Programme de colle 7

CHAPITRE 5 Rappels et compléments sur les fonctions.

Cf programme précédent +

Critère de limite du taux d'accroissement

Théorème de dérivation de la bijection réciproque

Chap 6 Dernières fonctions usuelles

Logarithme népérien :

- Définition comme l'unique primitive de $\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ s'annulant en 1.
- Dérivabilité et dérivée, monotonie, limite par taux d'accroissement : $\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t}$.
- Dérivabilité et dérivée de $\varphi : (x \mapsto ln|u(x)|)$ où u dérivable sur un intervalle I et ne s'annule pas sur I.
- Une primitive de ln sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Propriétés algébriques : $\ln(xy), \ln\left(\frac{1}{x}\right), \ln\left(\frac{x}{y}\right), \ln(x^r)$ où $r \in \mathbb{Q}$.
- Inégalités usuelles $\forall x \geq 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ et interprétation géométrique.
- Limites usuelles et premières croissances comparées : $\lim_{x\to 0} \ln(x)$, $\lim_{x\to +\infty} \ln(x)$, $\lim_{x\to 0} x\ln(x)$, $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$.
- Représentation : courbe de ln.

Exponentielle :

- Définition comme la bijection réciproque de ln. Autre notation : $e^x = \exp(x)$.
- Continuité, monotonie , dérivabilité et dérivée, limite par taux d'accroissement : $\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t}$.
- Dérivabilité et dérivée de $\varphi : (x \mapsto e^{u(x)})$ où u dérivable sur un intervalle.
- Une primitive de exp et de $u'(x)e^{u(x)}$.
- Propriétés algébriques : $\exp(x+y), \exp(-x), \exp(x-y), \exp(rx)$ où $r \in \mathbb{Q}, \ln(e^x), e^{\ln(x)}$.
- Inégalités usuelles $\forall x, \exp(x) \geq 1 + x$ et interprétation géométrique.
- Limites usuelles et autres croissances comparées : $\lim_{x\to -\infty} e^x$, $\lim_{x\to +\infty} e^x$, $\lim_{x\to -\infty} xe^x$, $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x}$.
- Représentation : courbe de exp.

Logarithme et exponentielle de base $a \in \mathbb{R}^{+*}\backslash\{1\}$:

- Définitions
- Relation entre log_a et exp_a.
- Représentation : courbe de log_a et exp_a en fonction de a.
- Propriétés algébriques.

Puissances réelles :

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Définition de x^α.
- Propriétés algébriques : $x^{\alpha+\beta}, x^{-\alpha}, x^{\alpha-\beta}, x^{\alpha\beta}, x^\alpha y^\alpha, \frac{x^\alpha}{y^\alpha}, \ln(x^\alpha), (e^x)^\alpha$
- Fonctions $f_\alpha : (x \mapsto x^\alpha)$. Continuité, monotonie, dérivabilité et dérivée, limite par taux d'accroissement : $\lim_{x\to 1} \frac{x^\alpha - 1}{x-1}$ ou $\lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t}$, prolongement par continuité éventuel en 0, dérivabilité en 0 du prolongement, asymptotes éventuelles, branches paraboliques éventuelles.
- Dérivabilité et dérivée de $\varphi : (x \mapsto u(x)^\alpha)$ où u dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
- Primitive de $(x \mapsto x^\alpha)$ et de $\left(x \mapsto u'(x)\left(u(x)\right)^\alpha\right)$.
- Représentation : courbe de f_α.
- Croissances comparées : $\lim_{x\to -\infty} |x|^\alpha e^{\gamma x}$, $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{\gamma x}}{x^\alpha}$, $\lim_{x\to 0} x^\alpha |\ln(x)|^\beta$, $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln^\beta(x)}{x^\alpha}$.
- Définition des fonctions de la forme $u(x)^{v(x)}$. Nouvelles formes indéterminées.

Cosinus et sinus hyperboliques.

- Définition
- Propriétés algébriques
- Propriétés des fonctions : parité, continuité, dérivabilité et fonction dérivée et tracé de la courbe fonctions
- Bijection (induite) et le cas échéant, bijection réciproque.
- Primitive de $\left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$ et de $\left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

TOUS LES ENONCES DES DEFINITIONS, PROPRIETES ET THEOREMES DOIVENT ETRE CONNUS.

Question de cours : énoncer une définition et /ou une propriété de cours

OU

énoncer et démontrer les résultats suivants:.

1. La composée de deux applications surjectives est surjective. Idem avec injective.
2. Si f est bijective de E sur F et g est bijective de F sur G alors $g \circ f$ est bijective de E sur G et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
3. Soit f une application de E dans F. S'il existe une application $g: F \to E$ telle que $f \circ g = id_F$ et $g \circ f = id_E$ alors f est bijective de E sur F et $f^{-1} = g$.
4. Soit f une bijection de I sur $J = f(I)$. Si f est strictement monotone sur I alors f^{-1} est, sur J,de même stricte monotonie que f. Si f est impaire sur I alors f^{-1} est impaire sur J.
5. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$, $\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln(y)$, $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
6. $\forall x > 0, \ln(1 + x) \leq x$ **et** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ **et** $\lim\limits_{x \to 0} x ln(x) = 0$.
7. Les croissances comparées (pour la preuve, on admet $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$) :

$\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^{+*}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)^\alpha}{x^\beta} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} x^\beta |ln(x)|^\alpha = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^\beta}{e^{\gamma x}} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^\beta e^{\gamma x} = 0$.

8. $\forall x \in \mathbb{R}, |sh(x)| \geq |x|$.

Rappeler soigneusement le résultat avant de le démontrer.