Corrigé du TD fonctions usuelles : exp, ln, puissances, ch et sh.

Ex 0 Des calculs de base pour apprendre et penser à simplifier au maximum des expressions exponentielles ou logarithmiques

Simplifier :

$a = e^{-3\ln(x)}$

$b = \frac{\ln(x^2)}{\ln(x^4)}$

$c = e^{\ln(x^2+1)-3\ln(x)}$

$d = \ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2})$

$h = \ln(\sqrt{\exp(x)})$

$m = \mathrm{ch}\left(-\frac{1}{3}\ln(e^{-3})\right)$

$p = sh\left(-\frac{3}{2}\ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3x^2+1}}\right)\right)$

$q = sh^{-1}(2) - ch_|^{-1}(2)$

$r = log_4\left(4^{\sqrt{2}}\right)$

$a = e^{\ln(x^{-3})} = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$

$b = \frac{\ln(x^2)}{\ln(x^4)} = \frac{2\ln(x)}{4\ln(x)} = \frac{1}{2}.$

$c = e^{\ln(x^2+1)-3\ln(x)} = e^{\ln(x^2+1)+\ln(x^{-3})} = e^{\ln((x^2+1)x^{-3})}$

$c = (x^2+1)x^{-3} = \frac{(x^2+1)}{x^3}.$

$d = \ln\left(\sqrt{e^4}\right) - \ln\left(\sqrt{e^2}\right) = \ln(e^2) - \ln(e) = \ln\left(\frac{e^2}{e}\right) = \ln(e) = 1$

$h = \ln(\sqrt{\exp(x)}) = \frac{1}{2}\ln(e^x) = \frac{x}{2}$

$m = \mathrm{ch}\left(-\frac{1}{3}\ln(e^{-3})\right) = \mathrm{ch}\left(\ln\left((e^{-3})^{-\frac{1}{3}}\right)\right) = ch(\ln(e))$

$m = ch(1) = \frac{e}{2} + \frac{1}{2e}$

$p = sh\left(-\frac{3}{2}\ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3x^2+1}}\right)\right) = sh\left(-\frac{3}{2}\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times\ln(3x^2+1)\right)$

$p = sh\left(\frac{1}{2}\times\ln(3x^2+1)\right) = \frac{1}{2}\left[e^{\frac{1}{2}\ln(3x^2+1)} - e^{\frac{-1}{2}\ln(3x^2+1)}\right]$

$p = \frac{1}{2}\left[e^{\ln\sqrt{3x^2+1}} - e^{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3x^2+1}}\right)}\right] = \frac{1}{2}\left[\sqrt{3x^2+1} - \frac{1}{\sqrt{3x^2+1}}\right]$

$p = \frac{1}{2}\left[\frac{3x^2+1-1}{\sqrt{3x^2+1}}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{3x^2}{\sqrt{3x^2+1}}\right]$

$q = sh^{-1}(2) - ch_|^{-1}(2) = \ln(2+\sqrt{5}) - \ln(2+\sqrt{3})$

$q = \ln\left[\frac{(2+\sqrt{5})}{(2+\sqrt{3})}\right] = \ln\left[\frac{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{3})}{1}\right]$

$q = \ln[4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{5} - \sqrt{15}]$

$r = log_4\left(4^{\sqrt{2}}\right) = log_4(exp_4(\sqrt{2})) = \sqrt{2}.$

Ex 1 Equations et inéquations

A. Soit y un paramètre réel. Résoudre les (in-)équations suivantes d'inconnue x réelle (on réfléchira préalablement si l'équation peut se résoudre algébriquement ou non)

1. $e^{-6x^2+1} - \sqrt{e} > 0$
2. $\ln(x) + \ln(3x^2-4) > \ln(x^2-2)$
3. $log_2(x) + log_x(2) = \frac{5}{2}$
4. $3xlog_{10}(x) + 2(x-1) = 0$
5. $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$
6. $\frac{e^{3x}-2e^{2x}-e^{x+4}+2e^4}{ln^2x-1} > 0$
7. $sh(x) = x^2$
8. $e^{-2x} + e^x \leq 2$
9. $x + e^x > 2$
10. $e^{-x} + e^x = y$
11. $x^2 < \ln(x) + 1$
12. $\frac{\ln(x+1)}{\ln(x-2)} \leq 2$
13. $2ch(x) - x^2 \leq 0$
14. $xln(2-x) = 1$
15. $sh^3(x) - 14sh(x) + 5 < 5ch^2(x)$
16. $3sh(x) - ch(x) = 1$
17. $x^x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$
18. $ch^5x - sh^5x = 1$

B. Résoudre: $(S): \begin{cases} log_y(x) + log_x(y) = \frac{50}{7} \\ xy = 256 \end{cases}$ d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. $e^{-6x^2+1} - \sqrt{e} > 0$

2. $\ln(x) + \ln(3x^2-4) > \ln(x^2-2)$

3. Soit (e) : $log_2(x) + log_x(2) = \frac{5}{2}$.

Par définition, $log_2(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$ et $log_x(2) = \frac{\ln(2)}{\ln(x)}$.

Soit $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$.

x solution de (e)

$\Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{\ln(2)} + \frac{\ln(2)}{\ln(x)} = \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{(\ln(x))^2+(\ln(2))^2}{\ln(2)\ln(x)} = \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow 2\,(\ln(x))^2 + 2(\ln(2))^2 = 5\ln(2)\ln(x)$

$\Leftrightarrow 2X^2 - 5\ln(2)\,X + 2\,(\ln(2))^2 = 0$

Posons $\Delta = 25\ln(2)^2 - 16\ln(2)^2 = 9\ln(2)^2 = (3\ln(2))^2$.

$X_1 = \frac{5\ln(2) - 3\ln(2)}{4} = \frac{\ln(2)}{2}$ et $X_2 = \frac{5\ln(2)+3\ln(2)}{4} = 2\ln(2).$

Donc,

x solution de (e)

$\Leftrightarrow \ln(x) = \frac{\ln(2)}{2}$ ou $\ln(x) = 2\ln(2).$

$\Leftrightarrow x = e^{\frac{\ln(2)}{2}} = e^{\ln(\sqrt{2})}$ ou $x = e^{2\ln(2)} = e^{\ln(2^2)}.$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ ou $x = 4.$

Ainsi, $Sol = \{\sqrt{2}, 4\}.$

4. Soit (e) : $3xlog_{10}(x) + 2(x-1) = 0$

Posons $f(x) = \frac{3}{\ln(10)}xln(x) + 2x - 2.$

f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x > 0, f'(x) = \frac{3}{\ln(10)}[ln(x)+1] + 2.$

Donc, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow [ln(x)+1] > -\frac{2\ln(10)}{3} \Leftrightarrow ln(x) > -\frac{2\ln(10)}{3} - 1 \Leftrightarrow x > e^{-\frac{2\ln(10)}{3}-1} \Leftrightarrow x > e^{\ln\left(10^{-\frac{2}{3}}\right)} \times e^{-1} \Leftrightarrow x > \frac{1}{e\sqrt[3]{100}}.$

Donc , f est strictement croissante sur $[\frac{1}{e\sqrt[3]{100}},+\infty[$ et strictement décroissante sur $]0,\frac{1}{e\sqrt[3]{100}}]$. Donc f atteint son minimum en $\frac{1}{e\sqrt[3]{100}}$ et ce minimum vaut $f\left(\frac{1}{e\sqrt[3]{100}}\right)$. Comme f est strictement décroissante sur $]0,\frac{1}{e\sqrt[3]{100}}]$ et $\lim_{x\to 0} f(x) = -2 < 0$, $f\left(\frac{1}{e\sqrt[3]{100}}\right) < 0$ et f ne s'annule pas que $]0,\frac{1}{e\sqrt[3]{100}}]$. Comme$f$ est continue et strictement croissante sur $[\frac{1}{e\sqrt[3]{100}},+\infty[$ et $f\left(\frac{1}{e\sqrt[3]{100}}\right) < 0$ *et* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty > 0$, f s'annule une et une seule fois que $[\frac{1}{e\sqrt[3]{100}},+\infty[$. Ainsi (e) a une unique soltion. Or je remarque que $f(1) = 0$. Donc 1 est l'unique solution de (e).

5. $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$
6. $\frac{e^{3x}-2e^{2x}-e^{x+4}+2e^4}{ln^2x-1} > 0$
7. Soit (e): $sh(x) = x^2$.

$\forall x < 0, sh(x) < 0 < x^2$. Donc (e) n'a pas de solution strictement négative.
De plus, $sh(0) = 0 = 0^2$. Donc 0 est solution évidente.
Posons $f(x) = sh(x) - x^2$. Etudions f sur $\mathbb{R}^+$.
f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = ch(x) - 2x$. f' est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) = sh(x) - 2$. Alors,
$f''(x) > 0 \Leftrightarrow sh(x) > 2 \Leftrightarrow x > \ln(2+\sqrt{5})$.

$$f'(\ln(2+\sqrt{5})) = \frac{1}{2}[exp(\ln(2+\sqrt{5})) + \exp(-ln(2+\sqrt{5}))] - 2\ln(2+\sqrt{5}) = \frac{1}{2}\left[2+\sqrt{5}+\frac{1}{2+\sqrt{5}}\right] - 2\ln(2+\sqrt{5})$$

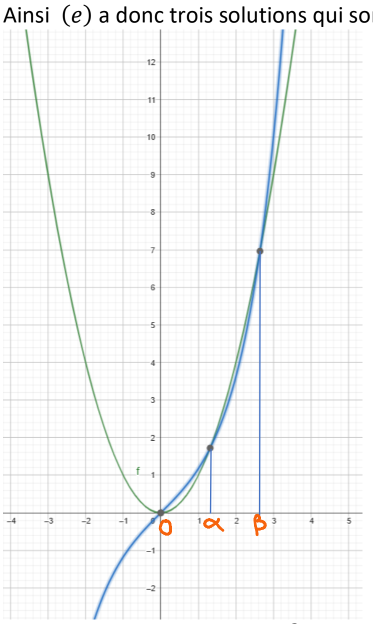
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{10+4\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}\right] - 2\ln(2+\sqrt{5}) = \left[\frac{(5+2\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)}{1}\right] - 2\ln(2+\sqrt{5}) = \sqrt{5} - 2\ln(2+\sqrt{5}) < 0.$$

$f'(2) = \frac{1}{2}\left[e^2 + \frac{1}{e^2}\right] - 2 > 0$. Donc $b < 2$.

x	0	a	$\ln(2+\sqrt{5})$	b	2	$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$		
$f'(x)$	1 + 0 −		< 0	− 0 +		$+\infty$
$f(x)$	0					$+\infty$

Les variations, la continuité et les valeurs de f' permettent d'affirmer que f' s'annule exactement deux fois en a et b tels que : $a < \ln(2+\sqrt{5}) < b < 2$. On en déduit aussi le signe de f'.

D'une part, $f(\ln(2+\sqrt{5})) = sh(\ln(2+\sqrt{5})) - (\ln(2+\sqrt{5}))^2 = 2 - (\ln(2+\sqrt{5}))^2 < 0$. Donc $f(b) < f(\ln(2+\sqrt{5})) < 0$
D'autre part, $f(a) > f(0) \geq 0$. Alors f ne s'annule pas sur $]0,a[$ ni sur $]\ln(2+\sqrt{5}), b[$ et la continué (TVI) et la stricte monotonie de f sur $]a,b[$ puis $]b,+\infty[$ assurent que f s'annule exactement une fois sur $]a,\ln(2+\sqrt{5})[$ en α et une autre unique fois sur $]b,+\infty[$ en β .
Ainsi (e) a donc trois solutions qui sont $0, \alpha$ et β. Ces trois solutions vérifient $0 < a < \alpha < \ln(2+\sqrt{5}) < b < \beta < 2$.



La méthode de dichotomie permet de trouver des valeurs approchées de α et de β. Il FAUT sortir la calculatrice !
Plaçons-nous sur $[0,\ln(2+\sqrt{5})]$:

8. $e^{-2x} + e^x \leq 2$
9. $x + e^x > 2$
10. $e^{-x} + e^x = y \Leftrightarrow 2ch(x) = y \Leftrightarrow ch(x) = \frac{y}{2}$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{y}{2}+\sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2 - 1}\right) = \ln\left(y+\sqrt{y^2-4}\right) - \ln(2)\ ou\ x = -\ln\left(\frac{y}{2}+\sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2-1}\right) = \ln(2) - \ln\left(y+\sqrt{y^2-4}\right).$$

$Ainsi, Sol = \left\{\ln\left(y+\sqrt{y^2-4}\right) - \ln(2), \ln(2) - \ln\left(y+\sqrt{y^2-4}\right)\right\}$.

11. $x^2 < \ln(x) + 1$
12. $\frac{\ln(x+1)}{\ln(x-2)} \leq 2$
13.

Ex 2 Autour du calcul de limite

I En se plaçant au voisinage du point où l'on étudie la limite

A. 1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} -\lfloor x \rfloor - 1\ si\ x \notin \mathbb{Z} \\ -x\ si\ x \in \mathbb{Z} \end{cases}$

2. Soit $h: (x \mapsto x - \lfloor x \rfloor)$ et $g: (x \mapsto |2x-1|)$. Montrer que $f = g \circ h$ est paire, périodique.
3. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que f est continue en k. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
4. Tracer Cf.

B. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$, $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$

<u>II Par encadrement</u> Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2}}{\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}}$.

<u>III En faisant apparaitre le produit d'une fonction de limite nulle et d'une fonction bornée</u>

Soit a un réel. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} x^a \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ quand cette limite existe (on justifiera qu'elle n'existe pas le cas échéant.

<u>IV Faire apparaitre les limites usuelles</u> Soit a et b des réels.

FI " $\frac{0}{0}$ "	FI " $\infty - \infty$ "	FI " $0 \times \infty$ "	FI " $\frac{\infty}{\infty}$ "	FI "1^∞"," 0^0 " ou " $(+\infty)^0$ "
1. $\lim\limits_{x \to 2 \to} \frac{x^3-8}{x^2-5x+6}$ 2. $\lim\limits_{x \to 4} \frac{(x^3-64)\cos(\pi x)}{\sqrt{x}-2}$ 3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3-64}{\sqrt{x}-2}$ 4. $\lim\limits_{x \to -a} \frac{(a-1)x+x^2-a}{x^3+a^3}$ 5. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{(x^3-1)}{ln(x)}$ 6. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x^2+\cos(x^2))-\ln}{x^2}$ 7. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{sh(x)}-\mathrm{ch}\,(x)}{\sin(x)}$ 8. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{xln(x^2)-3x^2}$ 9. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2}$ en utilisant $\frac{\cos(x)-1}{x^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2$. 10. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin\,(ax)}{\tan\,(bx)}$ $(b \neq 0)$ 11. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^a-a^a}{x^b-a^b}$ $(a, b > 0)$ 12. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{3x}-1}{\mathrm{sh}(x)(5+\mathrm{ch}^2(x))}$	13. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+y)^a - x^a - y^a$ où $y \in \mathbb{R}^{+*}$ $fixé$. 14. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2-1} - (ax+b)$ 15. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) - \ln(\ln(x)) - \sqrt[3]{x}$	16. $\lim\limits_{x \to 0^-} (2\sqrt[3]{x} - 3x^2)\ln^2(x^4-3x)$ 17. $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{-\sqrt{\ln(x^2)}}$ 18. $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x)\ln(1+x)$.	19. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}-2x^\pi-\ln^2(x)}{1-3sh(x)}$ 20. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\ln(x)-3x^2+\sin(x)}$ 21. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\ln\,(x)}$ 22. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{3x}-1}{\mathrm{sh}(x)(5+\mathrm{ch}^2(x))}$	23. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{2x}\right)^x$ 24. $\lim\limits_{x \to 0}(1+\mathrm{sh}(x))^{\ln(x)}$ 25. $\lim\limits_{x \to 0}(\cos(x))^{\ln(x)}$ 26. $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 + 3ch(x))^{e^x}$

APPLICATIONS : 1) Soit m un entier naturel et a un réel. Justifier que la fonction $f: (x \mapsto x^m)$ est dérivable en a et $f'(a) = ma^{n-1}$.

2) Pour quelles valeurs du réel α, la fonction $f: \left(x \mapsto \frac{\mathrm{sh}\,(x)}{x^\alpha}\right)$ est -elle prolongeable par continuité en 0 ? R

On suppose ici que $\alpha < 1$. Le prolongement par continuité de f est-il dérivable en 0 ?

3) Soit $f(x) = xexp\left(\frac{x}{x^2-1}\right) = xe^{\frac{x}{x^2-1}}$ et $\varphi(t) = \frac{e^{\frac{t}{1-t^2}}-1}{t}$. Calculer la limite de φ en 0. En déduire que Cf admet une même asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$ dont on donnera une équation.

Ex 3 Asymptotes simples

A. Soit $f: (x \mapsto \ln(2e^x - x - 1))$. On munit le plan d'un repère orthonormé. On donne $\ln(2) \approx 0{,}7$et $\ln(\ln(2)) \approx -0{,}4$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$. En déduire Df.
2. Montrer que f induit une bijection notée $f_|$ de $[-\ln(2), +\infty[$ sur un domaine J à déterminer.
3. Montre que $f_|^{-1}$ est continue sur J et dérivable sur $J \backslash \{\ln(\ln(2)\}$.
4. Calculer $\left(f_|^{-1}\right)'(0)$.
5. Que peut-on dire de $C_{f_|^{-1}}$ au point $B(\ln(\ln(2)), -\ln(2))$?
6. Déterminer l'asymptote de Cf en $+\infty$. Que peut-on en déduire sur $C_{f_|^{-1}}$?
7. Tracer C_f et $C_{f_|^{-1}}$.

B. Soit f : $\left(x \mapsto \ln(1+e^x) + \frac{1}{2}\ln\,(1+e^{-x})\right)$.

1. Déterminer l'asymptote de Cf en $+\infty$. Faire de même en $-\infty$.
2. Etudier les variations de f.
3. Tracer Cf.

A. Soit $f: (x \mapsto \ln(2e^x - x - 1))$

1. Etudions $g(x) = e^x - 1 - x$. g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Et
$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = e^x - 1$. Donc $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Ainsi, g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$. Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq g(0) = 0$. J'en conclus que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$.

2.Alors, $\forall x \in \mathbb{R}, 2e^x \geq e^x + 1 + x$ donc $2e^x - 1 - x \geq e^x > 0$. Donc $Df = \mathbb{R}$. De plus, f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ (car son expression ….). Et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2e^x - 1}{2e^x - 1 - x}$. Donc $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$. Donc f est strictement croissante sur l'intervalle $[-\ln(2), +\infty[$. Comme de plus, f est continue sur l'intervalle $[-\ln(2), +\infty[$, $le\ TBSCM$ assure que :

Ex 4 Des études complètes de fonctions . Etudier g et représenter la courbe de g :

1. $g(x) = th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}$
2. $g(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2 + x}$
3. $g(x) = x^x$
4. $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$.
5. $g(x) = \sqrt[3]{x^2(x-2)}$
6. $g(x) = \ln(ch(x))$.
7. $g(x) = \ln(2^x - x - 1)$

Ex 5 Des sommes et produits Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x, a\ et\ b$ des réels $fixés\ indépendants\ de\ n$

1) Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \text{ch}\,(a + kb) = \frac{sh\left(\frac{(n+1)b}{2}\right)}{sh\left(\frac{b}{2}\right)} ch\left(a + \frac{nb}{2}\right)$.

2) Calculer pour $n \geq 3$: $S_n = \sum_{p=3}^{n} log_{10}\left(\frac{2p^2 - 2p - 4}{3p^2 + 3p - 6}\right)$, $T_n(a,b) = \sum_{k=n}^{n^2} (-1)^k a^{(bk)}$, $W_n = \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n-1}{k+1} 5^{n-\frac{k}{a}} \sqrt[n]{2}\ et\ P_n(a) = \prod_{k=3}^{n} \left(\frac{k^2-1}{k^2-4}\right)^a$.

3) On pose $p_n(x) = \prod_{k=0}^{n} ch\left(\frac{x}{2^k}\right)$. Calculer $p_n(x) sh\left(\frac{x}{2^n}\right)$. En déduire $\lim_{n \to +\infty} p_n(x)$.

Ex 6 Des inégalités

1. Montrer que pour tout réel x , $ch^2(x) + shx > 0$ et $|sh(x)| \geq \left|x + \frac{x^3}{6}\right|$.
2. Montrer que pour tout réel $\boldsymbol{x}$ de $]\mathbf{0}, \mathbf{1}[$, $\boldsymbol{x^x(1-x)^{1-x}} \geq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$.
3. Montrer que : $\forall \boldsymbol{x} > \mathbf{0}, \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\right)^{\boldsymbol{x}} < \boldsymbol{e} < \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\right)^{\boldsymbol{x+1}}$
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1,2\}, \sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$. Est-elle vraie pour $n = 2$?
5. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \forall y \in \mathbb{R}^{+*}, \forall t \in [0,1], t\ln(x) + (1-t)\ln(y) \leq \ln(tx + (1-t)y)$.
6. Soit $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{+*}\backslash\{\mathbf{1}\}$. Montrer que : $[\forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbf{2}}, (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})^{\boldsymbol{\alpha}} < \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{\alpha}}] \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} \in]\mathbf{0}, \mathbf{1}[$.
7. Soit a et b deux réels. Montrer que : $\left(0 < a < b \Rightarrow \frac{b-a}{b} \leq \ln(b) - \ln(a) \leq \frac{b-a}{a}\right)$.

2. Montrer que pour tout réel $\boldsymbol{x}$ de $]\mathbf{0}, \mathbf{1}[$, $\boldsymbol{x^x(1-x)^{1-x}} \geq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$.

Soit $x \in]0,1[$.

$x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln\left(x^x(1-x)^{1-x}\right) \geq \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x) \geq -\ln(2) \Leftrightarrow x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x) + \ln(2) \geq 0$.

Posons $f(x) = x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x) + \ln(2)$.

Alors $Df =]0,1[$ et f est continue et dérivable sur Df et $\forall x \in]0,1[, f'(x) = \ln(x) + 1 - \ln(1-x) - 1 = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$.

Alors $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} > 1 \underbrace{\Leftrightarrow}_{car\ 1-x>0} x > 1 - x \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$.

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Donc f est strictement décroissante sur $]0, \frac{1}{2}[$ et strictement croissante sur $]\frac{1}{2}, 1[$ et atteint donc son minimum en $\frac{1}{2}$ et ce minimum vaut $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln(2) = 0$. Ainsi, f est positive et j'en conclus que : $\forall x \in]0,1[, x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$.

3. Montrer que : $\forall \boldsymbol{x} > \mathbf{0}, \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\right)^{\boldsymbol{x}} < \boldsymbol{e} < \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\right)^{\boldsymbol{x+1}}$

Par défintion, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$. Donc, $\forall x > 0, \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\ existe\ et\ \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > 0$. Alors,

$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e \Leftrightarrow xln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < 1 \Leftrightarrow x[ln(x+1) - \ln(x)] < 1$.

Soit $f(x) = x[ln(x+1) - \ln(x)] f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Et $\forall x > 0, f'(x) = \ln(x+1) - \ln(x) + \frac{x}{x+1} - 1 = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$ et $f''(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+1) - (x+1)^2 + x}{x(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2}$. Dons f' est décroissante et $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$. Donc, $\forall x > 0, f'(x) > 0$. Donc f est croissante . De plus, $f(x) = x\left[ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] = \frac{ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$. Comme $\lim_{u \to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1$. Je déduis des limites et variations de f que $\forall x > 0, f(x) < 1$. Ainsi, $\forall x > 0, \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e$.

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1,2\}, \sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$. Est-elle vraie pour $n = 2$?

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1,2\}$. $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1} \Leftrightarrow n^{\frac{1}{n}} > (n+1)^{\frac{1}{n+1}} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{n}\ln(n)} > e^{\frac{1}{n+1}\ln(n+1)} \Leftrightarrow \frac{1}{n}\ln(n) \geq \frac{1}{n+1}\ln(n+1)$.

Soit $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$. f est défnie, continue et dérivable sur $[e, +\infty[$ et $\forall x \in [e, +\infty[, f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$. Donc, $\forall x > e, f'(x) < 0$. Alors f est stricement décroissante sur $[e, +\infty[$. Par conséquent, $\forall n \geq 3, f(n) > f(n+1)$. J'en conclus que $\forall n \geq 3, \sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$.

5. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \forall y \in \mathbb{R}^{+*}, \forall t \in [0,1], t\ln(x) + (1-t)\ln(y) \leq \ln(tx + (1-t)y)$.

Pour $t = 0$ ou $t = 1$, l'inégalité est une égalité et est verifiée.

Soit $y \in \mathbb{R}^{+*} et\ t \in]0,1[$. Posons $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x) = tln(x) + (1-t)\ln(y) - \ln(tx + (1-t)y)$.

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ $et\ \forall x > 0, f'(x) = \frac{t}{x} - \frac{t}{tx+(1-t)y} = t\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{tx+(1-t)y}\right)$. Donc,

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{tx+(1-t)y} \Leftrightarrow (tx + (1-t)y) > x \Leftrightarrow (1-t)(y-x) > 0 \Leftrightarrow y > x$.

x	0		y		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Ainsi, f est strictement croissante sur $]0, y[$ et strictement décroissante sur $[y, +\infty[$. Donc f atteint son maximum en y qui vaut $f(y) = 0$.
Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x) \leq 0\ et\ par\ suite, tln(x) + (1-t)\ln(y) \leq \ln(tx + (1-t)y)$.
J'en conclus que $\forall y \in \mathbb{R}^{+*}, \forall t \in [0,1], \forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ tln(x) + (1-t)\ln(y) \leq \ln(tx + (1-t)y)$.

6.Soit $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{+*}\backslash\{\mathbf{1}\}$. Montrer que : $[\forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^{\boldsymbol{\alpha}} < \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{\alpha}}] \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} \in]\mathbf{0},\mathbf{1}[$.

Soit $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{+*}$. Posons $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x) = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{\alpha}}$ **.**

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ $et\ \forall x > 0, f'(x) = \alpha(x+y)^{\alpha-1} - \alpha x^{\alpha-1} = \alpha[(x+y)^{\alpha-1} - x^{\alpha-1}]$.

1er cas $\boldsymbol{\alpha} \in]\mathbf{0},\mathbf{1}[$. $Alors\ \alpha - 1 < 0$ et $\forall x > 0, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. Comme $\alpha > 0, \lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = 0$ et par suite $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. J'en déduis que $\forall x > 0, f(x) < 0$ et ainsi$\forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{+*}, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{+*}, (x+y)^\alpha < x^\alpha + y^\alpha$.

2ème cas $\boldsymbol{\alpha} \in]\mathbf{1},+\infty[$. $Alors\ \alpha - 1 > 0$ et $\forall x > 0, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. Comme $\alpha > 0, \lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = 0$ et par suite $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. J'en déduis que $\forall x > 0, f(x) > 0$ et ainsi, $\forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{+*}, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{+*}, (x+y)^\alpha > x^\alpha + y^\alpha$.

J'en conclus que $[\forall(x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, (x+y)^\alpha < x^\alpha + y^\alpha] \Leftrightarrow \alpha \in]0,1[$.

7. Soit a et b deux réels. Montrer que : $\left(0 < a < b \Rightarrow \frac{b-a}{b} \leq \ln(b) - \ln(a) \leq \frac{b-a}{a}\right)$.

Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Posons $x = \frac{b}{a}$. Alors $x > 1$. Et,

$\left(\frac{b-a}{b} \leq \ln(b) - \ln(a) \leq \frac{b-a}{a}\right) \Leftrightarrow 1 - \frac{a}{b} \leq \ln\left(\frac{b}{a}\right) \leq \frac{b}{a} - 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$.

Le cours assure que $\ln(x) \leq x - 1$ et de même , $\ln\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} - 1$ donc$- \ln(x) \leq \frac{1}{x} - 1$ et ainsi, $\ln(x) \geq 1 - \frac{1}{x}$.

J'en conclus que $\frac{b-a}{b} \leq \ln(b) - \ln(a) \leq \frac{b-a}{a}$.

Ex 7 Des bijections Montrer que les applications suivantes sont bijectives de Df sur un ensemble J à déterminer.
Déterminer une expression de la bijection réciproque lorsque cela est possible. Etudier la dérivabilité de f^{-1}et calculer $(f^{-1})'(b)$.

1. $f(x) = \frac{4^x}{4^x+2}\ ; b \in J$
2. $f(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} (\equiv th(x))\ ; b \in J$
3. $f(x) = ch(e^{x\sqrt{5}})\ ;\ \ b = \frac{e^2+e^{-2}}{2}$
4. $f(x) = x + 2^{\sqrt{x}}\ \ ;\ \ b = 1$
5. $f(x) = sh(x) + \frac{x^2}{2}\ \ ;\ \ b = \frac{e^2+e-1}{2e}$

Ex 8 Des suites On définit trois suites $P, T\ et\ u$; $\forall n > 0\ \ P_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)\ \ T_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ et $u_0 = -1\ et\ \forall n,\ \sqrt[5]{u_n}\sqrt[3]{u_{n+1}} = e$.

1) Justifier que la suite P est strictement croissante et convergente.
2) Montrer que T est convergente et déterminer sa limite.
3) Donner une expression explicite de u.

des exercices plus complets

Une fonction à paramètre Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. Etudions $g: \left(x \mapsto \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1-ax)}\right)$.

1. **Domaine de définition de g** : $g(x) existe \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(1+ax)\ existe \\ \ln(1-ax)\ existe \\ \ln(1-ax) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+ax > 0 \\ 1-ax > 0 \\ 1-ax \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} > x \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{1}{a}, 0\right[\cup \left]0, \frac{1}{a}\right[$. Donc $Dg = \left]-\frac{1}{a}, 0\right[\cup \left]0, \frac{1}{a}\right[$.

2. **Variations de g :** g est continue et dérivable sur Dg car son expression n' est constituée que de fonctions dérivables sur leur propre domaine de définition.

Et $\forall x \in Dg, g'(x) = \frac{\frac{a}{1+ax}\ln(1-ax) - \frac{-a}{1-ax}\ln(1+ax)}{[\ln(1-ax)]^2}. Posons\ h(x) = \frac{a}{1+ax}\ln(1-ax) - \frac{-a}{1-ax}\ln(1+ax)$. Alors $g'(x)$ est du signe de $h(x)$.

$$h(x) = \frac{a}{1+ax}\ln(1-ax) + \frac{a}{1-ax}\ln(1+ax) = \frac{a}{(1+ax)(1-ax)}[(1-ax)\ln(1-ax) + (1+ax)\ln(1+ax)]$$

Donc, $h(x) \underbrace{=}_{\substack{en\ posant\ t=ax \\ et \\ N(t)=(1-t)\ln(1-t)+(1+t)\ln(1+t)}} \frac{a}{(1+t)(1-t)} N(t)$.

N est dérivable sur $]-1,1[\ et\ \forall t \in]-1,1[, N'(t) = -\ln(1-t) - 1 + \ln(1+t) + 1 = \ln(1+t) - \ln(1-t)$.

Alors, $N'(t) > 0 \Leftrightarrow \ln(1+t) > \ln(1-t) \underbrace{\Leftrightarrow}_{car\ \ln\ est\ strictement\ croissante} 1+t > 1-t \Leftrightarrow t > 0$. Donc N est strictement décroissant sur $]-1,0[$ et strictement croissant sur $]0,1[$.

t	-1		0		1
$N(t)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Des variations et valeurs de N , j'en déduis que $\forall t \in]-1,1[, N(t) \geq 0$. J'en déduis que $\forall x \in]-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}[, h(x) \geq 0\ et\ \ \forall x \in]-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}[\backslash\{0\}, g'(x) \geq 0$.

x	$-\frac{1}{a}$		0		$\frac{1}{a}$
$g'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1 $\|\|$ -1	$\nearrow$	0

3. Déterminons la limite de g en 0^+et en 0^- : $g(x) = \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1-ax)} = (-1)\frac{\ln(1+ax)}{ax} \times \frac{-ax}{\ln(1-ax)}$.

Or, $\lim\limits_{x\to0} ax = 0 = \lim\limits_{x\to0} -ax$ et $\lim\limits_{t\to0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$. $Donc\ \lim\limits_{t\to0} \frac{1}{\ln(1+t)} = \frac{1}{1} = 1$. Donc par composition, $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+ax)}{ax} = 1 = \lim\limits_{x\to0} \frac{-ax}{\ln(1-ax)}$. J'en conclus que $\lim\limits_{x\to0} g(x) = -1$. Et par conséquent $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = -1 = \lim\limits_{x\to0^-} g(x)$. Donc la courbe de g s'approche du point $A(0,-1)\ et\ g$ est prolongeable par continuité en 0 par la valeur -1.

Déterminons comment la courbe de g s'approche de A ? Notons $\tilde{g}: \left(x \mapsto \begin{cases} g(x)\ \ si\ x \neq 0 \\ -1\ si\ x = 0 \end{cases}\right)$. Etudions la dérivabilité de $\tilde{g}$ en 0.

On admet qu'il existe une fonction ε définie sur $]-1,+\infty[\ et$ telle que : $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t)\ et\ \lim\limits_{t\to0} \varepsilon(t) = 0$.

$\forall x \in Dg, \tau(x) = \frac{\tilde{g}(x)-\tilde{g}(0)}{x-0} = \frac{\frac{\ln(1+ax)}{\ln(1-ax)}+1}{x} = \frac{\ln(1+ax)+\ln(1-ax)}{x\ln(1-ax)} = \frac{ax-\frac{(ax)^2}{2}+(ax)^2\varepsilon(ax)+(-ax)-\frac{(-ax)^2}{2}+(-ax)^2\varepsilon(-ax)}{x\left[-ax-\frac{(-ax)^2}{2}+(-ax)^2\varepsilon(-ax)\right]} = \frac{-a+a\varepsilon(ax)+a\varepsilon(-ax)}{\left[-1-\frac{a}{2}x+ax\varepsilon(-ax)\right]}$. Or,

$\lim\limits_{x\to0} ax = 0 = \lim\limits_{x\to0} -ax\ \ et\ \ \lim\limits_{t\to0} \varepsilon(t) = 0, donc, par\ composition, \lim\limits_{x\to0} \varepsilon(ax) = 0 = \lim\limits_{x\to0} \varepsilon(-ax)$. J'en déduis que $\lim\limits_{x\to0} \tau(x) = -2$.

J'en conclus que $\tilde{g}$ est dérivable en 0 et $\tilde{g}'(0) = a$. J'en conclus que Cg approche le point A en venant se confondre avec la droite d'équation $y = ax - 1$ (droite tangente à $C\tilde{g}$ en A).

4. Déterminons la limite de g en $\frac{1}{a}$ et en $-\frac{1}{a}$: $\lim\limits_{x\to\frac{1}{a}} g(x) = "\frac{\ln(2)}{-\infty}" = 0\ et\ \ \lim\limits_{x\to-\frac{1}{a}} g(x) = "\frac{-\infty}{\ln(2)}" = -\infty$. J'en déduis d'une part que Cg a une asymptote verticale en $-\frac{1}{a}$ et d' autre part que g est prolongeable par continuité en $\frac{1}{a}$ par la valeur 0 et la courbe Cg s'approche du point $B\left(\frac{1}{a}, 0\right)$.

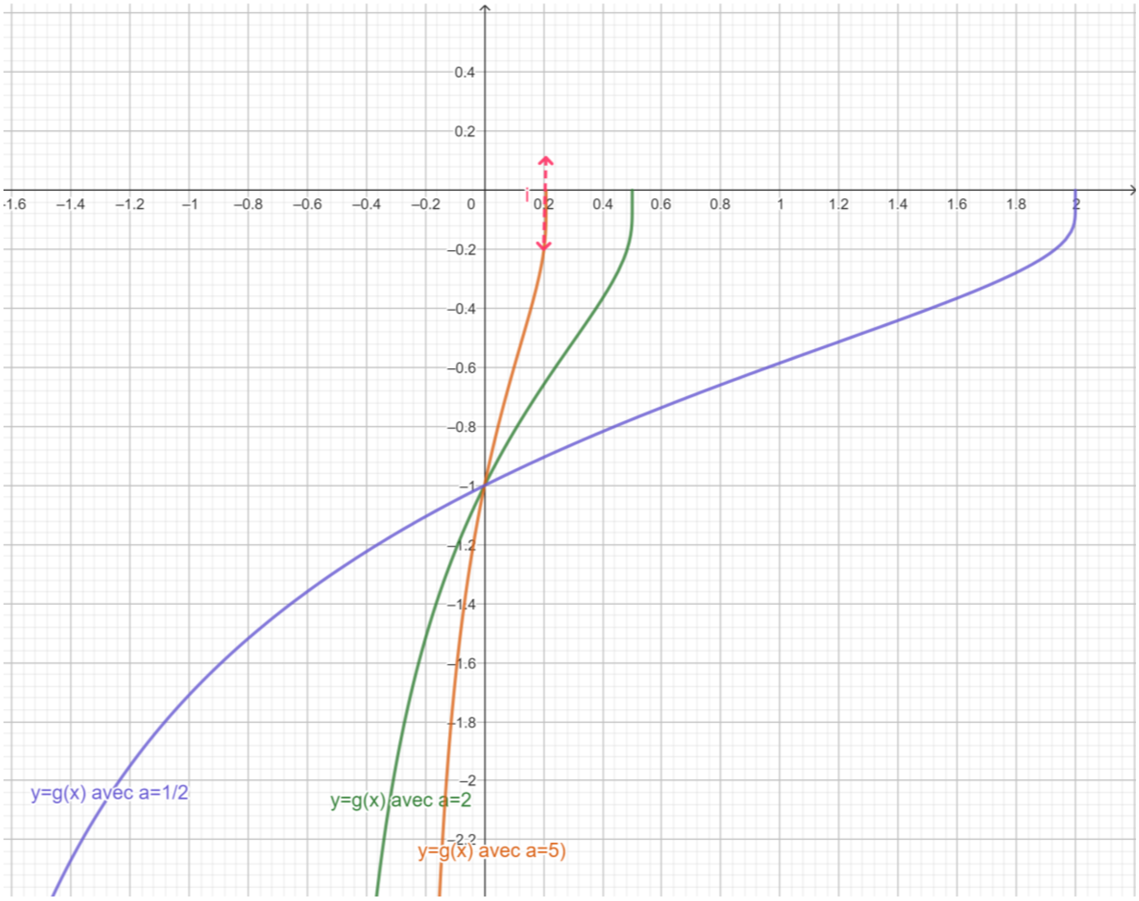
Déterminons comment la courbe de g s'approche de B ? Notons $\tilde{g}: \left(x \mapsto \begin{cases} g(x)\ \ si\ x \neq \frac{1}{a} \\ 0\ si\ x = \frac{1}{a} \end{cases}\right)$. Etudions la dérivabilité de $\tilde{g}$ en $\frac{1}{a}$.

On admet qu'il existe une fonction ε définie sur $]-1,+\infty[\ et$ telle que : $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t)\ et\ \lim\limits_{t\to0} \varepsilon(t) = 0$.

$\forall x \in Dg, \tau(x) = \frac{\tilde{g}(x)-\tilde{g}\left(\frac{1}{a}\right)}{x-\frac{1}{a}} = a\frac{\frac{\ln(1+ax)}{\ln(1-ax)}}{ax-1} = -a\ln(1+ax)\frac{1}{(1-ax)\ln(1-ax)}$. Or, $\lim\limits_{x\to\frac{1}{a}} -a\ln(1+ax) = -aln(2) < 0$. De plus,

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{a}} 1 - ax = 0\ et\ \lim\limits_{t\to0} tln(t) \overset{CC}{\triangleq} 0^-, donc, par\ composition, \lim\limits_{x\to1/a} (1-ax)\ln(1-ax) = 0^-$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to0} \tau(x) = +\infty$. Comme $\tilde{g}$ est continue en 1/a , j'en déduis que $C\tilde{g}$ a une tangenter verticale en $1/a$. Et par suite, la courbe de g s'approche de B en venant se confondre avec la droite d'équation $x = \frac{1}{a}$.



Déterminer tous les réels a tels que $\forall x \in \mathbb{R}, ch(x) \leq e^{ax^2}$.

$ch(x) \leq e^{ax^2} \Leftrightarrow \ln(ch(x)) \leq ax^2 \Leftrightarrow \frac{\ln(ch(x))}{x^2} \leq a \text{ ou } x = 0$. Donc pour que a vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}, ch(x) \leq e^{ax^2}$, il faut et il suffit que a vérifie que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{\ln(ch(x))}{x^2} \leq a$ donc que a soit un majorant de la fonction $f: \left(x \mapsto \frac{\ln(ch(x))}{x^2}\right)$. Etudions f :

$Df = \mathbb{R}^*$ et f est paire. Etudions f sur $\mathbb{R}^{+*}$. f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x > 0, f'(x) = \frac{\frac{sh(x)}{ch(x)}x^2 - 2x\ln(ch(x))}{x^4} = \frac{\frac{sh(x)}{ch(x)}x - 2\ln(ch(x))}{x^3}$

$f'(x)$ est du signe de $g(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}x - 2\ln(ch(x))$. Alors, g est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$\forall x > 0, g'(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} + \frac{x}{ch^2(x)} - \frac{2sh(x)}{ch(x)} = \frac{x}{ch^2(x)} - \frac{sh(x)}{ch(x)}$ et $g''(x) = \frac{1}{ch^2(x)} - \frac{2xsh(x)}{ch^3(x)} - \frac{1}{ch^2(x)} = -\frac{2xsh(x)}{ch^3(x)} < 0$

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$g''(x)$	$-$
$g'(x)$	0 $\searrow$ $-$
$g(x)$	0 $\searrow$ $-$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$\searrow$

D'où le tableau ci -contre donnant, en particulier, les variations de f :

D'après les variations et la parité de f , f est majorée dès que la limite de f en 0 existe et est finie.

Etudions cette limite : $\frac{\ln(ch(x))}{x^2} = \frac{\ln(ch(x))}{ch(x)-1}\frac{ch(x)-1}{x^2} = \frac{\ln(ch(x))}{ch(x)-1}\frac{2sh^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \frac{\ln(ch(x))}{ch(x)-1}\frac{2sh^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\frac{\ln(ch(x))}{ch(x)-1}\left(\frac{sh\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$.

Or, $\lim_{x\to 0} ch(x) \overset{C}{\triangleq} 1$ et $\lim_{u\to 1}\frac{\ln(u)}{u-1} \overset{TA}{\triangleq} 1$, donc par composition, $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(ch(x))}{ch(x)-1} = 1$.Et $\lim_{x\to 0}\frac{x}{2} \overset{C}{\triangleq} 0$ et $\lim_{u\to 0}\frac{\mathrm{sh}(u)}{u} \overset{TA}{\triangleq} 1$ donc par composition, $\lim_{x\to 0}\frac{sh\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)} = 1$.

Ainsi, $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$. Donc $[\frac{1}{2}, +\infty[$ est l'ensemble des majorants de f. Je conclus que les réels a recherchés sont tous les réels supérieurs à ½.

1. Etudier le signe de $f(x) = (x-1)ln(x+1) - xln(x)$ sur $[1;+\infty[$.
2. En déduire les variations de $\varphi(x) = ln(x+1)ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$sur $[1;+\infty[$.
3. En calculant $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$, en déduire les variations de φ sur $]0,1]$.
4. Montrer que pour tous réels strictement positifs, $ln\left(1+\frac{a}{b}\right)ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \leq (ln(2))^2$.

1. f est dérivable sur $[1,+\infty[$ et $\forall x \geq 1, f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x-1}{x+1} - \ln(x) - 1 = \ln(x+1) + \frac{x-1}{x+1} - \ln(x) - \frac{x+1}{x+1} = \ln(x+1) - \frac{2}{x+1} - \ln(x)$

f' est dérivable sur $[1,+\infty[$ et $\forall x \geq 1, f''(x) = \frac{1}{x+1} - 2\frac{(-1)}{(x+1)^2} - \frac{1}{x} = \frac{x(x+1)+2x-(x+1)^2}{x(x+1)^2} = \frac{x-1}{x(x+1)^2} > 0$.

f' est donc strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

x	1 $\qquad$ $+\infty$
$f''(x)$	$+$
$f'(x)$	$\nearrow$ 0
$f(x)$	$\searrow$

$\forall x \geq 1, f'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x+1}$. Donc, $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. Donc d'après les variations de f', j'en déduis que $\forall x \geq 1, f'(x) < 0$. Ainsi, f est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$.

Comme $f(1) = 0$, $\forall x \geq 1, f(x) < 0$.

2. φ est dérivable sur $[1,+\infty[$ et $\forall x \geq 1, \varphi'(x) = \frac{1}{x+1} ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \ln(x+1)\left(-\frac{\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{x+1}[\ln(x+1) - \ln(x)] + \ln(x+1)\left(-\frac{1}{x(x+1)}\right)$

$\varphi'(x) = \frac{1}{x(x+1)}[x\ln(x+1) - x\ln(x) - \ln(x+1)] = \frac{1}{x(x+1)} f(x) < 0$. Donc φ est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$.

3. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = ln\left(\frac{1}{x}+1\right) ln\left(1+\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)}\right) = ln\left(\frac{1}{x}+1\right)\ln(1+x) = \varphi(x)$ $(**)$.

Soit t et t' deux réels tels que $0 < t < t' < 1$. Posons $x = \frac{1}{t}$ et $x' = \frac{1}{t'}$. Alors $1 < x' < x$. Par décroissance de φ sur $[1,+\infty[$, $\varphi(x') > \varphi(x)$. Donc, $\varphi\left(\frac{1}{t'}\right) > \varphi\left(\frac{1}{t}\right)$. Et ainsi, d'après $(**)$, $\varphi(t') > \varphi(t)$. J'en déduis que φ est strictement croissante sur $]0,1]$.

5. Alors φ admet un minimum en 1 qui vaut $\varphi(1) = \ln(2)^2$. Donc, $\forall x \geq 0, \varphi(x) \geq ln^2(2)$.

Alors $\forall(a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \varphi\left(\frac{a}{b}\right) \geq \ln^2(2)$ *i.e.* $\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \leq (\ln(2))^2$.

Soit $t \in]0;1[$. Pour tout $x \in]0,1[$, on pose $f_t(x) = min\{n \in \mathbb{N}^*/x^n \leq t\}$.
Montrer que pour tout $x \in]0\,;1[$, $\frac{\ln(t)}{\ln(x)} \leq f_t(x) < \frac{\ln(t)}{\ln(x)} + 1$. En déduire $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)f_t(x)$.

Soit $x \in]0,1[$. $x^n \leq t \Leftrightarrow \ln(x^n) \leq \ln(t) \Leftrightarrow n\ln(x) \leq \ln(t) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(t)}{\ln(x)}$. Donc, $f_t(x) = min\left\{n \in \mathbb{N}^*/n \geq \frac{\ln(t)}{\ln(x)}\right\}$.

Or, $[\frac{\ln(t)}{\ln(x)}, \frac{\ln(t)}{\ln(x)} + 1[$ contient un seul entier non nul (puisque $ln(t) \neq 0$) . Il en découle que $\frac{\ln(t)}{\ln(x)} \leq f_t(x) < \frac{\ln(t)}{\ln(x)} + 1$.

Alors $\forall x \in]0,1[$, $(1-x)\frac{\ln(t)}{\ln(x)} \leq (1-x)f_t(x) < (1-x)\left[\frac{\ln(t)}{\ln(x)} + 1\right]$ i.e. $\frac{1}{\frac{\ln(x)}{x-1}}[-\ln(t)] \leq (1-x)f_t(x) < \frac{1}{\frac{\ln(x)}{x-1}}[-\ln(t)] + (1-x)$.

Comme $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\ln(x)}{x-1} = 1$ *et* $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln(x) = 0$, les deux fonctions qui encadrent $(1-x)f_t(x)$ ont la même limite $[-ln(t)]$ quand $x \to 1^-$ et par suite, $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)f_t(x) = -ln(t)$.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) = \begin{cases} nx^n & si\ x \in [0, \frac{n}{n+1}] \\ n^{n+1}(1-x)^n & si\ x \in]\frac{n}{n+1}, 1] \end{cases}$

1. Etudier la continuité de chaque f_n .
2. Déterminer, pour x fixé, la limite de la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Puis déterminer la limite de $(f_n(\frac{n}{n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$.

1. g_n et h_n sont polynomiales donc continues sur $\mathbb{R}$. J'en déduis que f_n est continue au moins sur $[0, \frac{n}{n+1}[$ et sur $]\frac{n}{n+1}, 1]$.

f_n est -elle continue en $\frac{n}{n+1}$? Autrement dit Cg_n et Ch_n se raccordent-elles au point d'abscisse $\frac{n}{n+1}$?

$$\lim_{x\to\left(\frac{n}{n+1}\right)^-} f_n(x) = \lim_{x\to\left(\frac{n}{n+1}\right)^-} g_n(x) = n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{n}{n+1}\right)^+} f_n(x) = \lim_{x\to\left(\frac{n}{n+1}\right)^+} h_n(x) = n^{n+1}\left(1-\frac{n}{n+1}\right)^n = n^{n+1}\left(\frac{1}{n+1}\right)^n = n^1\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right).$$

J'en déduis que f_n est continue en $\frac{n}{n+1}$.

2. Fixons $x \in [0,1[$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = 1^-$, pour n assez grand, $\frac{n}{n+1} > x$ et par conséquent $x \in \left[0, \frac{n}{n+1}\right]$ *et* $f_n(x) = nx^n$.

Or $nx^n = ne^{nln(x)} = \frac{n}{e^{(-ln(x))n}} = \frac{n}{e^{\gamma n}}$. Or $\gamma = -\ln(x) > 0$ *et* $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t}{e^{\gamma t}} \overset{CC}{=} 0$. Donc, par composition $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{e^{(-\ln(x))n}} = 0$. Et ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

Prenons $x = 1$. Alors $f_n(1) = n^{n+1}0^n = 0$ dès que $n \geq 1$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1) = 0$.

CCL : $\forall x \in [0;1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = ne^{nln\left(\frac{n}{n+1}\right)} = ne^{-nln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = ne^{-\frac{ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}$. Or , $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$ *et* $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$.Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\frac{ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$. J' en conclus que : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = +\infty$.