dans I_n par f. J'en conclus que l'équation $\tan(x) = x$ admet une seule solution u_n dans chaque intervalle I_n.

b. $\forall n, u_n \in I_n$ $i.e. -\frac{\pi}{2} + n\pi < u_n < \frac{\pi}{2} + n\pi$. Comme $\lim_{n\to+\infty} -\frac{\pi}{2} + n\pi = +\infty$, j'en déduis que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Dérivée $de\ f(x) = x\sin(Arctan(x))$

$Df = \mathbb{R}$, f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ ($car\ son\ expression\ \ldots\ldots$).

Et $\forall x, f'(x) \underbrace{=}_{g(x)=\sin(Arctan(x))} g(x) + xg'(x) = \sin(Arctan(x)) + xArctan'(x)sin'(Arctan(x))$

$f'(x) = \sin(Arctan(x)) + x\frac{1}{1+x^2}cos(Arctan(x)) = \sin(Arctan(x)) + \frac{x}{1+x^2}cos(Arctan(x))$

Or, $cos^2(t) = \frac{1}{1+tan^2(t)}$ donc $cos^2(Arctan(x)) = \frac{1}{1+tan^2(Arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$; et comme $Arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $cos(Arctan(x)) > 0$ et finalement $cos(Arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Enfin $\sin(t) = \tan(t) \times \cos(t)$ donc $sin(Arctan(x)) = \tan(Arctan(x)) \times \cos(Artan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Donc $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{1+x^2}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\left(\frac{2+x^2}{1+x^2}\right)$.