JOUR 12

Corrigé

BUT : montrer que : pour tout réel x de $[0,\pi]$, $1-\frac{2}{\pi}\left|x-\frac{\pi}{2}\right| \leq \sin(x) \leq \frac{2}{\pi}\sqrt{x(\pi-x)}$.

a. Comme on ne se sait pas montrer algébriquement ces inégalités, posons :
$\forall x \in [0,\pi], f(x) = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots et\ g(x) = sin^2(x) - \frac{4}{\pi^2}x(\pi-x)$.

b. Montrer que $\forall x \in [0,\pi], f(\pi-x) = f(x)$. Déduisez-en un axe de symétrie de Cf. Réduisons l'étude à $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

c. Etudier f sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Il sera sûrement nécessaire de dériver plusieurs fois … tant que le signe de $f'(x) > 0$ ou $f''(x) > 0$ ou $f'''(x) > 0$ n'est possible à résoudre algébriquement !

d. Faites de même avec g.

a. Comme on ne se sait pas montrer algébriquement ces inégalités, posons : $\forall x \in [0,\pi], \begin{cases} f(x) = \sin(x) - 1 + \frac{2}{\pi}\left|x-\frac{\pi}{2}\right| \\ g(x) = sin^2(x) - \frac{4}{\pi^2}x(\pi-x). \end{cases}$.

$\forall x \in [0,\pi], (\pi-x) \in [0,\pi]\ et\ f(\pi-x) = \sin(\pi-x) - 1 + \frac{2}{\pi}\left|\pi-x-\frac{\pi}{2}\right| = \sin(x) - 1 + \frac{2}{\pi}\left|\frac{\pi}{2}-x\right| = \sin(x) - 1 + \frac{2}{\pi}\left|x-\frac{\pi}{2}\right| = f(x)$. Donc pour tout $x \in [0,\pi]$, les points $M(x, f(x))$ et $M'(\pi-x, f(x))$ sont deux points de Cf et sont symétriques par rapport à la droite verticale D d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ car leur milieu $I(\frac{\pi}{2}, f(x))$ est sur cette droite et $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à $\vec{\imath}$ donc orthogonal à D. J'en déduis que Cf est elle-même symétrique par rapport à D.
Réduisons en conséquence l'étude de f à $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. On complètera ensuite par symétrie.

Attention à cause de la valeur absolue f n'est peut-être pas dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Par contre, H l'est ! c'est pour cette raison que j'introduis H.

b. $\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right], f(x) = \sin(x) - 1 + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = H(x)$ où la fonction $H : \begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x) - 1 + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \end{pmatrix}$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. $\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right], H'(x) = \cos(x) - \frac{2}{\pi}$. Donc H' est continue et dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right], H''(x) = -\sin(x)$; donc $\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right], H''(x) \leq 0$ et H''ne s' annule qu' au point isolé 0. Donc sur l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, H' est strictement décroissante. Alors le $TBSCM$ assure que $H'\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} H'(x), \lim_{x\to 0} H'(x)\right] = \left[H\left(\frac{\pi}{2}\right), H(0)\right]$ et H'est bijective de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[H\left(\frac{\pi}{2}\right), H(0)\right]$. Or, $H(0) > 0 > H\left(\frac{\pi}{2}\right)$ $i.e. 0 \in \left[H\left(\frac{\pi}{2}\right), H(0)\right]$.Donc 0 admet un unique antécédent α par H' . Par stricte monotonie de H', j'en déduis que $\forall x \in [0,\alpha[, H'(x) > 0\ \ et\ \forall x \in]\alpha,\frac{\pi}{2}], H'(x) < 0$.
J'en déduis que H est strictement croissante sur $[0,\alpha]$ et strictement décroissante sur $\left[\alpha,\frac{\pi}{2}\right]$. Comme $H(0) = 0 = H\left(\frac{\pi}{2}\right)$, j'en conclus que H est positive sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

x	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$H''(x)$	0	$-$		$-$	
$H'(x)$	>0	$+$ ↘	0	$-$ ↘	>0
$H(x)$	0	↗		$+$ ↘	0

Ainsi, $\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right], f(x) \geq 0$. Comme Cf est symétrique par rapport à $D, \forall x \in [0,\pi]$, $f(x) \geq 0$ et par suite , je peux conclure que :

$$\forall x \in [0,\pi], \sin(x) \geq 1 + \frac{2}{\pi}\left|x-\frac{\pi}{2}\right|.$$

c. $\forall x \in [0,\pi], (\pi-x) \in [0,\pi]\ et\ g(\pi-x) = \frac{4}{\pi^2}(\pi-x)(\pi-(\pi-x)) - \sin^2(\pi-x) = \frac{4}{\pi^2}(\pi-x)x - \sin^2(x) = g(x)$.
Donc Cg est aussi symétrique par rapport à D. Réduisons en conséquence l'étude de g à $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. On complètera ensuite par symétrie. $\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right], g(x) = \frac{4}{\pi}x - \frac{4}{\pi^2}x^2 - \sin^2(x)$.
g est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $g'(x) = \frac{4}{\pi} - \frac{8}{\pi^2}x - 2\sin(x)\cos(x) = \frac{4}{\pi} - \frac{8}{\pi^2}x - \sin(2x)$.
g' est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $g''(x) = -\frac{8}{\pi^2} - 2\cos(2x)$. g'' est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $g'''(x) = 4\sin(2x)$.
Par le même principe que pour f,

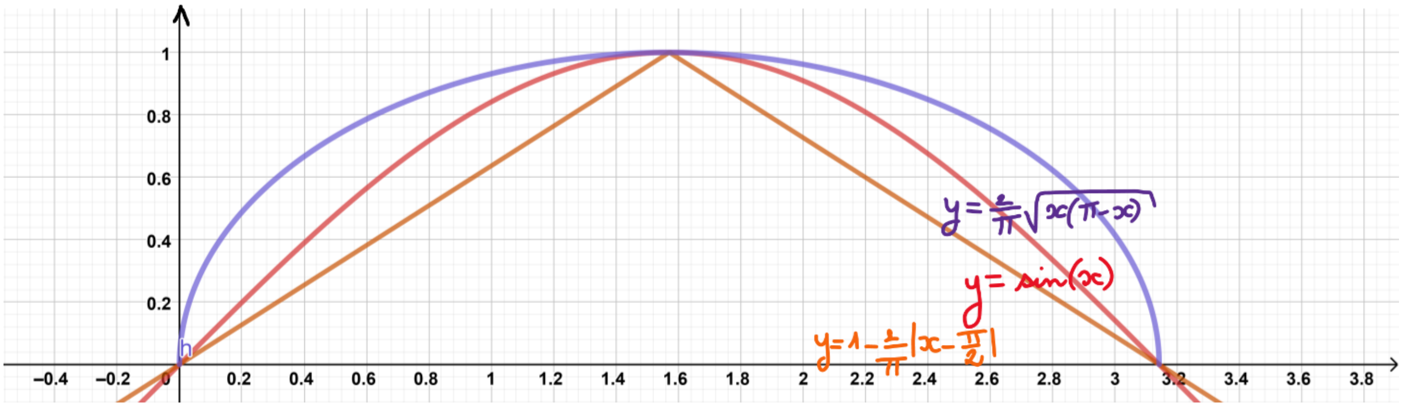
x	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$g'''(x)$	0	$+$		$+$	
$g''(x)$	< 0	$-$ ↗	0	$+$ ↗	> 0
$g'(x)$	> 0	↗		$+$ ↘	0
$g(x)$	0		$+$ ↗		

Ainsi, $\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right], g(x) \geq 0$. Et par suite, $\forall x \in [0,\pi]$, $g(x) \geq 0$ et je peux conclure que :

$\forall x \in [0,\pi], \sin^2(x) \leq \frac{4}{\pi^2}(\pi-x)x$ et finalement
$\forall x \in [0,\pi], \sin(x) \leq \frac{2}{\pi}\sqrt{(\pi-x)x}$

Puisque les deux membres sont positifs sur $[0,\pi]$.

Illustration :



Dérivée de $f(x)=\frac{Arcsin(x)}{Arccos(x)}\neq Arctan(x)$

Df ? $f(x)\ existe\ \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[-1;1] \\ Arccos(x)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[-1;1] \\ x\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow x\in[-1;1[$. Donc $Df=[-1;1[$.

Dc ? f est continue sur Df car son expression ....

Df' ? Dans l'expression de f, seules $Arccos$ et $Arcsin$ ne sont pas dérivables sur tout leur domaine de définition : ces deux fonctions sont dérivables uniquement sur $]-1\,;1[$. J'en déduis que f est au moins dérivable $]-1\,;1[$

et $\forall x\in]-1;1[, f'(x)=\frac{Arcsin'(x)Arccos(x)-Arccos'(x)Arcsin(x)}{Arccos(x)^2}=\frac{\frac{Arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{Arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}}{Arccos(x)^2}=\frac{Arccos(x)+Arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}Arccos(x)^2}$.

Or nous pouvons prouver que : $\forall x\in]-1;1[,\ Arccos(x)+Arcsin(x)=\frac{\pi}{2}$. (ce sera bientôt un résultat de cours !!!).

En effet, posons $\forall x\in]-1;1[, h(x)=Arccos(x)+Arcsin(x)$.

h est dérivable sur $]-1;1[$ et $\forall x\in]-1;1[, h'(x)=Arccos'(x)+Arcsin'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0$. Donc h est constante sur l'intervalle $]-1;1[$. Ainsi, $\forall x\in]-1;1[, h(x)=h(0)=Arccos(0)+Arcsin(0)=\frac{\pi}{2}+0=\frac{\pi}{2}$.

et $\forall x\in]-1;1[, f'(x)=\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-x^2}Arccos(x)^2}=\frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}Arccos(x)^2}$.

Dérivabilité de f en -1 ? Appliquons le critère de limite du taux d'accroissement. Tout d'abord, $\lim_{x\to-1} Arccos(x)^2=Arccos(-1)^2=\pi^2$.

f est continue sur $[-1\,;1[$ et dérivable au moins sur $]-1\,;1[$ et $\lim_{x\to-1} f'(x)=+\infty$. Alors le critère assure que $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=+\infty$. Donc f n'est pas dérivable en -1 et Cf a une tangente verticale en -1.

Illustration :

Dérivée de $f(x)=Arctan(\cos(x))$.

$Df=\mathbb{R}$, f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ (car son expression ...) et

$\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=cos'(x)\times Arctan'(\cos(x))=\frac{-\sin(x)}{1+cos^2(x)}$.