Les dernières fonctions usuelles.

1 **Théorème : 1.** Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle.
2. Si f est une fonction continue sur un intervalle I alors deux primitives F et G de f sur I vérifient :
$$\exists c \in \mathbb{R} / \forall x \in I, G(x) = F(x) + c.$$

2 **Conséquence** : Si f est une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$ et $b \in \mathbb{R}$, alors il existe une et une seule primitive F de f sur I qui vérifie : $F(a) = b$.

I Fonctions logarithmes et exponentielles.

1. Fonction logarithme népérien

3 **Déf :** On appelle logarithme népérien, notée ln $(ou\ log)$, la primitive, sur $\mathbb{R}^{+*}$, de la fonction $\left(t \mapsto \frac{1}{t}\right)$ qui s'annule en 1.

4 **Par conséquent, 1.** $\ln(1) = 0$. La fonction ln est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, ln'(x) = \frac{1}{x}$.
2. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} \overset{TA}{=} 1$ ou encore $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} \overset{TA}{=} 1$.
3. La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

5 **Prop :** Si u est dérivable sur un domaine D et ne s'annule pas sur D alors $\varphi = ln|u|$ est dérivable sur D et $\forall x \in D, \varphi'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

6 Si u est dérivable et ne s'annule pas sur D , $(x \mapsto ln|u(x)|)$ est une primitive de $\left(x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}\right)$ sur D

En particulier, une primitive de $\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}^*$est $(x \mapsto ln|x|)$.

$(x \mapsto x\ln(x) - x)$ est une primitive de $(x \mapsto \ln(x))$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

7 **Premières propriétés algébriques :**
1. $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, $ln(xy) = ln(x) + ln(y)$. Généralisation :
2. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $ln\left(\frac{1}{x}\right) = -ln(x)$
3. $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = ln(x) - ln(y)$
4. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\forall r \in \mathbb{Q}$, $ln(x^r) = rln(x)$.

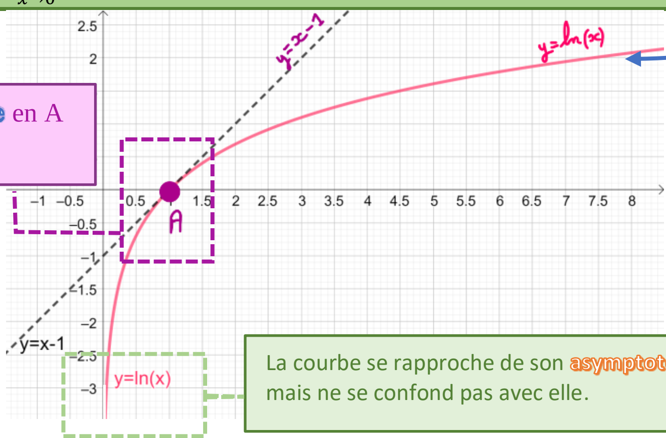
8 **Prop :** $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$

9 **Prop :** 1. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(x) \leq x - 1$. Donc la courbe de ln est sous sa tangente au point $A(1\,;0)$.
2. $\forall t \in]-1;+\infty[$, $t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$

10 **Les premières croissances comparées :** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ (i.e. la courbe de ln a une branche parabolique de direction asymptotique (Ox) en $+\infty$) et $\lim\limits_{x\to 0} x ln(x) = 0$.

11

La courbe se confond avec sa tangente en A au voisinage de A.



Croissance lente ; ln tend lentement vers $+\infty$.

La courbe se rapproche de son asymptote mais ne se confond pas avec elle.

3. Fonction exponentielle

12 **Déf :** le logarithme népérien ln est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est, par définition, la fonction exponentielle notée exp : $(x \mapsto e^x)$.

13 **Par conséquent,**

1. exp est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ de bijection réciproque ln . La fonction exp est définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. $e^0 = 1, \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \; et \; \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$. Donc, C_{exp} a une asymptote horizontale en $-\infty$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, e^{\ln(x)} = x \; et \; \forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x \; et \; \forall x > 0, \forall y \in \mathbb{R}, (y = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^y)$.
4. La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, exp'(x) = exp(x) = e^x$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{TA}{=} 1$.
5. Si u est une fonction dérivable sur D alors h: $(x \mapsto e^{u(x)})$ est dérivable sur D et$\forall x \in D, h'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

14 **Propriétés algébriques :** $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall r \in \mathbb{Q}$,

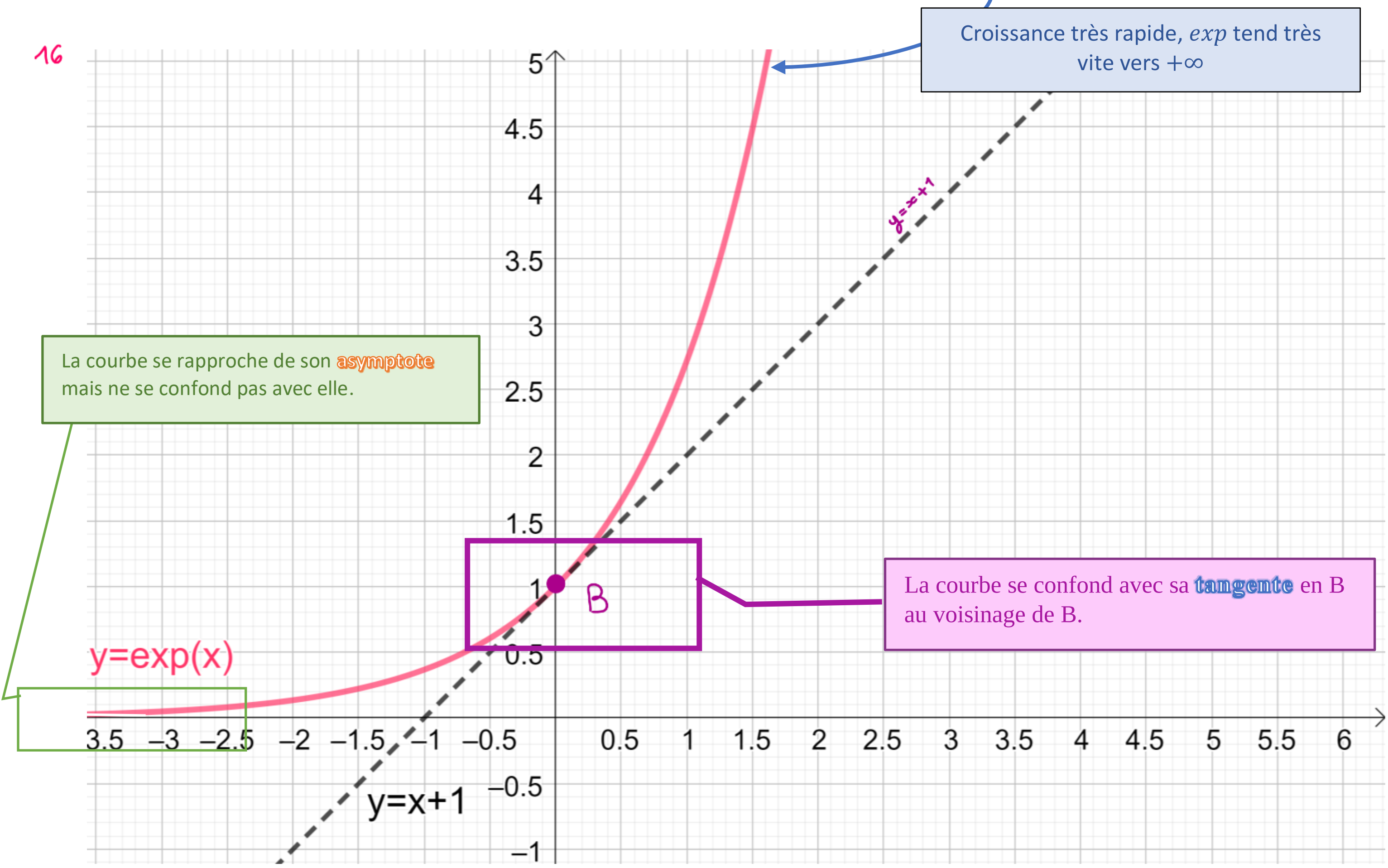
1. $e^{a+b} = e^a e^b$ Généralisation :
2. $e^{-b} = \frac{1}{e^b}$
3. $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
4. $e^{ra} = (e^a)^r$ et $\forall \, x > 0, \; x^r = e^{r\ln(x)}$.

15 **Autres propriétés : 1.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. Donc C_{exp}a une branche parabolique de direction asymptotique (Oy).

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$.

3. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$. Donc C_{exp}est toujours au-dessus de sa tangente au point $B(0\,;1)$.

16



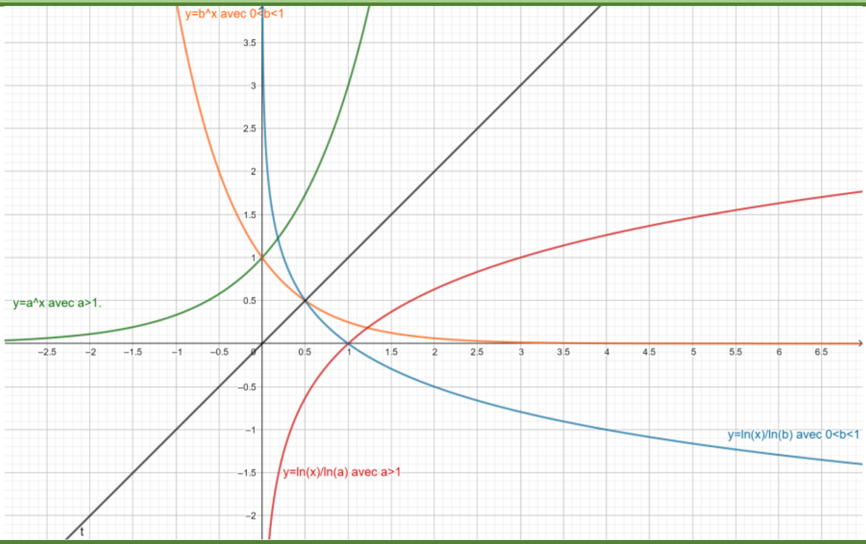
17 Pour tout réel a non nul, $\left(x \mapsto \frac{1}{a} e^{ax}\right)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $(x \mapsto e^{ax})$.
Si u est dérivable sur D alors $\left(x \mapsto e^{u(x)}\right)$ est une primitive sur D de $\left(x \mapsto u'(x)e^{u(x)}\right)$.

4. Logarithme et exponentielle de base a

18 **Déf :** soit a un réel strictement positif et distinct de 1.
Pour tout réel x strictement positif, on définit $log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ le logarithme de base a de x .
Pour tout réel x, on définit $exp_a(x) = e^{x\ln(a)}$ l'exponentielle de base a de x . **Autre notation** : $a^x = exp_a(x) = e^{x\ln(a)}$

19 On définit ainsi les fonctions log_a et exp_a logarithme et exponentielle de base a
NB : $ln = log_e$ et $exp = exp_e$.

20 **Théo :** exp_a est la bijection réciproque de log_a.

21 

- Si $a > 1$ alors $ln(a) > 0$ donc les courbes de log_a et ln ont la même allure. Idem pour les courbes de exp et exp_a.
- Si $0 < b < 1$ alors $\ln(b) < 0$ donc les courbes de log_b et $-ln$ ont la même allure. Idem pour les courbes de exp_b et $(x \mapsto e^{-x})$.

22 **Propriétés algébriques :** log_a et exp_a vérifient les mêmes propriétés algébriques que leurs homologues respectifs ln et exp. A savoir : soit a et b des réels strictement positif et distincts de 1.
Pour tous réels x et y strictement positifs et tout rationnel α,

$log_a(xy) = log_a(x) + log_a(y)$ $\qquad$ $log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -log_a(y)$

$log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a(x) - log_a(y)$ $\qquad$ $log_a(x^\alpha) = \alpha log_a(x)$

Pour tous réels x et y et tout rationnel α,

$exp_a(x+y) = exp_a(x) \times exp_a(y)$ $\quad i.e.\quad$ $a^{x+y} = a^x a^y$

$exp_a(-x) = \frac{1}{exp_a(y)}$ $\quad i.e.\quad$ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

$exp_a(x-y) = \frac{exp_a(x)}{exp_a(y)}$ $\quad i.e.\quad$ $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$

$(exp_a(x))^\alpha = exp_a(\alpha x)$ $\quad i.e.\quad$ $(a^x)^\alpha = a^{\alpha x}$

$exp_{ab}(x) = exp_a(x) \times exp_b(x)$ $\quad i.e.\quad$ $a^x b^x = (ab)^x$

$exp_{a/b}(x) = \frac{exp_a(x)}{exp_b(x)}$ $\quad i.e.\quad$ $a^x/b^x = (a/b)^x$

23 **NB :** Si $a < b$ alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{b^x} = 0$ i.e. $a^x \underbrace{\ll}_{+\infty} b^x$.

24 **Ex** : Montrer que C_{log_a} et $C_{log_{\frac{1}{a}}}$ sont symétriques par rapport à (Ox) et que C_{exp_a} et $C_{exp_{\frac{1}{a}}}$ sont symétriques par rapport à (Oy).

III Fonctions puissances réelles

25 **Déf** : Soit α *un réel*. Pour tout réel x strictement positif ,on définit : $x^{\alpha} = e^{\alpha \ln(x)}$ la puissance α du réel x.
On définit ainsi la fonction puissance réelle α que l' on notera f_{α} . f_{α} est donc définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $f_{\alpha}(x) = x^{\alpha}$.

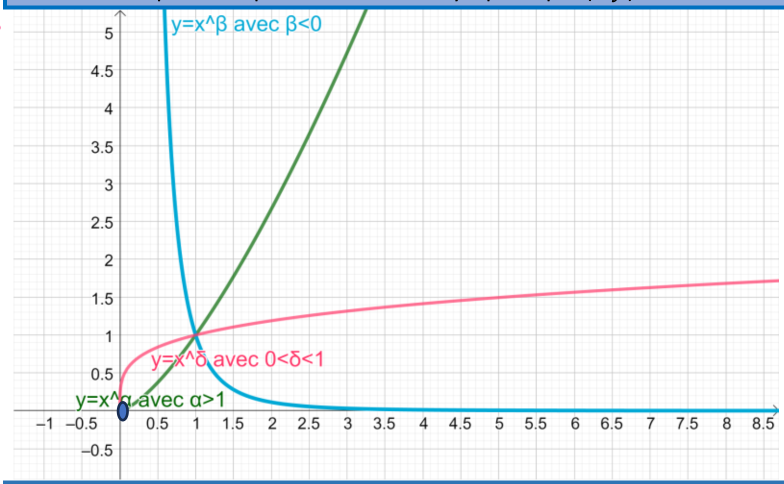
26 **Rque :** Si $\alpha = 0$ alors f_{α} est la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}^{+*}$. Si $\alpha = 1$ alors f_{α} coincide avec l'identité $id: (x \to x)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Si $\alpha \in \mathbb{Z}$ *ie* $\alpha = n$ alors f_{α} coïncide avec $(x \to x^n)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Si $\alpha = \frac{1}{n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ alors f_{α} coïncide avec $(x \to \sqrt[n]{x})$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

27 **Propriétés algébriques des puissances réelles :**
Soit α, β deux réels .Soit x, y deux réels strictement positifs .

$$(xy)^{\alpha} = x^{\alpha} y^{\alpha} \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha} = \frac{x^{\alpha}}{y^{\alpha}}$$
$$x^{\alpha} x^{\beta} = x^{\alpha+\beta} \qquad x^{-\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha}}$$
$$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^{\alpha}}{x^{\beta}} \qquad (x^{\alpha})^{\beta} = x^{\alpha\beta}$$
$$\ln(x^{\alpha}) = \alpha \ln(x) \qquad (e^{x})^{\beta} = e^{\beta x}$$

Généralisations : Soient $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n$ *des réels*, $x, x_1, x_2, .., x_n$ des réels strictement positifs.
$(\prod_{k=1}^{n} x_k)^{\alpha} = \prod_{k=1}^{n} x_k{}^{\alpha}$ et $\prod_{k=1}^{n} x^{\alpha_k} = x^{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}$

28 **Propriétés de la fonction puissance réelle α**
1. $f_{\alpha}(1) = 1$.
2. f_{α} est bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $(f_{\alpha})^{-1} = f_{\frac{1}{\alpha}}$.
3. f_{α} est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et pour tout réel $x > 0$, $f_{\alpha}'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.
4. Si u est dérivable sur D et $\forall x \in D, u(x) > 0$ alors $\varphi: (x \mapsto u^{\alpha}(x))$ est dérivable sur D et $\forall x \in D, \varphi'(x) = \alpha u'(x) u(x)^{\alpha-1}$.
5. Si $\alpha < 0$ alors f_{α} est strictement décroissante et Cf_{α} admet deux asymptotes l'une verticale en 0 et l'autre horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.
6. Si $0 < \alpha < 1$ alors f_{α} est strictement croissante, f_{α} est prolongeable par continuité en 0 par la valeur 0 et $C\widetilde{f_{\alpha}}$ a une tangente verticale en O. (Donc, Cf_{α} admet le point limite O qu'elle approche en se collant à l'axe des ordonnées) et Cf_{α} admet une branche parabolique de direction asymptotique (Ox) en $+\infty$.
7. Si $\alpha > 1$ alors f_{α} est strictement croissante, f_{α} est prolongeable par continuité en 0 par la valeur 0 et $C\widetilde{f_{\alpha}}$ a une tangente horizontale en O (Cf_{α} admet le point limite O qu'elle approche en se collant à l'axe des abscisses) et Cf_{α} admet une branche parabolique de direction asymptotique (Oy) en $+\infty$.

29


30 **NB :** Soit α *et* β deux réels tels que $\alpha < \beta$.
Au voisinage de $+\infty$, $x^{\alpha} \ll_{+\infty} x^{\beta}$.
Au voisinage de 0, $x^{\beta} \ll_{0} x^{\alpha}$.
$\lim_{x \to 1} \frac{x^{\alpha}-1}{x-1} \overset{TA}{=} \alpha$ ie. $\lim_{t \to 0} \frac{(1+t)^{\alpha}-1}{t} = \alpha$.

31 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
$(x \mapsto \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1})$ est une primitive de $(x \mapsto x^{\alpha})$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

32 **Théorème des croissances comparées .** Soit α, β, γ des réels strictement positifs .

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(ln(x))^{\alpha}}{x^{\beta}} = \lim_{x \to 0} x^{\beta} |ln(x)|^{\alpha} = 0 \quad et \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\beta}}{e^{\gamma x}} = \lim_{x \to -\infty} |x|^{\beta} e^{\gamma x} = 0$$

Si $\alpha > 0, \beta > 0$ *et* $a > 1$ *alors* $ln^{\alpha}(x) \ll_{+\infty} x^{\beta} \ll_{+\infty} a^{x}$.

33 **Exercice** : 1) Calculons $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{2x-1} e^{x-x^2}$, $\lim_{x \to 0} \sqrt{x^2+x} \ln(x)$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+x^2-3x)}{\sqrt[3]{1-8x}}$, $\lim_{x \to +\infty} \sin(x) \ln(x) e^{1+x-3x^2}$.
2) Soit $f(x) = \ln(1 + e^{3x} - x)$. Déterminer l'asymptote oblique de Cf en $+\infty$. SAVOIR-FAIRE

34 **Déf :** Soit u *et* v deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Par définition, $u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln(u(x))}$.
Alors , $u(x)^{v(x)}$ existe *si et ssi* $u(x)$ *et* $v(x)$ existent et $u(x) > 0$.
NB : ce sont ces fonctions qui donnent les FI : $1^{\infty}, 0^{0}$ *et* ∞^{0}.

35 **Exercice :** 1) Calculons $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{x}$ et $\lim_{x \to 0^{sgn(a)}} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{x}$. SAVOIR-FAIRE
2) Etudions la fonction $f: (x \mapsto x^{x})$.

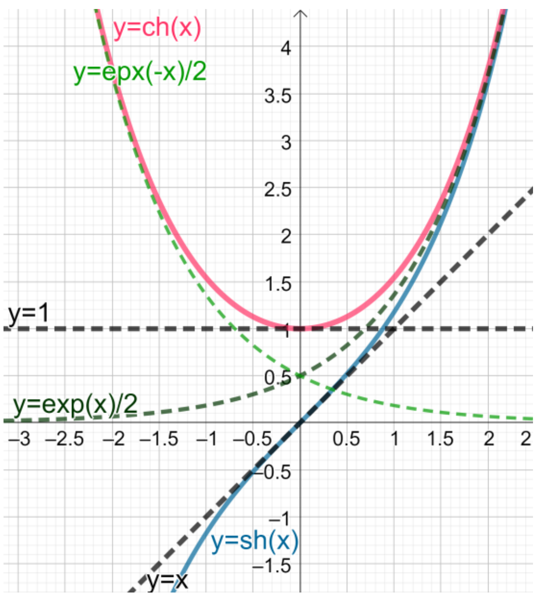
IV Fonctions cosinus et sinus hyperboliques.

36 **Déf :** pour tout réel x ,
$ch(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ est le cosinus hyperbolique de x et $sh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ est le sinus hyperbolique de x.
On définit ainsi deux fonctions : la fonction sinus hyperbolique sh et la fonction cosinus hyperbolique ch sur tout $\mathbb{R}$.

37 **Propriétés algébriques des sinus et cosinus hyperboliques**
Pour tous réels a *et* b ,
1. $ch^2a-sh^2a=1$
2. $ch(a+b)=ch(a)ch(b)+sh(a)sh(b)$
3. $sh(a+b)=sh(a)ch(b)+sh(b)ch(a)$
4. $ch(2a)=ch^2(a)+sh^2(a)=2ch^2(a)-1=1+2sh^2(a)$
5. $sh(2a)=2sh(a)ch(a)$
6. $1-e^a=-2sh\left(\frac{a}{2}\right)e^{\frac{a}{2}}$
7. $1+e^a=2ch\left(\frac{a}{2}\right)e^{\frac{a}{2}}$

38 **Propriétés des fonctions sh et ch**
1. Les fonctions ch et sh sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout réel x , $ch'(x)=sh(x)$ *et* $sh'(x)=ch(x)$.
2. Si u est dérivable sur D alors $ch(u)$ *et* $sh(u)$ sont dérivables sur D et
   $$\forall x\in D,\left(ch(u)\right)'(x)=u'(x)sh(u(x))\ et\ \left(sh(u)\right)'(x)=u'(x)ch(u(x))$$
3. ch est paire, sh est impaire.
4. Pour tout réel x , $ch(x)\geq 1$ et $ch(x)>|sh(x)|\geq|x|$ et $(shx>0\ \ si\ et\ ssi\ x>0)$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{shx}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{chx-1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{chx-1}{x^2}=\frac{1}{2}$.
6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{shx}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{chx}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{chx}{shx}=1$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{chx}{e^x}=\frac{1}{2}$. Donc les courbes de ch et sh ont des branches paraboliques de direction asymptotiques (Oy) en $+\infty$ *et* $-\infty$.
7. sh est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x, sh^{-1}(x)=ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ *et* sh^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x,(sh^{-1})'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
8. ch induit une bijection $ch_|$ de $\mathbb{R}^+$ sur $[1;+\infty[$ et $\forall x\geq 1, {ch_|}^{-1}(x)=ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ *et* ${ch_|}^{-1}$ est dérivable sur$]1;+\infty[$ et $\forall x>1,({ch_|}^{-1})'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

39



40
$$sh(x)=sh(y)\Leftrightarrow x=y$$
$$sh(x)>sh(y)\Leftrightarrow x>y$$
$$sh(x)=y\Leftrightarrow x=\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$$
$$ch(x)=ch(y)\Leftrightarrow x=\pm y$$
$$ch(x)=y\Leftrightarrow x=\pm\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)$$

41
1. ch est une primitive de sh sur $\mathbb{R}$ et sh est une primitive de ch sur $\mathbb{R}$.
2. *Si* a est un réel non nul alors $(x\mapsto\frac{1}{a}ch(ax))$ est une primitive de $(x\mapsto sh(ax))$ sur $\mathbb{R}$ et $(x\mapsto\frac{1}{a}sh(ax))$ est une primitive de $(x\mapsto ch(ax))$ sur $\mathbb{R}$.
3. $\left(x\mapsto ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)$ est une primitive de $\left(x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ sur $\mathbb{R}$.
4. $\left(x\mapsto ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right)$ est une primitive de $\left(x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$ sur$]1\,;+\infty[$.

V Fonctions arcsinus, arccosinus et arctangente

1. Arcsinus

Sinus est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Donc, sin induit une bijection $sin_|$ de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1;1]$.

42 **Déf. :** 1) La fonction $Arcsin$ est, par définition, la bijection réciproque de $sin_|$: $\left(\begin{array}{c}\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1] \\ x \mapsto sin(x)\end{array}\right)$.La fonction $Arcsin$ est définie sur $[-1,1]$ et à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ par l'équivalence :

$$\begin{cases} y = \sin(x) \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Arcsin(y) = x \\ y \in [-1,1]\end{cases}.$$

2) Soit $y \in [-1;1]$ Le réel $Arcsin(y)$ est donc l'unique réel de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ dont le sinus vaut y .

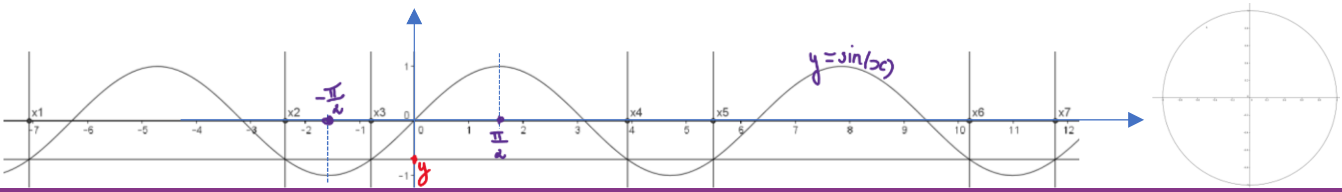
43 **Valeurs particulières :**

$t = sin(y)$ Arcsin	0	1	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\boldsymbol{Arcsin(t) = y}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}$

sin

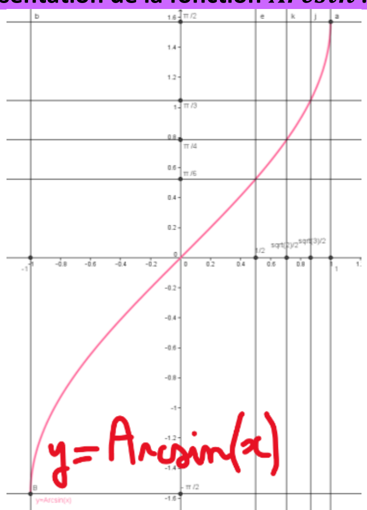
44 Soit $y \in [-1;1]$. Les antécédents de y par sin sont donc tous les réels de la forme $Arcsin(y) + 2k\pi$ tels ou de la forme $\pi - Arcsin(y) + 2k\pi$ tels que $k \in \mathbb{Z}$.
Autrement dit , $y = \sin(x) \Leftrightarrow [\, x \equiv Arcsin(y)[2\pi] \;\; ou \;\; x \equiv \pi - Arcsin(y)[2\pi]]$

45 **Illustration :**



46 **Propriétés :** $\forall x \in [-1\,;1], \cos(Arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

47 **Représentation de la fonction $Arcsin$:**



48 **Théorème :**

1) $Arcsin$ est impaire, continue et strictement croissante sur $[-1,1]$,

2) $Arcsin$ est dérivable que sur $]-1,1[$ et

$$\forall x \in]-1,1[, Arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Autrement dit, $Arcsin$ est une primitive de $\left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$sur $]-1,1[$.

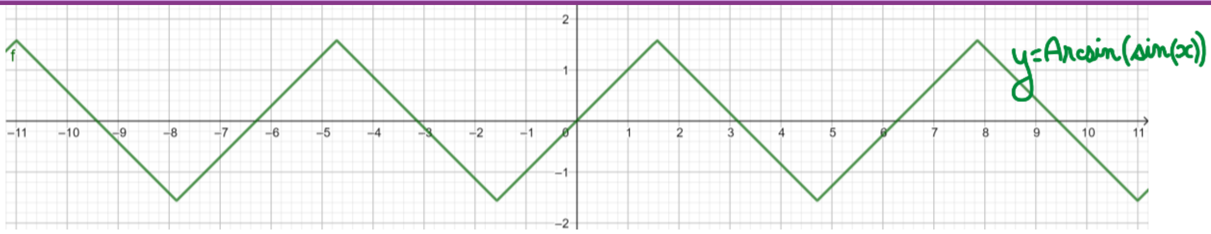
3) $Arcsin$ n'est pas dérivable en 1 ni en -1 et la courbe de $Arcsin$ a deux tangentes verticales aux points d'abscisses 1 et en -1.

4) $Et, \lim\limits_{x\to 0}\frac{Arcsin(x)}{x} = 1, \lim\limits_{x\to 1}\frac{Arcsin(x)-\frac{\pi}{2}}{x-1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to -1}\frac{Arcsin(x)+\frac{\pi}{2}}{x+1} =$

Conséquence : Si u est dérivable sur I et $\forall x \in I, u(x) \in]-1;1[$ alors $Arcsin(u)$ est dérivable sur I et $\forall x \in I,\; (Arcsin(u))'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$.

$x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow Arcsin(\sin(x)) = x$.

La fonction $sin(Arcsin)$ n'est définie que sur $[-1,1]$ et coïncide avec l'identité sur $[-1,1]$: $\forall x \in [-1,1]$, $\sin(\,Arcsin(x)) = x$.



50 **Exercice :** Calculer $Arcsin(sin\frac{23\pi}{5}))$, $\mathrm{Arcsin}\left(cos\left(\frac{117\pi}{7}\right)\right)$.

2. Arccosinus

Cosinus est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0,\pi]$. Donc cos induit une bijection $cos_|$ de $[0,\pi]$ sur $[-1;1]$.

60 **Def** : 1) La fonction $Arccosinus$ est la bijection réciproque de $cos_|$: $\begin{pmatrix}[0,\pi] \to [-1,1] \\ x \mapsto cos(x)\end{pmatrix}$. La fonction $Arccos$ est définie sur $[-1,1]$ et à valeurs dans $[0,\pi]$ par l'équivalence :

$$\begin{cases} y = \cos(x) \\ x \in [0,\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Arccos(y) = x \\ y \in [-1,1] \end{cases}$$

2) Soit $y \in [-1;1]$. Le réel $Arccos(y)$ est donc l'unique réel de $[0,\pi]$ dont le cosinus vaut y .

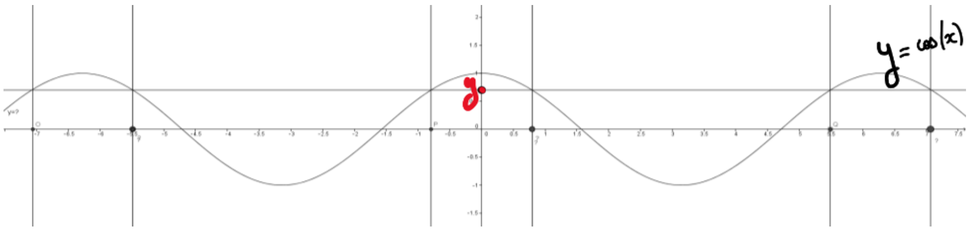
61 **Des valeurs particulières :**

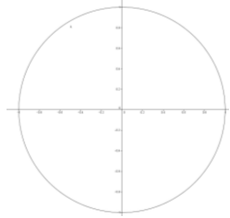
$Arccos$ cos

$\boldsymbol{t} = cos(y)$	0	1	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\boldsymbol{Arccos(t)} = y$	$\frac{\pi}{2}$	0	π	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$

62 Les antécédents de y par cos sont donc tous les réels de la forme $Arccos(y) + 2k\pi$ ou $-Arccos(y) + 2k\pi$ $tels\ que\ k \in \mathbb{Z}$
Autrement dit, $y = \cos(x) \Leftrightarrow x \equiv Arccos(y)[2\pi]$ ou $x \equiv -Arccos(y)[2\pi]$

63 **Illustration :**





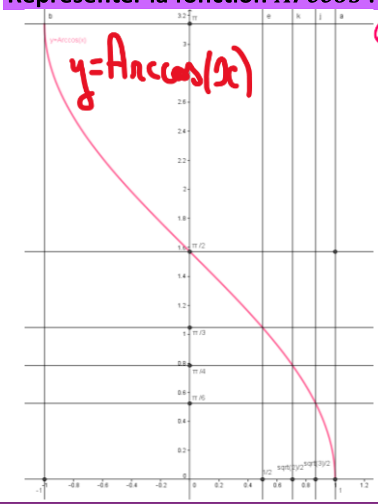
64 **Exercice :** Calculer $Arccos(sin\frac{23\pi}{5}))$

65 **Propriété :**

1. $\forall x \in [-1\,;1], Arccos(-x) = \pi - Arccos(x)$ (la courbe de $Arccos$ est symétrique par rapport au point $A(0,\frac{\pi}{2})$)
2. $\forall x \in [-1\,;1],\ \sin(Arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$
3. $\forall x \in [-1\,;1],\ Arccos(x) + Arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$

66 **Exercice :** Calculer $tan(Arccos\left(\frac{1}{3}\right)))$

67 **Représenter la fonction $Arccos$:**



68 **Théorème** $Arccos$ est continue et strictement décroissante sur $[-1,1]$
$Arccos$ est dérivable uniquement sur $]-1,1[$et

$$\forall x \in]-1,1[, Arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$Arccos$ n'est pas dérivable en 1 ni en -1 et la courbe de $Arccos$ a deux tangentes verticales aux points d'abscisses 1 et en -1.

Ainsi, $\lim \frac{Arccos(x)-\frac{\pi}{2}}{x} = -1$, $\lim \frac{Arccos(x)}{x-1} = -\infty$ et $\lim \frac{Arccos(x)-\pi}{x+1} = -\infty$

69 **Conséquence** : Si u est dérivable sur I et $\forall x \in I, u(x) \in]-1;1[$ alors $Arccos(u)$ est dérivable sur I et $\forall x \in I,\ (Arccos(u))'(x) = \frac{-u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$.

70 **Proposition :** La fonction $Arccos(cos)$ est définie sur $\mathbb{R}$ mais ne coïncide avec l'identité que sur $[0,\pi]$. Autrement dit,

$$x \in [0,\pi] \Leftrightarrow Arccos(\cos(x)) = x$$

Par contre, la fonction $cos(Arccos)$ n'est définie que sur $[-1,1]$ et $\forall x \in [-1,1]$, $\cos(\,Arccos(x)) = x$.

71 **NB** : $Arcsin$ et $Arccos$ sont deux nouvelles fonctions qui ne sont pas dérivables sur tout leur domaine de définition.

3. Arctangente

tan est continue et strict[t] croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Donc, tan induit une bijection $tan_|$de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

72 **Définition** : 1. La fonction $Arctangente$ est la bijection réciproque de $tan_|$: $\left(\begin{array}{l}]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to\mathbb{R} \\ x\mapsto tan(x)\end{array}\right)$. La fonction $Arctan$ est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ par l'équivalence : $\begin{cases} y=\tan(x) \\ x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Arctan(y)=x \\ y\in\mathbb{R}\end{cases}$.

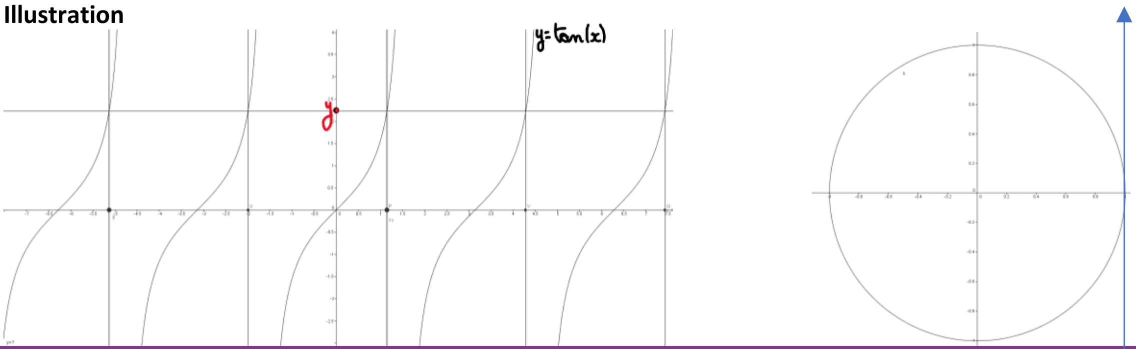
2. Soit $y\in\mathbb{R}$. Le réel $Arctan(y)$ est donc l'unique réel de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ dont la tangente vaut y .

73 **Valeurs particulières** :

$Arctan$	$\boldsymbol{t}=tan(y)$	0	1	-1	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$	tan
	$\boldsymbol{Arctan(t)}=y$	0	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}$	

74 Les antécédents de y par tan sont tous les réels $Arctan(y)+k\pi\ tq\ k\in\mathbb{Z}$ .Autrement dit, $y=\tan(x)\Leftrightarrow x\equiv Arctan(y)[\pi]$.

75 **Illustration**



76 **Application :** Soit $\alpha\ et\ \beta$ deux réels tels que $\alpha^2+\beta^2=1\ et\ \alpha\neq 0$. Alors, $\begin{cases}\cos(x)=\alpha \\ \sin(x)=\beta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\equiv Arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)[2\pi]\ si\ \alpha>0 \\ x\equiv\pi+Arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)[2\pi]\ si\ \alpha<0\end{cases}$

77 **Théorème : 1)** $Arctan$ est impaire, continue, strictement croissante, bornée sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x\to+\infty} Arctan(x)=\frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x\to+\infty} Arctan(x)=-\frac{\pi}{2}$.

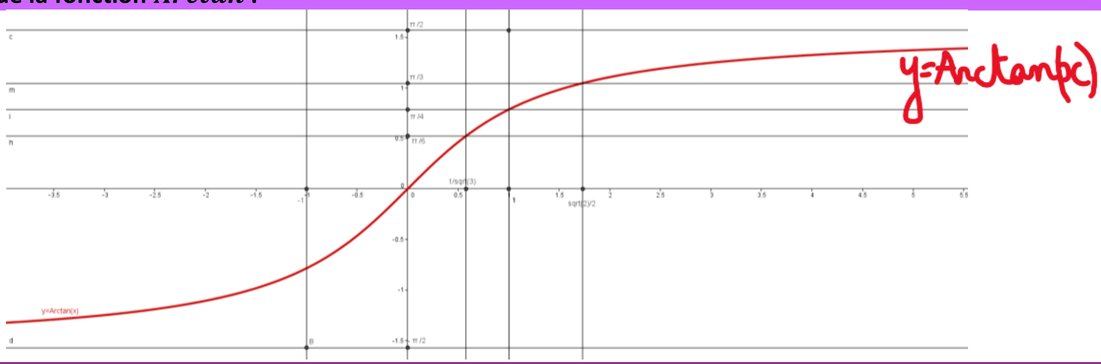
2) $Arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $Arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

Autrement dit, $Arctan$ est une primitive de $\left(x\mapsto\frac{1}{1+x^2}\right)$ sur $\mathbb{R}$.

3) $\lim_{x\to 0}\frac{Arctan(x)}{x}=1$

78 Conséquence : Si u est dérivable sur I alors $Arctan(u)$ est dérivable sur I et $\forall x\in I$, $(Arctan(u))'(x)=\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$.

79 **Représentation de la fonction** $\boldsymbol{Arctan}$ **:**



80 **Proposition** : La fonction $Arctan(tan)$ est définie sur $\mathbb{R}$ mais ne coïncide avec l'identité que sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Autrement dit,

$Arctan(\tan(x))=x\Leftrightarrow x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

Par contre, la fonction $tan(Arctan)$ n'est définie que sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $\tan(Arctan(x))=x$.

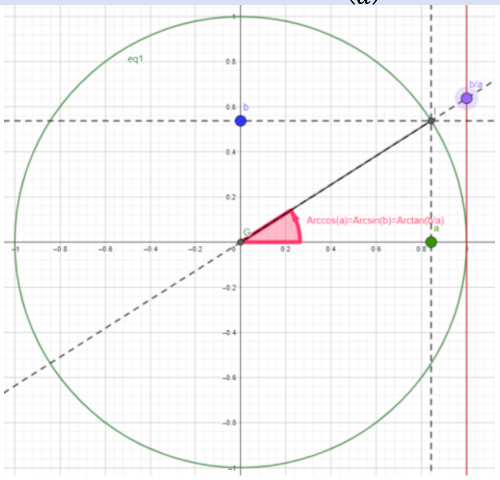
81 **Propriété** : $\forall x\in\mathbb{R}^*, Arctan(x)+Arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\ si\ x>0 \\ -\frac{\pi}{2}\ si\ x<0\end{cases}$.

Autres formules à savoir retrouver : $\forall x \in \mathbb{R}, cos\big(Arctan(x)\big) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\sin\big(Arctan(x)\big) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$\forall x \in]-1,1[\setminus\{0\},\ tan\big(Arccos(x)\big) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ et $\forall x \in]-1,1[,\ tan\big(Arcsin(x)\big) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

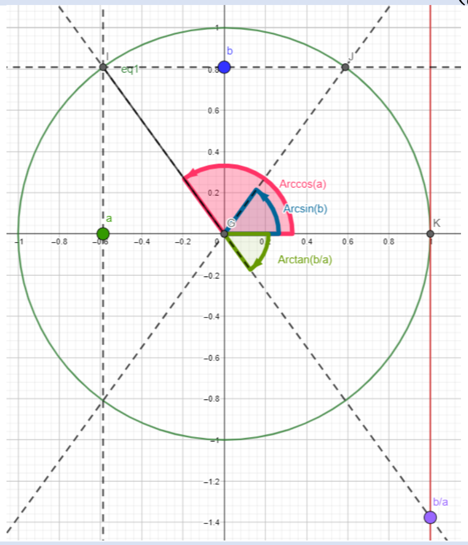
- Soit a et b deux réels strictement positifs tels que $a^2 + b^2 = 1$. Alors l'unique réel $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $\begin{cases}\cos(x) = a \\ \sin(x) = b\end{cases}$ vérifie :

$x = Arccos(a) = Arcsin(b) = Arctan\left(\frac{b}{a}\right)$.



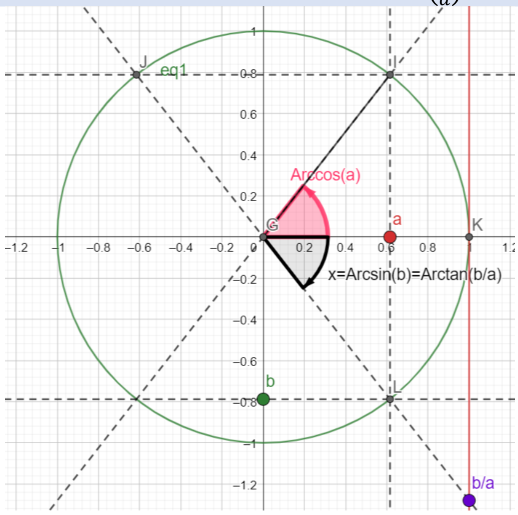
- Soit a et b deux réels tels que: $a < 0$ et $b > 0$ et $a^2 + b^2 = 1$. Alors l'unique réel $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ tel que : $\begin{cases}\cos(x) = a \\ \sin(x) = b\end{cases}$ vérifie :

$x = Arccos(a) = \pi - Arcsin(b) = Arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$.



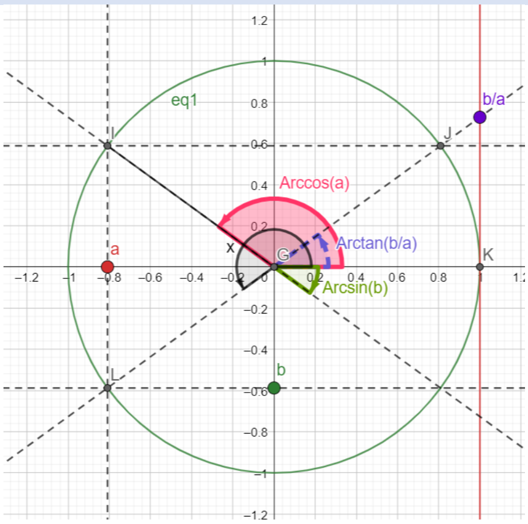
- Soit a et b deux réels tels que: $a > 0$ et $b < 0$ et $a^2 + b^2 = 1$. Alors l'unique réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ tel que : $\begin{cases}\cos(x) = a \\ \sin(x) = b\end{cases}$ vérifie :

$x = -Arccos(a) = Arcsin(b) = Arctan\left(\frac{b}{a}\right)$.



- Soit a et b deux réels tels que: $a < 0$ et $b < 0$ et $a^2 + b^2 = 1$. Alors l'unique réel $x \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $\begin{cases}\cos(x) = a \\ \sin(x) = b\end{cases}$ vérifie :

$x = -Arccos(a) = -\pi - Arcsin(b) = Arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi$.



Equations-inéquations : Soit a et b deux réels.

- Si $(a, b) \in [-1; 1]^2$ alors, $[Arcsin(a) = Arcsin(b) \Leftrightarrow a = b]$ et $[Arcsin(a) < Arcsin(b) \Leftrightarrow a < b]$.
- Si $a \in [-1,1]$et $b \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ alors $[b = Arcsin(a) \Leftrightarrow a = sin(b)]$.
- Si $a \in [-1,1]$ et $b \in \mathbb{R}$ alors $[\ a = sin(b) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/b = Arcsin(a) + 2k\pi$ ou $b = \pi - Arcsin(a) + 2k\pi\ ]$.
- Si $(a, b) \in [-1; 1]^2$ alors $[Arccos(a) = Arccos(b) \Leftrightarrow a = b]$ et $[Arccos(a) < Arccos(b) \Leftrightarrow a > b]$.
- Si $b \in [0, \pi]$ et $a \in [-1; 1]$ alors $[b = Arccos(a) \Leftrightarrow a = cos(b)]$.
- Si $b \in \mathbb{R}$ et $a \in [-1; 1]$ alors $[a = cos(b) \Leftrightarrow b = \pm Arcos(a) + 2k\pi$ tq $k \in \mathbb{Z}]$.
- Si a et b réels alors, $[Arctan(a) = Arctan(b) \Leftrightarrow a = b]$ et $[Arctan(a) < Arctan(b) \Leftrightarrow a < b]$.
- Si $b \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, alors $[b = Arctan(a) \Leftrightarrow a = \tan(b)]$
- Si $b \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2} + p\pi/p \in \mathbb{Z}\}$, alors $[a = \tan(b) \Leftrightarrow b = Arctan(a) + k\pi$ tq $k \in \mathbb{Z}]$.