TD cours : RAPPELS ET COMPLEMENTS SUR LES FONCTIONS

I GENERALITES

1 On munit le plan d'un repère orthonormé direct ce qui revient à représenter deux axes réels orthogonaux avec la même unité .

- Une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une relation qui à chaque réel associe zéro ou un réel.
- Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit x un réel. Ou bien f associe à x le réel y alors on note $y = f(x)$ et y est l'image de x par f et x est un antécédent de y par f . Ou bien x n'a pas d'associé par f, autrement dit, $f(x)$ n'existe pas.
- Le domaine de définition Df de f est l'ensemble des réels x tels que $f(x)$ existe .
- Si D est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, $f(D)$ est l'ensemble de toutes les images par f des éléments de D et $f^{-1}\langle D\rangle$ est l'ensemble par f de tous les antécédents de D par f. Et $f(Df)$ ou $Im(f)$ est l'ensemble de toutes les images par f.
- id_D est l'application de D dans D telle que : $\forall x \in D,\ id_D(x) = x$.
- Soit a un réel . Un voisinage V de a dans Df est un intervalle de la forme : $\begin{cases} V =]a-r, a+r[\setminus\{a\} \subset Df & \text{où } r > 0 \text{ si } a \notin Df \\ V =]a-r, a+r[\subset Df & \text{où } r > 0 \text{ si } a \in Df \end{cases}$

Un voisinage V à droite de a dans Df est un intervalle de la forme : $\begin{cases} V =]a, a+r[\subset Df \text{ où } r > 0 \text{ si } a \notin Df \\ V = [a, a+r[\subset Df \text{ où } r > 0 \text{ si } a \in Df \end{cases}$, Idem à gauche.

- un voisinage de $+\infty$ *dans* Df est un intervalle $V =]r, +\infty[\subset Df$ où $r > 0$ .Idem en $-\infty$.
- f vérifie une propriété au voisinage de a (*réel ou infini*) lorsque f vérifie cette propriété sur un voisinage de a dans Df.
- Le graphe ou la courbe de f est l'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x, f(x))$ tels que $x \in Df$. On lit x sur l'axe horizontale et $f(x)$ sur l'axe verticale .
- Soit $I \subset Df$. La restriction de f à I est l'application $f_{/I}$ définie sur I par : $\forall x \in I, f_{/I}(x) = f(x)$.
- Une fonction définie par morceaux est une fonction ayant différentes expressions sur différents intervalles. Une telle fonction est de la forme $f(x) = \begin{cases} g(x) \text{ si } x \neq a \\ L \text{ si } x = a \end{cases}$ où a *réel ou encore* $f(x) = \begin{cases} g(x) \text{ si } x \in I \\ h(x) \text{ si } x \in J \\ k(x) \text{ si } x \in K \end{cases}$ où I, J et K sont les domaines disjoints.

Désormais f , g et h désignent trois fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

II OPERATIONS

2
- f *et* g sont égales lorsqu'elles ont le même domaine de définition et qu'elles associent la même image à tout réel de ce domaine de définition , autrement dit lorsqu'elles coïncident en tout point de leur domaine de définition commun.
- Une combinaison linéaire de f et g est toute fonction de la forme $af + bg$ où a et b constantes.
- La composée de f par g est la fonction $g \circ f$ définie par : $g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$.

- Si f est définie sur D et g est définie sur E et $f(D) \subset E$ ($i.e. \forall x \in D, f(x) \in E$) alors $g \circ f$ est définie sur D. Autrement dit, $x \in D_{g\circ f} \Leftrightarrow x \in D_f$ *et* $f(x) \in D_g$. Illustration : $\begin{array}{ccccc} D & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$.
- $id_{Df} \circ f = f$ et $f \circ id_{Df} = f$.
- $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ mais $f \circ g \neq g \circ f$.

3
- Si u et v sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors par définition $u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln(u(x))}$.

En particulier, si a est un réel alors $x^a = e^{a\ln(x)}$ *et si de plus*, $a > 0$ alors $a^x = e^{x\ln(a)}$.

D'après cette définition, $u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln(u(x))}$ *existe* sietssi $v(x)$ *et* $u(x)$ *existent et* $u(x) > 0$.

- $f \times g$ est le produit de f et g , $f + g$ est la somme de f et g.
- Si $f_1, \dots, f_n$ sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors $\prod_{k=1}^{n} f_k = f_1 \times f_2 \times \dots \times f_n$ et $\sum_{k=1}^{n} f_k = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ et une combinaison linéaire de $f_1, \dots, f_n$ est toute fonction de la forme $\sum_{k=1}^{n} a_k f_k$ où $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des constantes.

III PARITE, IMPARITE ET PERIODICITE

- f est paire lorsque : $\forall x \in Df, \begin{cases} -x \in Df \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$ i.e. lorsque Cf est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- f est impaire lorsque : $\forall x \in Df, \begin{cases} -x \in Df \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$ i.e. lorsque Cf est symétrique par rapport à l'origine du repère.
- f est périodique lorsque : $\exists T \in \mathbb{R}^* / \forall x \in Df, \begin{cases} x + T \in Df \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$ i.e. lorsque Cf est globalement invariant par translation de vecteur $T\vec{\imath}$.

- Si f est paire ou impaire alors l'étude de f sur $\mathbb{R}^+ \cap Df$, complétée par une bonne symétrie, permet de tracer Cf.
- Si f est impaire et $f(0)$ existe alors $f(0) = 0$.
- Si f est T-périodique alors l'étude de f sur $]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \cap Df$ ou $[0, T[\cap Df$, complétée par des translations $T\vec{\imath}$, permet de tracer Cf.
- Si f est T-périodique alors $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in Df, f(x + kT) = f(x)$ (i.e. f est $kT-$ périodique).
- Si f est T-périodique et $(-T)$-périodique alors $\forall k \in \mathbb{Z}^*, \forall x \in Df, f(x + kT) = f(x)$ (i.e. f est $kT-$ périodique).
- Si f et g ont une période commune alors $fg, af + bg$ où a et b constantes et $\frac{f}{g}$ sont périodiques de période T''.

4 **Exercice :** Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} -\lfloor x \rfloor - 1 \text{ si } x \notin \mathbb{Z} \\ -x \text{ si } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$. Soit $h: (x \mapsto x - \lfloor x \rfloor)$ et $g: (x \mapsto |2x - 1|)$. Montrer que $f = g \circ h$ est paire, périodique.

IV CARACTERE MAJORE, MINORE, BORNE

… réels indépendants de x

- f est majorée lorsque : $\exists m \in \mathbb{R} / \forall x \in Df, f(x) \leq m$ ie. lorsque $f(Df)$ est majorée.
- f est majorée sur D lorsque : $\exists m \in \mathbb{R} / \forall x \in D, f(x) \leq m$ ie. lorsque $f(D)$ est majorée.
- f est minorée lorsque : $\exists m' \in \mathbb{R} / \forall x \in Df, f(x) \geq m'$ ie. lorsque $f(Df)$ est minorée .
- f est bornée sur D lorsque:$\exists m \in \mathbb{R}, \exists m' \in \mathbb{R} / \forall x \in D, m' \leq f(x) \leq m$.
- f est bornée au voisinage de a (réel ou ininfi) lorsqu'il existe un voisinage V de a dans Df sur lequel f est bornée.

Théorème : f est bornée sur $D \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} \ / \forall x \in D, |f(x)| \leq M$. démo chap 2

Théorème : Une combinaison linéaire ou un produit fini de fonctions bornées est bornée. démo ex 1 TD 3

4 **Exercice** : Montrer que $f: \left(x \mapsto 2sin\left(\frac{3x}{2}\right) - 7cos\left(\frac{x}{5}\right)\right)$ est périodique et bornée.

- f admet un maximum sur I lorsque : $\exists x_0 \in I / \forall x \in I, f(x) \leq f(x_0)$. $f(x_0)$est alors la valeur du maximum et ce maximum est atteint en x_0 . On note $f(x_0) = max_I f$.
- f admet un maximum local en x_0 lorsque $x_0 \in Df$ et il existe un voisinage V de Df tel que $\forall x \in V, f(x) \leq f(x_0)$.
- f admet un minimum sur I lorsque :$\exists x_1 \in I / \forall x \in I, f(x) \geq f(x_1)$. $f(x_1)$est alors la valeur du minimum
- Le réel α est un point fixe de f lorsque $\alpha \in Df$ et $f(\alpha) = \alpha$.

V MONOTONIE

- f est croissante lorsque : $\forall x \in Df, \forall y \in Df, (x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$.
- f est décroissante lorsque : $\forall x \in Df, \forall y \in Df, (x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y))$.
- f est strictement croissante lorsque : $\forall x \in Df, \forall y \in Df, (x < y \underset{(\Leftrightarrow)}{\Longrightarrow} f(x) < f(y))$.
- f est strictement décroissante lorsque : $\forall x \in Df,\ \forall y \in Df, (x < y \underset{(\Leftrightarrow)}{\Longrightarrow} f(x) > f(y)$.
- f est constante lorsque :$\forall a \in Df, \forall x \in Df, f(x) = f(a)$ ie. lorsque $\exists \alpha \in \mathbb{R} \ / \forall x \in Df, f(x) = \alpha$.

Théorème :

- La composée de deux fonctions de même (stricte) monotonie est (strictement) croissante .
- La composée de deux fonctions de monotonie contraire est décroissante .
- La somme de deux fonctions de même (stricte) monotonie est (strictement) monotone et de même monotonie que les deux fonctions. Une fonction produit d'un réel positif (resp. négatif) est d'une fonction monotone est monotone de même monotonie (resp. de monotonie contraire) . démo ex 1 TD 3

4b **Exercice** : Montrer que $f: \left(x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)\right)$ est définie sur $\mathbb{R}$, impaire et strictement croissante.

VI INJECTION, SURJECTION ET BIJECTION

5
- f est injective sur I lorsqu'un réel a au plus un antécédent par f ;
  autrement dit, lorsqu'une image a exactement un antécédent par f ;
  autrement dit, lorsque deux éléments distincts de I n'ont jamais la même image par f ;
  autrement dit, lorsque deux éléments de I ayant la même image sont nécessairement égaux.

Exemple : $(x \mapsto x^2)$ est injective sur $\mathbb{R}^+$ mais n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ car 2 et -2 ont la même image 4 par la fonction carrée .

6 **Théorème** • Toute fonction strictement monotone sur D est injective sur D .

- Toute composée d'injections est une injection. démo

7
- f est surjective de I sur J lorsque tout élément de J a au moins un antécédent dans I par f ;
  autrement dit, lorsque $f(I) = J$.

Exemple : exp est surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ mais n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

8 **Théorème** Toute composée de surjections est une surjection. démo

9
- f est bijective de I sur J lorsque f est injective et surjective de I sur J
  autrement dit lorsque tout élément de J a un unique antécédent dans I par f.

Dans ce cas, la bijection réciproque de f notée f^{-1}est l'application de J dans I définie par :

$\forall y \in J,\ f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent de y par f i.e. l'unique solution dans I de l'équation $f(x) = y$.

Autrement dit, f^{-1} est définie par : $\begin{cases} y = f(x) \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in J \end{cases}$. Et f^{-1} est bijective de J sur I et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Alors, $\forall x \in I, f^{-1}(f(x)) = x$ et $\forall x \in J, f(f^{-1}(x)) = x$. Autrement dit, $f^{-1} \circ f = id_E$ et $f \circ f^{-1} = id_F$.

NB : Dès que l'on a : $\begin{cases} y = f(x) \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = g(y) \\ y \in J \end{cases}$, on peut affirmer que tout élément de J admet un unique antécédent dans I qui est $x = g(y)$ et donc conclure que f est bijective de I sur J et $f^{-1} = g$.

10 La courbe de f^{-1} est symétrique de la courbe de f par rapport à la première bissectrice. démo

11 **Exercice :** Graphiquement, trouver tous les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ de sorte que la fonction $f: (x \mapsto ax + b|x|)$ soit bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

12 **Exemples déjà rencontrés et à connaitre** :

1. $\begin{cases} y = \ln(x) \\ x \in \mathbb{R}^{+*} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$. Donc exp est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et ln est bijective de $\mathbb{R}^{+*}$sur $\mathbb{R}$ et $(exp^{-1}) \; = ln$.
2. $\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ x \in \mathbb{R}^* \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{y} \\ y \in \mathbb{R}^* \end{cases}$. Donc la fonction inverse est bijective de $\mathbb{R}^*$ sur $\mathbb{R}^*$ et sa bijection réciproque est elle-même.
3. Soit a et b deux réels tels que $a \neq 0$. $\begin{cases} y = ax + b \\ x \in \mathbb{R}^* \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y-b}{a} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$. Donc la fonction $(x \mapsto ax + b)$ est bijective de $\mathbb{R}^*$ sur $\mathbb{R}^*$ et sa bijection réciproque est $(x \mapsto \frac{x-b}{a})$.
4. Si n est un entier pair alors $\begin{cases} y = \sqrt[n]{x} \\ x \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^n \\ y \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$. Donc $(x \mapsto \sqrt[n]{x})$ est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$ et $(x \mapsto x^n)$ est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$et l'une est la bijection réciproque de l'autre.

Si n est un entier impair alors $\begin{cases} y = \sqrt[n]{x} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^n \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$. Donc $(x \mapsto \sqrt[n]{x})$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et $(x \mapsto x^n)$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et l'une est la bijection réciproque de l'autre.

5. Tout réel y de $[-1,1]$ a un unique antécédent, $Arcsin(y)$, dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par la fonction sinus. La fonction sin est bijective de$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$ et sa bijection réciproque est la fonction $Arcsin$.

De même, La fonction cos est bijective de $[0, \pi]$ sur $[-1,1]$ et sa bijection réciproque est la fonction $Arccos$.

La fonction tan est bijective de$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$ et sa bijection réciproque est la fonction $Arctan$.

On a : $\begin{cases} y = \sin(x) \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = Arcsin(y) \\ y \in [-1,1] \end{cases}$ $\begin{cases} y = \sin(x) \\ x \in [0, \pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = Arccos(y) \\ y \in [-1,1] \end{cases}$. $\begin{cases} y = \tan(x) \\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = Arctan(y) \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$

13 **Méthode de l'équation pour déterminer si f est injective, surjective ou bijective de E sur F et le cas échéant déterminer sa bijection réciproque :**

On considère un élément y de F arbitraire. On lui cherche tous ses antécédents par f en résolvant l'équation $f(x) = y$.

Si pour certaines valeurs de y, y n'a pas d'antécédents alors f n'est pas ………………… de E sur F donc pas ………………… de E sur F.

Si pour certaines valeurs de y, y a plusieurs antécédents alors f n'est pas ……………….de E sur F donc pas ………………… de E sur F.

Si y a toujours un et un seul antécédent par f alors f est ……………… de E sur F et $f^{-1}(y)$ =cet unqiue antécédent de y par f.

14 **Exercices** :

1. Montrer que $f: \left(x \mapsto \frac{2x+3}{x-1}\right)$ est bijective de Df sur un domaine F à déterminer et donner une expression de f^{-1}. Tracer enfin Cf et Cf^{-1}sur un même dessin.
2. Montrer que $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt[6]{x - \lfloor x \rfloor}$ est bijective de Df sur un domaine F à déterminer et donner une expressions de f^{-1}. Tracer enfin Cf et Cf^{-1}sur un même dessin.
3. On pose $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Montrer que f n'est ni injective, ni surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ mais est bijective de $\mathbb{R}^+$sur un intervalle J à déterminer et donner une expression de $f = {ch_{/\mathbb{R}^+}}^{-1}$. Tracer enfin C_{ch} et $C_{f^{-1}}$ sur un même dessin.

15 **Théorème:** Soit E, F et G des parties de $\mathbb{R}$. Soit f une application de E dans F et g une application de F vers E.

- $\begin{cases} g \circ f = id_E \\ f \circ g = id_F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ bijective de } E \text{ sur } F \text{ et } g \text{ bijective de } F \text{ sur } E \\ g = f^{-1} \end{cases}$. démo
- La composée de deux bijections : f de E dans F et g de F dans G est une bijection de E dans G et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ démo

16 **Exercice** : Montrer que $f: \left(x \mapsto e^{\sqrt{x}}\right)$ est bijective de Df sur un domaine F à déterminer et donner une expressions de f^{-1}.

VII LIMITE

17 **Soit a réel ou infini. Soient f , g et h des fonctions définies sur un même voisinage de a (mais pas forcément en a).**

Unicité

- Une limite, lorsqu'elle existe , est UNIQUE.
- Si f est définie en a (ie. $f(a)$ existe) alors $f(a)$ est la seule limite possible de f en a .

Règles de calcul sur les limites : Soit L et L' deux réels ou deux infinis tels que $\lim_{t \to a} f(t) = L$ et $\lim_{t \to a} g(t) = L'$.

- pour tout réel α *indépendant de* t, $\lim_{t \to a} \alpha f(t) = \alpha L$.
- $\lim_{t \to a} |f(t)| = |L|$
- Si $L + L'$ n'est pas une forme indéterminée (« FI ») alors $\lim_{t \to a} f(t) + g(t) = L + L'$.
- Si $L \times L'$ n'est pas une forme indéterminée alors $\lim_{t \to a} f(t) \times g(t) = L \times L'$.
- Si $\frac{L}{L'}$ n'est pas une forme indéterminée alors $\lim_{t \to a} \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{L}{L'}$.

Bornée×limite nulle : Si $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x)=0$ et f est bornée au voisinage de a dans Df alors $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x)f(x)=0$

Composer (théorème de limite d'une fonction composée) : Soit <u>L un réel ou infini.</u>

- Soit φ une fonction telle que $f\circ\varphi$ soit définie sur un voisinage de a. Si $\begin{cases}\lim\limits_{t\to a}\varphi(t)=b\\ \lim\limits_{x\to b}f(x)=L\end{cases}$ alors $\lim\limits_{t\to a}f(\varphi(t))=L$.
- Soit (u_n) une suite de nombres réels telle que $\forall n, u_n\in Df$. Si $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=a\\ \lim\limits_{x\to b}f(x)=L\end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}f(u_n)=L$.
- **Par contraposée** : S'il existe $(u_n)une$ suite réelle telle que $\begin{cases}\forall n, u_n\in Df\\ \lim\limits_{n\to+\infty}u_n=a\\ \lim\limits_{n\to+\infty}f(u_n)\neq L\end{cases}$ alors f ne tend pas vers L en a.
- S'il existe (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $\begin{cases}\forall n, u_n\in Df\ et\ v_n\in Df\\ \lim\limits_{n\to+\infty}u_n=a=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n\\ \lim\limits_{n\to+\infty}f(u_n)\neq\lim\limits_{n\to+\infty}f(v_n)\end{cases}$ alors f n'a pas de limite en a.

Encadrer (théorème de limite par encadrement) : Soit <u>L un réel .</u>

- Si $f(x)\le g(x)\le h(x)$ au voisinage de a et $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L=\lim\limits_{x\to a}h(x)$ alors $\lim\limits_{x\to a}g(x)=+\infty$.
- Si $f(x)\le g(x)$ au voisinage de a et $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a}g(x)=+\infty$.
- Si $f(x)\ge g(x)$ au voisinage de a et $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a}g(x)=-\infty$.
- Si $|g(x)|\le\varepsilon(x)$ au voisinage de a et $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x)=0$ alors $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$.

Se ramener à une limite en 0 Soit <u>L un réel ou infini.</u>

- Ici a réel . $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L\Leftrightarrow\lim\limits_{t\to 0}f(a+t)=L$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=L\Leftrightarrow\lim\limits_{t\to 0^{\pm}}f\left(\frac{1}{t}\right)=L$

Limite à droite et à gauche Soit <u>L un réel ou infini. Ici f est définie sur un voisinage à droite et un voisinage à gauche de a.</u>

$$Ici\ a\ réel\ .\lim_{x\to a}f(x)=L\Leftrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}f(x)=L=\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}}f(x)\\ et\ L=f(a)\ si\ a\in Df\end{cases}.$$

Limite et symétrie

- Si f est bijective de I sur J et a est un bord ou élément a de I et b est un bord ou élément b de J, alors $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to b}f^{-1}(x)=a$.
- Si f est paire alors pour tout bord ou élément a de I, $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -a^-}f(x)$.
- Si f est impaire alors pour tout bord ou élément a de I, $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=-\lim\limits_{x\to -a^-}f(x)$.

Limite en monotonie : Si f est monotone sur $]a,b[$ alors $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\ et\ \lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ existent.

18 **Limites usuelles :** Soit $p\ et\ n$ deux entiers naturels **non nuls**. Soit $\alpha\ et\ \beta$ deux rationnels **strictement positifs**.

Limites par continuité ou aux bords du domaine de définition:	**Limites par taux d'accroissements**	**Les croissances comparées :** démo
$\lim\limits_{x\to a}sin(x)\overset{cont.}{=}sin(a)$ $\lim\limits_{x\to a}cos(x)\overset{cont.}{=}cos(a)$ $\lim\limits_{x\to a}e^x\overset{cont.}{=}e^a$ $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ $\lim\limits_{x\to a}x^n\overset{cont.}{=}a^n$ $\lim\limits_{x\to a}\lvert x\rvert\overset{cont.}{=}\lvert a\rvert$ $\lim\limits_{x\to a}\ln(x)\overset{cont.}{=}\ln(a)$ $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{x}\overset{cont.}{=}\sqrt[n]{a}$	$\lim\limits_{x\to a}\frac{sin(x)-\sin(a)}{x-a}\overset{T.A}{=}\cos(a)$ $\lim\limits_{x\to a}\frac{cos(x)-\cos(a)}{x-a}\overset{T.A}{=}-\sin(a)$ Si $a\in D_{tan}$, $\lim\limits_{x\to a}\frac{tan(x)-tan(a)}{x-a}\overset{T.A}{=}1+\tan^2(a)$ (…) En particulier , $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x}\overset{T.A}{=}1$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{cos(x)-1}{x}\overset{T.A}{=}0$ En particulier , $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tan(x)}{x}\overset{T.A}{=}1$ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}=1$ et en se ramenant à 0, $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ $\operatorname{Lim}\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{x-1}=\frac{1}{n}$ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}=n$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}\overset{CC}{=}0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln(x))^\beta}{x^\alpha}\overset{CC}{=}0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\overset{CC}{=}+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{\beta x}}{x^\alpha}\overset{CC}{=}+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^x\overset{CC}{=}0$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\lvert x\rvert^\alpha e^{\beta x}\overset{CC}{=}0$ $\lim\limits_{x\to 0}x\ln(x)\overset{CC}{=}0$ $\lim\limits_{x\to 0}x^\alpha\lvert\ln(x)\rvert^\beta\overset{CC}{=}0$

19 f est une fonction rationnelle telle que : $f(x) = \frac{a_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + \dots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_0}$ avec $a_p \neq 0$ et $b_n \neq 0$ alors $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{a_p x^p}{b_n x^n}$. démo

20 **METHODES A CONNAITRE en exercices :**

LIMITE PAR ENCADREMENT Montrer que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \lfloor x \rfloor = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1$.

SE PLACER AU VOISINANGE DU POINT Où L'ON ETUDIE LA LIMITE et **UTILISER LA LIMITE A DROITE et A GAUCHE** Calculer $\lim\limits_{x \to 2025} \lfloor x \rfloor + \sqrt[2024]{x - \lfloor x \rfloor}$

FAIRE APPARAITRE UNE LIMITE USUELLE

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan(ax)}{\sin(bx)}$ où a et b paramètres réels non nuls.
2. Montrer que : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$ résultat à connaitre
3. Calculer : $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \sin(x))^x$

SE RAMENER EN 0 et FAIRE APPARAITRE UNE LIMITE USUELLE Calculer $\lim\limits_{x \to -1} \frac{\sin(x+1)}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

LIMITE FONCTION BORNEE×FONCTION DE LIMITE NULLE Justifier que $\lim\limits_{x \to 1} \cos\left(\frac{\pi}{2x}\right)(x - \lfloor x \rfloor) = 0$.

METTRE LES TERMES DOMINANTS EN FACTEUR et UTILISER LES PROPRIETES DES FONCTINOS USUELLES :

Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{\sqrt[3]{1 - 8x^3}}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3\ln(x) - 4x^2}{e^x - 5e^{4x} + 1}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \tan(x) \ln(\sqrt{x} - 2x^2)$

FACTORISER PAR $(x - a)$ dans une fonction rationnelle dont la limite en a est un $FI\ \frac{0}{0}$: Calculer $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2x^3 + x^2 + x - 1}{\sqrt[3]{1 - 8x^3}}$.

UTILISER LA QUANTITE CONJUGUEE Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$

UTILISER DES SUITES POUR MONTRER QU'UNE FONCTION N'A PAS DE LIMITE EN UN POINT : Démontrer que $\left(x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$ n'a pas de limite en 0.

RECONNAITRE UN TAUX D'ACCROISSEMENT : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 - 2x + x^2 e^x} - 1}{x}$

VIII ASYMPTOTE

21 Soit a et b deux réels

- Cf a une asymptote horizontale d'équation $y = b$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (resp -\infty)}} f(x) = b$.
- Cf a une asymptote verticale d'équation $x = a$ lorsque $a \notin Df$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.
- Cf a une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ en $+\infty$ (ou $-\infty$) lorsque $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (ou -\infty)}} f(x) - (ax + b) = 0$.
- Les courbes Cf et Cg sont asymptotes en $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (resp -\infty)}} f(x) - g(x) = 0$.

22 **Exercice**

1. Soit $f: \left(x \mapsto \frac{3x^2 + 1}{1 - x}\right)$. Trouver deux réels a et b tels que la droite d'équation $y = ax + b$ soit asymptote à Cf en $+\infty$.
2. Soit $f: (x \mapsto \ln(2x^2 - 3x + 4))$. Trouver une droite asymptote à Cf en $-\infty$.
3. Déterminer l'asymptote en $-\infty$ de Cf où $f(x) = \sqrt[3]{1 - 2x + 8x^3}$.

IX CONTINUITE

Lorsque I est un intervalle, la courbe d'une fonction continue sur I se trace d'un trait continu. C'est faux si I n'est pas un intervalle , comme le prouve la fonction tan, continue sur D_{tan} et dont la courbe a des trous.

23
- f est continue en a lorsque $a \in Df$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- f est continue sur I lorsque $I \subset Df$ et f est continue en tout point de I.
- f est prolongeable par continuité en a lorsque $a \notin Df$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe et est finie.

Alors la fonction $\tilde{f}$: $\left(\begin{array}{c} Df \cup \{a\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} f(x) & si\ x \in Df \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) & si\ x = a \end{cases} \end{array}\right)$ est continue en a. $\tilde{f}$ est appelé le prolongement par continuité de f en a.

24 **Exercices** :

1. Montrer que $f: \left(x \mapsto \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x-1}\right) & si\ x \in]-1,1[\\ 1 & si\ x = \pm 1 \end{cases}\right)$ n'est continue ni en 1, ni en -1.
2. Montrer que $f: (x \mapsto \sin(x)\ln(x^2 + \sqrt{x}))$ est prolongeable par continuité en 0.
3. Pour quelles valeurs de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, la fonction f suivante est -elle continue sur $\mathbb{R}$? $f(x) = \begin{cases} (1 + x)^{\frac{a}{x}} & \text{si } x > 0 \\ \frac{b + x^3}{x^2 + 3x + 2} & si\ x \in]-1, 0] \\ \frac{c}{2} & si\ x = -1 \\ c\,\frac{e^{x+1} - 1}{x^2 - 1} & si\ x < -1 \end{cases}$

25 **Opérations sur les fonctions continues**

- Si f et g sont continues sur un même domaine D alors toute combinaison linéaire et $f \times g$ sont continues sur D

et si, de plus, g ne s'annule pas sur D, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur D.

- Si f est continue sur D et g est continue sur E et $\forall x \in D, f(x) \in E$ alors $g \circ f$ est continue sur D.

Conséquence : toute fonction dont l'expression n'est pas définie par morceaux et n'est constituée qu'un nombre fini de fonctions continues sur leur propre domaine de définition est continue sur son domaine de définition.

↳**parmi nos fonctions usuelles, seules la partie entière n'est pas continue sur son domaine de définition, elle n'est continue que sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.**

26 **Exercices** :

1. Montrer que $f: \left(x \mapsto \sqrt{\sqrt{3}\sin(2x) - \cos(2x)}\right)$ est continue sur Df à déterminer.
2. Montrer que $f: \left(x \mapsto \begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{\sqrt[3]{x}-2x^2} \; si \; x \neq 0 \\ 0 \; si \; x = 0 \end{cases}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $(x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor})$ est continue sur $\mathbb{R}$

27 **Théorème des valeurs intermédiaires :** Si f est continue sur un **intervalle I** alors

1. pour tous réels a et b de I , tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ a un antécédent par f dans I.
2. $f(I)$ est un intervalle.

Corollaire : Si f est continue sur un **intervalle I** et f change de signe sur I alors f s'annule sur I.

Contraposée : Si f est continue sur un **intervalle I** et f NE s'annule PAS sur I alors f ne change pas de signe sur I

28 **Exercices**

1. Montrer que toute fonction polynomiale de degré impair a au moins une racine réelle.
2. Soit $f: [a, b] \to [a, b]$, continue. Montrer qu'il existe un réel $\alpha \in [a, b]$ tel que : $f(\alpha) = \alpha$. Un tel réel α est appelé un point fixe de f.
3. Soit f et g deux fonctions réelles, continues sur un intervalle I et telles que : $\forall x \in I, f(x)^2 = g(x)^2 \; et \; f(x) \neq 0$. Montrer que : $\forall x \in I, f(x) = g(x) \; ou \; \forall x \in I, f(x) = -g(x)$.

29 **Théorème des bijections continues et strictement monotones sur un intervalle (TBCSM) :**

Si f est continue et strictement monotone sur **un intervalle I** alors

- $f(I)$ est un intervalle de même nature que I et dont les extrémités sont les limites de f aux bords de I
- f est bijective de I sur $f(I)$
- 30 f^{-1} est continue et de même stricte monotonie que f sur $f(I)$ et si de plus f est impaire sur I alors f^{-1}est impaire sur $f(I)$.

Attention : une bijection n'est pas forcément continue et strictement monotone comme le prouve l'exemple suivant : $f: \left(x \mapsto \begin{cases} x^2 si \; x \in [0,1[\\ 3 - x \; si \; x \in [1,2] \end{cases}\right)$ est bijective de $[0,2] sur \; [0,2]$. La réciproque du TBCSM est fausse !

Exercices :

1. Montrons que $f: (x \mapsto e^{x^2} + x)$ est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur un intervalle J à déterminer . Puis déterminer $f^{-1}(e+1)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f^{-1}(x)$
2. Montrer que l'équation $\tan(x) = x$ admet une seule solution u_n dans chaque intervalle $]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$ où $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

X DERIVATION

- 31 f est dérivable en a lorsque $a \in Df \; et \; \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Le nombre dérivé de f en a est alors $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Le droite d'équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ (qui passe par en $A(a, f(a))$ et a pour coefficient directeur $f'(a)$) est alors la tangente à Cf en $A(a, f(a))$. **ATTENTION** : on écrit $\underbrace{f'(x)}_{\substack{on\;dérive\\la\;fonction\;f}} = \frac{df}{dx}(x)$ et non $\underbrace{\cancel{f(x)'}}_{\substack{on\;ne\;dérive\;pas\\le\;réel\;f(x)}} = \cancel{\frac{df(x)}{dx}}$.
- f est dérivable sur I lorsque $I \subset Df$ et f est dérivable en tout point de I. On définit alors f', la fonction dérivée de f sur I , par : $\forall x \in I, f'(x) = nombre \; dérivée \; de \; f \; en \; x = \lim\limits_{y \to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. NB : $Df' \subset Df$.
- $Si \; f$ est continue en a et $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$ alors Cf a une tangente verticale en a.

32 **Lien entre continuité et dérivabilité**

- $Si \; f$ est dérivable en a alors f est continue en a. La réciproque est fausse comme le prouvent les fonctions $\sqrt{.} \; et \; |.|$.
- $Si \; f$ est dérivable sur D alors f est continue sur D.

33 **Opérations sur les fonctions dérivables.**

- Si **f et g sont dérivables sur un même domaine D** alors pour toutes constantes a et b, $af + bg$ et $f \times g$ sont dérivables sur D et $\forall x \in D, (af + bg)'(x) = af'(x) + bg'(x) \; et \; (f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
- Et si, **<u>de plus,</u> g ne s'annule pas sur D** alors $\frac{1}{g} \; et \; \frac{f}{g}$ sont dérivables sur D et

$$\forall x \in D, \left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g(x)}{g(x)^2} \quad et \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

- **Si f est dérivable sur D et g est dérivable sur E et $\forall x \in D, f(x) \in E$** alors $g \circ f$ est dérivable sur D et
$$\forall x \in D, (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)) = f'(x) \times (g' \circ f)(x) = [f' \times (g' \circ f)](x).$$

Conséquence : toute fonction dont l'expression n'est pas définie par morceaux et n'est constituée qu'un nombre fini de fonctions dérivables sur leur propre domaine de définition est continue sur son domaine de définition.

↳ **parmi nos fonctions usuelles, la partie entière, la valeur absolue, les racines nièmes, $Arcsin$ et $Arccos$ ne sont pas dérivables sur tout leur domaine de définition.**

34 **Exercices : 1.** Déterminer pour chacune des fonctions f suivantes, un domaine D où elle est dérivable et donner une expression de $f'(x)$.

1. $f(x) = sin(5x^2 - 3 + 2\sqrt[3]{x})$
2. $f(x) = \cos(\sqrt[3]{x}) - \sqrt[3]{\cos(x)}$
3. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1 - 8x^3}$
4. $f(x) = \ln(\ln(x))$
5. $f(x) = \frac{\tan(x)}{\sqrt{1-2x}}$
6. $f(x) = e^{\sqrt[5]{x^2}}$
7. $f(x) = \tan^3(2x)$
8. $f(x) = \frac{1}{2-x}$
9. $f(x) = \frac{1}{3x-7}$
10. $f(x) = \frac{1-2x^5}{x^2+7x+6}$

2 . On admet que les fonctions $Arcsin$ et $Arccos$ sont définies sur $[-1,1]$ et dérivables uniquement sur $]-1;1[$ et la fonction $Arctan$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in]-1,1[, Arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -Arccos(x)$ et $\forall x \in \mathbb{R}, Arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Déterminer pour chacune des fonctions f suivantes, un domaine D où elle est définie et un domaine D' dérivable et donner une expression de $f'(x)$:

1. $f(x) = Arcsin(2x - 1)$
2. $f(x) = Arccos(\sqrt{1 - x^2})$
3. $f(x) = x\sin(Arctan(x))$
4. $f(x) = \frac{Arcsin(x)}{Arccos(x)}$
5. $f(x) = Arctan(\cos(x))$.

35 **Critère de limite du taux d'accroissement .**

Si f est continue sur l'intervalle I , dérivable au moins sur $I\backslash\{a\}$ et $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = L$ alors $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = L$

L'hypothèse INTERVALLE est très importante comme le prouve les fonctions inverse et tangente dont les dérivées ont un signe constant sur leur domaine de déf° respectif mais qui ne sont pas monotones sur leur domaine de déf°.

36 **Dérivation et monotonie**

- Si f est dérivable sur un **intervalle I** et $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) alors f est croissante (resp. décroissante) sur I.
- Si f est dérivable sur un **intervalle I** et $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) et **f' ne s'annule qu'en des points isolés** (f' ne s'annule pas sur tout un intervalle non trivial) alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.

Exercice : Montrer que pour tout réel x de $[0, \pi]$, $1 - \frac{2}{\pi}\left|x - \frac{\pi}{2}\right| \leq \sin(x) \leq \frac{2}{\pi}\sqrt{x(\pi - x)}$.

« f' s'annule » ne suffit pas comme le prouve la fonction cube dont la dérivée s'annule en 0 mais qui n'a pas d'extremum en 0.

37 **Dérivation et extrema**

Si f est dérivable sur un **intervalle I** et f' **s'annule en changeant de signe** en $x_0 \in I$ alors f admet un extremum local en x_0.

Exercice : Soit $A = \{x + 2y / (x, y) \in \mathbb{R}^2 et\ x^2 + y^2 = 1\}$. Montrons que A admet un max et un min et les déterminer.

38 **Théorème de dérivation de la bijection réciproque (TDBR)**

Soit f est une bijection continue et strictement monotone sur **l'intervalle I**

- Si f est dérivable sur $I' \subset I$ et $\forall x \in I', f'(x) \neq 0$ alors f^{-1}est dérivable sur $f(I')$ et $\forall x \in f(I'), (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.
- Si f est dérivable en $a \in I$ et $f'(a) = 0$ alors f^{-1}n'est pas dérivable en $f(a)$ et Cf^{-1}a une tangente verticale en $A'(f(a), a)$

39 **Exercice** Soit $f: (x \mapsto x^3 + x - 8)$.

1) Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Donner $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x)$.
2) Résoudre l'équation $2f(x) + 3f^{-1}(x) = 10$.
3) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $(f^{-1})'(-6)$.
4) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{3(f^{-1}(x))^2+1}$.

$a = f^{-1}(b)$			
$b = f(a)$			
$f'(a)$	0	n'existe pas et TV	$\neq 0$
$f^{-1\prime}(b)$	n'existe pas	0	$\frac{1}{f(a)}$

XI PRIMITIVE

40 • Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I telle que $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

41 **Relation entre les primitives sur un intervalle d'une même fonction**

Si F et G sont deux primitives d'une même fonction sur **un intervalle I** alors il existe une constante c telle que :

$\forall x \in I, F(x) = G(x) + c.$ (on dit alors que F et G diffèrent d'une constante ou sont égales à une constante près).

42 **Exercices : 1.** Démontrons la propriété de cours : $\forall(a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, ln(ab) = ln(a) + ln(b)$.

2. Démontrer que $\forall x \in [-1,1], Arcsin(x) + Arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.

43 **Théorème fondamental de l'intégration**

Si f est continue sur **un intervalle I** alors

- f admet une primitive sur cet intervalle
- pour chaque $a \in I$ et $b \in \mathbb{R}, f$ admet une unique primitive F qui vérifie $F(a) = b$.

Exercice : Déterminer pour chacune des fonctions f suivantes, un intervalle I sur lequel elle est continue et une primitive de F de f sur I.

44
1) $f(x) = 1 - 3sin(5x + 1)$
2) $f(x) = e^{2x+1}$
3) $f(x) = \sqrt[3]{x} - 4x^2 + 1$
4) $f(x) = \frac{1}{3-2x}$
5) $f(x) = xe^{x^2}$
6) $f(x) = \cos^2(7x)$
7) $f(x) = \sin^5(x)$
8) $f(x) = \frac{1-x^3}{2x^2+3x+1}$

45 **Théorème fondamental du calcul intégral**

Si f est continue sur **un intervalle I** et F est une primitive de f sur I alors pour tous réels a et b de I, $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

46 **Exercice :** Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} sin(1-5t)\cos(2t+1)dt$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t)\, sin^3(3t)dt$, $K = \int_0^{-1} \frac{x^5+2x-1}{3x^2-4x+1}dx$.

Dérivées et primitives usuelles : Soit a et b deux réels tels que $a \neq 0$ et u une fonction dérivable sur I et n un entier naturel **non nul**.

Une primitive F et D_F $\xrightarrow{dérive}$	Fonction f et D_f $\xrightarrow{dérive}$	La dérivée f' et $D_{f'}$
$bx, \mathbb{R}$	$b, \mathbb{R}$	$0, \mathbb{R}$
e^x, $\mathbb{R}$	e^x, $\mathbb{R}$	e^x, $\mathbb{R}$
$xln(x) - x$, $\mathbb{R}^{+*}$	$\ln(x)$, $\mathbb{R}^{+*}$	$\frac{1}{x}$, $\mathbb{R}^{+*}$
$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$, $\mathbb{R}$	x^n, $\mathbb{R}$	nx^{n-1}, $\mathbb{R}$
$\frac{1}{\frac{1}{n}+1}x^{\frac{1}{n}+1}$, $\mathbb{R}^+ \, si\ n\ pair, \mathbb{R}\ si\ n\ impair$	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, $\mathbb{R}^+ \, si\ n\ pair, \mathbb{R}\ si\ n\ impair$	$\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}, \mathbb{R}^{*+}\ si\ n\ pair, \mathbb{R}^*\ si\ n\ impair$
$\ln\|x\|$, $\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$, $\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$ si $n \neq 1$ $\ln\|x\|$, si $n = 1$, $\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x^n} = x^{-n}, \mathbb{R}^*$	$-nx^{-n-1}, \mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ si $\alpha \neq -1$, $\mathbb{R}^{+*}$ $\ln(x)$, si $\alpha = -1$	$x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}, \mathbb{R}^{+*}$	$\alpha x^{\alpha-1}, \mathbb{R}^{+*}$
$sh(x)$, $\mathbb{R}$	$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$sh(x)$, $\mathbb{R}$
$ch(x)$, $\mathbb{R}$	$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$ch(x)$, $\mathbb{R}$
$-\cos(x)$, $\mathbb{R}$	$\sin(x)$, $\mathbb{R}$	$\cos(x)$, $\mathbb{R}$
$\sin(x)$, $\mathbb{R}$	$\cos(x)$, $\mathbb{R}$	$-\sin(x)$, $\mathbb{R}$
$ln\|\cos(x)\|, D_{tan}$	$\tan(x), D_{tan} = \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$	$1 + \tan^{2(x)} = \frac{1}{cos^2(x)}, D_{tan}$
$\times$	$Arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\times$	$Arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\times$	$Arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$ln\|x-b\|, \mathbb{R} \backslash \{b\}$	$\frac{1}{x-b}, \mathbb{R} \backslash \{b\}$	$\frac{-1}{(x-b)^2}, \mathbb{R} \backslash \{b\}$
$\frac{1}{a}ln\|ax+b\|, \mathbb{R} \backslash \{-\frac{b}{a}\}$	$\frac{1}{ax+b}, \mathbb{R} \backslash \{-\frac{b}{a}\}$	$\frac{-a}{(ax+b)^2}, \mathbb{R} \backslash \{-\frac{b}{a}\}$
$\frac{1}{a}e^{ax+b}$	$\exp(ax+b)$	ae^{ax+b}
$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$	$-a\sin(ax+b)$
$\frac{-1}{a}\cos(ax+b)$	$\sin(ax+b)$	$acos(ax+b)$
$\frac{1}{a}\mathrm{sh}(ax+b)$	$\mathrm{ch}(ax+b)$	$ash(ax+b)$
$\frac{1}{a}\mathrm{ch}(ax+b)$	$\mathrm{sh}(ax+b)$	$ach(ax+b)$
$\times$	$\ln(ax+b)$	$\frac{a}{ax+b}$
$\times$	$u(ax+b)$	$au'(ax+b)$
$\times$	$sin(u(x))$	$u'(x)\cos(u(x))$
$\times$	$\cos(u(x))$	$-u'(x)\sin(u(x))$
$\times$	$\tan(u(x))$	$\frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}$
$\times$	$ch(u(x))$	$u'(x)\mathrm{sh}(u(x))$
$\times$	$sh(u(x))$	$u'(x)\mathrm{ch}(u(x))$
$\times$	$u(x)^n$	$nu'(x)u(x)^{n-1}$
$\times$	$u(x)^{-n}$	$-nu'(x)u(x)^{-n-1}$
$\times$	$\sqrt[n]{u(x)} = u(x)^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{n}u'(x)u(x)^{\frac{1}{n}-1}$
$\times$	$\|u(x)\|$	$u'(x)\ si\ u(x) > 0$ $-u'(x)\ si\ u(x) < 0$
$\times$	$\ln\|u(x)\|$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$

×	$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$
$-cos(u(x))$	$u'(x)sin(u(x))$	×
$\sin(u(x))$	$u'(x)\cos(u(x))$	×
$ch(u(x))$	$u'(x)sh(u(x))$	×
$sh(u(x))$	$u'(x)\text{ch}(u(x))$	×
$\frac{1}{n+1}u(x)^{n+1}$	$u'(x)u(x)^n$	×
$\frac{1}{-n+1}u(x)^{-n+1}$ si $n \neq 1$ $\ln \lvert u(x)\rvert$ si $n = 1$	$\frac{u'(x)}{u(x)^n} = u'(x)u(x)^{-n}$	×
$\frac{1}{\frac{1}{n}+1}u(x)^{\frac{1}{n}+1}$	$u'(x)\sqrt[n]{u(x)} = u'(x)u(x)^{\frac{1}{n}}$	×
$\ln \lvert u(x)\rvert$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$	×
$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$	×

Fonction	Domaine de définition	Domaine de continuité	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée	Limites usuelles par taux d'accroissement	Limites usuelles par croissances comparées
Constante	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0		
$\ln(x)$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\frac{1}{x}$	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}=1$ $\lim\limits_{x\to b}\frac{\ln(x)-\ln(b)}{x-b}=\frac{1}{b}$ où $b>0$	$\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha}\lvert\ln(x)\rvert^{\beta}=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)^{\beta}}{x^{\alpha}}=0$
e^{x}	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^{x}	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$ $\lim\limits_{x\to b}\frac{e^{x}-e^{b}}{x-b}=e^{b}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}x^{\alpha}e^{\gamma x}=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{e^{\gamma x}}=0$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=0$ $\lim\limits_{x\to a}\frac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a}=-\sin(a)$	
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin(x)-\sin(a)}{x-a}=cos(a)$	
$\tan(x)$	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$	$1+tan^{2}(x)=\frac{1}{cos^{2}(x)}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=1$ $\lim\limits_{x\to a}\frac{\tan(x)-tan(a)}{x-a}=1+tan^{2}a$ où $a\in D_{tan}$	
x^{n} tq $n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\lim\limits_{x\to a}\frac{x^{n}-a^{n}}{x-a}=na^{n-1}$	
x^{-n} tq $n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$	$\mathbb{R}^{*}$	$\mathbb{R}^{*}$	$\mathbb{R}^{*}$	$-nx^{-n-1}$	$\lim\limits_{x\to a}\frac{x^{-n}-a^{-n}}{x-a}=-na^{-n-1}$	
$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$	$\mathbb{R}^{+}$	$\mathbb{R}^{+}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$	$\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$ $si\ a>0$	
$\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$ tq $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, n indépendant de x	$\mathbb{R}^{+}$ $si\ n\ pair, n\geq 2$ $\mathbb{R}$ $si\ n\ impair, n\geq 2$	$\mathbb{R}^{+}$ $si\ n\ pair, n\geq 2$ $\mathbb{R}$ $si\ n\ impair, n\geq 2$	$\mathbb{R}^{+*}$ $si\ n\ pair, n\geq 2$ $\mathbb{R}^{*}$ $si\ n\ impair, n\geq 2$	$\frac{1}{n}x^{\left(\frac{1}{n}-1\right)}$	$\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$ $si\ a\in Df'$	
$x^{p/q}$ avec $p\in\mathbb{Z}\ et\ q\in\mathbb{N}^{*}$ indépendants de x		Df	$Df\backslash\{0\}$	$\frac{p}{q}x^{p/q-1}$	$\lim\limits_{x\to a}\frac{x^{\frac{p}{q}}-b^{\frac{p}{q}}}{x-b}=\frac{p}{q}b^{\frac{p}{q}-1}$ $si\ b\in Df'$	
$\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^{*}$	$\begin{cases}1\ si\ x>0\\-1\ si\ x<0\end{cases}$		
$\lfloor x\rfloor$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$	$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$	0		
$Arcsin(x)$	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$]-1,1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$		
$Arccos(x)$	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$]-1,1[$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^{2}}}$		
$Arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^{2}}$		
$ch(x)=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$sh(x)$		
$sh(x)=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$ch(x)$		
$x^{\alpha}=e^{\alpha\ln(x)}$ où α réel indépendant de x	$\mathbb{R}^{+*}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\lim\limits_{x\to b}\frac{x^{\alpha}-b^{\alpha}}{x-b}=\alpha\ b^{\alpha-1}$ où $b\in\mathbb{R}^{+*}$.	$\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha}\lvert\ln(x)\rvert^{\beta}=0\ et\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)^{\beta}}{x^{\alpha}}=0$ $\lim\limits_{x\to-\infty}x^{\alpha}e^{\gamma x}=0\ et\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{e^{\gamma x}}=0$
$\sum_{k=0}^{n}a_{k}x^{k}$ où $a_0,\ldots,a_n$ réels indépendants de x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\sum_{k=1}^{n}ka_{k}x^{k-1}$		