TD 5 Fonctions usuelles 1

Ex 0

A. Des calculs de base pour apprendre et penser à simplifier au maximum des expressions exponentielles ou logarithmiques

Simplifier :

$a = e^{-3\ln(x)}$

$b = \frac{\ln(x^2)}{\ln(x^4)}$

$c = e^{\ln(x^2+1)-3\ln(x)}$

$d = \ln\left(\sqrt{e^4}\right) - \ln\left(\sqrt{e^2}\right)$

$h = \ln\left(\sqrt{\exp(x)}\right)$

$m = \mathrm{ch}\left(-\frac{1}{3}\ln(e^{-3})\right)$

$p = sh\left(-\frac{3}{2}\ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3x^2+1}}\right)\right)$

$q = sh^{-1}(2) - ch^{-1}(2)$

$r = log_4\left(4^{\sqrt{2}}\right)$

B. Tracer les courbes des fonctions suivantes :

$\boldsymbol{f}:(\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{ln}(\boldsymbol{x}))$ $Df =$ .... et $Df' =$.................................. $\forall x \in$...................., $f'(x) =$..................	$\boldsymbol{f}:(\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}^{\pi} =$..................$)$ $Df =$ .... et $Df' =$.................................. $\forall x \in$...................., $f'(x) =$..................
$\boldsymbol{f}:(\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{ch}(\boldsymbol{x}) =$............$)$ $Df =$ .... et $Df' =$.................................. et $\forall x \in$...................., $f'(x) =$..................	$\boldsymbol{f}:(\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{x}} =$.......$)$ $Df =$ .... et $Df' =$.................................. $\forall x \in$...................., $f'(x) =$..................
$\boldsymbol{f}:(\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{\pi}^{\boldsymbol{x}} =$..........................$)$ $Df =$ .... et $Df' =$.................................. et $\forall x \in$...................., $f'(x) =$..................	$\boldsymbol{f}:(\boldsymbol{x} \mapsto= \boldsymbol{sh}(\boldsymbol{x} =$......... ....$)$ $Df =$ .... et $Df' =$.................................. et $\forall x \in$...................., $f'(x) =$..................
$\boldsymbol{f}:(\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}^{-\sqrt{2}} =$..........................$)$ $\boldsymbol{et}$ $Df =$ .... et $Df' =$.................................. et $\forall x \in$...................., $f'(x) =$..................	$\boldsymbol{f}:(\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}^{\frac{1}{\pi}} =$..........................$)$ $\boldsymbol{et}$ $Df =$ .... et $Df' =$.................................. et $\forall x \in$...................., $f'(x) =$..................
$\boldsymbol{f}:(\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}^{5} =$..........................$)$ $\boldsymbol{et}$ $Df =$ .... et $Df' =$.................................. et $\forall x \in$...................., $f'(x) =$..................	$\boldsymbol{f}:(\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}^{\frac{1}{5}} =$..........................$)$ $\boldsymbol{et}$ $Df =$ .... et $Df' =$.................................. et $\forall x \in$...................., $f'(x) =$..................

Ex 1 Equations et inéquations

A. Soit y un paramètre réel. Résoudre les (in-)équations suivantes d'inconnue x réelle (on réfléchira préalablement si l'équation peut se résoudre algébriquement ou non)

1. $e^{-6x^2+1} - \sqrt{e} > 0$
2. $\ln(x) + \ln(3x^2 - 4) > \ln(x^2 - 2)$
3. $log_2(x) + log_x(2) = \frac{5}{2}$
4. $3xlog_{10}(x) + 2(x - 1) = 0$
5. $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$
6. $\frac{e^{3x} - 2e^{2x} - e^{x+4} + 2e^4}{ln^2 x - 1} > 0$
7. $sh(x) = x^2$
8. $e^{-2x} + e^x \leq 2$
9. $x + e^x > 2$
10. $e^{-x} + e^x = y$
11. $x^2 < \ln(x) + 1$
12. $\frac{\ln(x+1)}{\ln(x-2)} \leq 2$
13. $2ch(x) - x^2 \leq 0$
14. $xln(2 - x) = 1$
15. $sh^3(x) - 14sh(x) + 5 < 5ch^2(x)$
16. $3sh(x) - ch(x) = 1$
17. $x^x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
18. $ch^5 x - sh^5 x = 1$

B. Résoudre: $(S): \begin{cases} log_y(x) + log_x(y) = \frac{50}{7} \\ xy = 256 \end{cases}$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Ex 2 Autour du calcul de limite

I En se plaçant au voisinage du point où l'on étudie la limite

A. Soit $h: (x \mapsto x - \lfloor x \rfloor)$ et $g: (x \mapsto |2x - 1|)$. Montrer que $f = g \circ h$ est continue sur $\mathbb{R}$.

B. Montrer que $\varphi: (x \mapsto \lfloor 1 - 2x \rfloor)$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

II Par encadrement Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\lfloor 2x \rfloor}{1 - 3x + \sqrt{x}}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2}}{\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}}$.

III En faisant apparaitre le produit d'une fonction de limite nulle et d'une fonction bornée

Soit a un réel. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} x^a \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ quand cette limite existe (On justifiera qu'elle n'existe pas le cas échéant).

IV Faire apparaitre les limites usuelles Soit a et b des réels .

FI " $\frac{0}{0}$ "	FI " $\infty - \infty$ "	FI " $0 \times \infty$ "	FI " $\frac{\infty}{\infty}$ "	FI " 1^∞ "," 0^0 " ou " $(+\infty)^0$ "
1. $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt[3]{2x} - 2}{x - 4}$ 2. $\lim\limits_{x \to 4} \frac{(x^3 - 64)\cos(\pi x)}{\sqrt{x} - 2}$ 3. $\lim\limits_{x \to -a} \frac{(a-1)x + x^2 - a}{x^3 + a^3}$ 4. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{(x^3 - 1)}{ln(x)}$ 5. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1 + 3x^2 + \cos(x^2)) - \ln(2)}{x^2}$ 6. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{sh(x)} - \text{ch}(x)}{\sin(x)}$ 7. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{xln(x^2) - 3x^2}$ 8. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(ax)}{\tan(bx)}$ $(b \neq 0)$ 9. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^a - a^a}{x^b - a^b}$ $(a, b > 0)$ 10. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{\text{sh}(x)(5 + \text{ch}^2(x))}$	11. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + y)^a - x^a - y^a$ où $y \in \mathbb{R}^{+*}$ $fixé$. 12. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2 - 1} - (ax + b)$ 13. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) - \ln(\ln(x)) - \sqrt[3]{x}$	14. $\lim\limits_{x \to 0^-} (2\sqrt[3]{x} - 3x^2)\ln^2(x^4 - 3x)$ 15. $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{-\sqrt{\ln(x^2)}}$ 16. $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) \ln(1 + x)$.	17. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x} - 2x^\pi - \ln^2(x)}{1 - 3sh(x)}$ 18. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\ln(x) - 3x^2 + \sin(x)}$ 19. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\ln(x)}$ 20. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{3x} - 1}{\text{sh}(x)(5 + \text{ch}^2(x))}$ 21. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 64}{\sqrt{x} - 2}$	1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{bx}\right)^{ax}$ $b \neq 0$ 2. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \text{sh}(x))^{\ln(x)}$ 3. $\lim\limits_{x \to 0} (\cos(x))^{\ln(x)}$ 4. $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 + 3ch(x))^{e^x}$ 5. $\lim\limits_{x \to 0} sh(x)^{\sin(x)}$ 6. $\lim\limits_{x \to +\infty} sh(x)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}$

APPLICATIONS :

1) Soit m un entier naturel non nul et a un réel. Justifier que la fonction $f: (x \mapsto x^m)$ est dérivable en a et $f'(a) = ma^{m-1}$. Puis montrer que la fonction $g: (x \mapsto x^{\frac{1}{m}})$ est dérivable en tout point a non nul de Dg et $g'(a) = \frac{1}{m} a^{\frac{1}{m} - 1}$.

2) Pour quelles valeurs du réel α, la fonction $f: \left(x \mapsto \frac{\text{sh}(x)}{x^\alpha}\right)$ est -elle prolongeable par continuité en 0 ?
On suppose maintenant que $\alpha < 1$. Le prolongement par continuité de f est-il dérivable en 0 ?

2) Soit $f(x) = xexp\left(\frac{x}{x^2 - 1}\right) = xe^{\frac{x}{x^2 - 1}}$ et $\varphi(t) = \frac{e^{\frac{t}{1 - t^2}} - 1}{t}$. Calculer la limite de φ en 0. En déduire que Cf admet une même asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$ dont on donnera une équation.

Ex 3 Asymptotes simples

A. Soit $f: (x \mapsto \ln(2e^x - x - 1))$. On munit le plan d'un repère orthonormé. On donne $\ln(2) \approx 0{,}7$et $\ln(\ln(2)) \approx -0{,}4$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$. En déduire Df.
2. Montrer que f induit une bijection notée $f_|$ de $[-\ln(2), +\infty[$ sur un domaine J à déterminer.
3. Montre que $f_|^{-1}$ est continue sur J et dérivable sur $J \setminus \{\ln(\ln(2)\}$. Calculer $\left(f_|^{-1}\right)'(0)$.
4. Que peut-on dire de $C_{f_|^{-1}}$ au point $B(\ln(\ln(2)), -\ln(2))$?
5. Déterminer l'asymptote de Cf en $+\infty$. Que peut-on en déduire sur $C_{f_|^{-1}}$? Tracer C_f et $C_{f_|^{-1}}$.

B. Soit f : $\left(x \mapsto \ln(1 + e^x) + \frac{1}{2}\ln(1 + e^{-x})\right)$.

1. Déterminer l'asymptote de Cf en $+\infty$. Faire de même en $-\infty$.
2. Etudier les variations de f. Tracer Cf.

C. Soit f : $\left(x \mapsto \sqrt{3x^2 - 4x + 5}\right)$. Déterminer l'asymptote de Cf en $+\infty$. Faire de même en $-\infty$.

D. Soit f : $\left(x \mapsto \frac{4x - 5x^2}{1 - 2x}\right)$. Déterminer l'asymptote de Cf en $+\infty$. Faire de même en$-\infty$.

Ex 4 Des études complètes de fonctions . Etudier g et représenter la courbe de g :

1. $g(x) = th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}$
2. $g(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2 + x}$
3. $g(x) = x^x$
4. $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$ (déjà faite à retravailler)
5. $g(x) = \sqrt[3]{x^2(x-2)}$
6. $g(x) = \ln\left(ch(x)\right)$.
7. $g(x) = \ln(2^x - x - 1)$

Ex 5 Des sommes et produits Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x, a\ et\ b$ des réels $fixés\ indépendants\ de\ n$

1) Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \text{ch}\ (a + kb) = \frac{sh\left(\frac{(n+1)b}{2}\right)}{sh\left(\frac{b}{2}\right)} ch\left(a + \frac{nb}{2}\right)$.

2) Calculer pour $n \geq 3$: $S_n = \sum_{p=3}^{n} log_{10}\left(\frac{2p^2-2p-4}{3p^2+3p-6}\right)$, $T_n(a,b) = \sum_{k=n}^{n^2}(-1)^k a^{(bk)}$, $W_n = \sum_{k=0}^{n-3}\binom{n-1}{k+1} 5^{n-\frac{k}{a}}\sqrt[n]{2}\ \ et\ P_n(a) = \prod_{k=3}^{n}\left(\frac{k^2-1}{k^2-4}\right)^a$.

3) On pose $p_n(x) = \prod_{k=0}^{n} ch\left(\frac{x}{2^k}\right)$. Calculer $p_n(x)sh\left(\frac{x}{2^n}\right)$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n(x)$.

Ex 6 Des inégalités à prouver

1. Montrer que pour tout réel x , $ch^2(x) + shx > 0$ et $|sh(x)| \geq \left|x + \frac{x^3}{6}\right|$.
2. Montrer que pour tout réel x de $]0,1[$, $x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$.
3. Montrer que : $\forall x > 0, \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1,2\}, \sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$. Est-elle vraie pour $n = 2$?
5. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \forall y \in \mathbb{R}^{+*}, \forall t \in [0,1], tln(x) + (1-t)\ln(y) \leq \ln(tx + (1-t)y)$.
6. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}\backslash\{1\}$. Montrer que : $\left[\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, (x+y)^\alpha < x^\alpha + y^\alpha\right] \Leftrightarrow \alpha \in]0,1[$.
7. Soit a et b deux réels. Montrer que : $\left(0 < a < b \Rightarrow \frac{b-a}{b} \leq \ln(b) - \ln(a) \leq \frac{b-a}{a}\right)$.

Ex 7 Des bijections Montrer que les applications suivantes sont bijectives de Df sur un ensemble J à déterminer.
Déterminer une expression de la bijection réciproque lorsque cela est possible. Etudier la dérivabilité de f^{-1}et calculer $(f^{-1})'(b)$.

1. $f(x) = \frac{4^x}{4^x+2}$; $b \in J$
2. $f(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} (\equiv th(x))$; $b \in J$
3. $f(x) = ch(e^{x^{\sqrt{5}}})$; $b = \frac{e^2+e^{-2}}{2}$
4. $f(x) = x + 2^{\sqrt{x}}$; $b = 1$
5. $f(x) = sh(x) + \frac{x^2}{2}$; $b = \frac{e^2+e-1}{2e}$.

Ex 8 Des suites On définit trois suites $P, T\ et\ u$; $\forall n > 0\ P_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$ $T_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ et $u_0 = -1\ et\ \forall n,\ \sqrt[5]{u_n}\sqrt[3]{u_{n+1}} = e$.

1) Justifier que la suite P est strictement croissante et convergente.
2) Montrer que T est convergente et déterminer sa limite.
3) Donner une expression explicite de u.

Ex 9 Une fonction à paramètre Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. Etudier g: $\left(x \mapsto \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1-ax)}\right)$.

Ex 10 Une inégalité à paramètre Déterminer tous les réels a tels que $\forall x \in \mathbb{R}, ch(x) \leq e^{ax^2}$.

Ex 11 Etudes de fonctions imbriquées

1. Etudier le signe de $f(x) = (x-1)ln(x+1) - xln(x)$ sur $[1; +\infty[$.
2. En déduire les variations de $\varphi(x) = ln(x+1)ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$sur $[1; +\infty[$.
3. En calculant $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$, en déduire les variations de φ sur $]0,1]$.
4. Montrer que pour tous réels strictement positifs, $ln\left(1 + \frac{a}{b}\right) ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) \leq \left(ln(2)\right)^2$.

Ex 12 Limite par encadrement
Soit $t \in]0;1[$. Pour tout $x \in]0;1[$, on pose $f_t(x) = min\{n \in \mathbb{N}^*/x^n \leq t\}$.
Montrer que pour tout $x \in]0\ ;1[, \frac{\ln(t)}{\ln(x)} \leq f_t(x) < \frac{\ln(t)}{\ln(x)} + 1$. En déduire $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)f_t(x)$.

Ex 13 une suite de fonctions

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\forall n\in\mathbb{N}, f_n(x) = \begin{cases} nx^n\ \ si\ x \in [0, \frac{n}{n+1}] \\ n^{n+1}(1-x)^n\ \ si\ x \in]\frac{n}{n+1}, 1] \end{cases}$

1. Etudier la continuité de chaque f_n .
2. Déterminer, pour x fixé, la limite de la suite $(f_n(x))_{\ n\in\mathbb{N}}$.
3. Puis déterminer la limite de $(f_n(\frac{n}{n+1}))_{\ n\in\mathbb{N}}$.