DL 5
Autour des bijections

Ex 1 <u>Des composées d'applications</u>

A. Deux résultats de cours

Soit $f: I \to J$ et $g: J \to K$ des applications.

1. Quelle information sur f et/ou g permet de justifier l'existence de $g \circ f$ sur I ? Que signifie cette information ?
2. Montrer que si $g \circ f$ est injective sur I alors f est injective sur I. On utilisera la définition de l'injectivité suivante : φ est injective sur A lorsque $\forall (a, a') \in A^2, [\varphi(a) = \varphi(a') \Longrightarrow a = a']$.
3. Montrer que si $g \circ f$ est surjective de I sur K alors g est surjective de J sur K.

B. APPLICATION :

Soit $f: I \to J$, $g: J \to K$ et $h: K \to L$ des applications telles que : $h \circ g$ bijective de J sur L et $g \circ f$ bijective de I sur K. BUT : prouver que f, g et h sont bijectives.

1. Montrer, en utilisant A, que g est bijective de J sur K. Nous en déduisons que g^{-1} existe et g^{-1} est une bijection de .... sur ....
2. Ecrire f à l'aide de $g \circ f$ et g^{-1}. En déduire, par un résultat de cours, que f est bijective de I sur J.
3. Faire de même pour h.

Ex 2 <u>Des fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.</u>

Soit $a \in \mathbb{C}$ *et* T_a l'application définie sur $\mathbb{C} \backslash \{a + 3i\}$ et à valeurs complexes par : $T_a(z) = \frac{(1-a)z + 2(1-i)}{z - a - 3i}$.

1. Montrer que T_a est constante si et seulement si $a \in \{1 - 2i, -i\}$. Déterminer le cas échéant, la valeur de cette constante.

Désormais , on suppose que le complexe a est distinct de $1 - 2i$ et de$-i$. Autrement dit, T_a n'est pas constante.

2. Montrer que T_a réalise une bijection de $\mathbb{C} \backslash \{a + 3i\}$ sur $\mathbb{C} \backslash \{d\}$, où d est un nombre complexe à préciser et décrire ${T_a}^{-1}$.
3. Montrer qu'il existe un complexe b tel que : ${T_a}^{-1} = T_b$. Vous exprimerez b en fonction de a.
4. On prend ici $a = 2$. U est l'ensemble des complexes de module 1.
   Décrire géométriquement $D = \{M(z)/z \in {\mathrm{T}_a}^{-1} \langle U \rangle\}$ et $K = \left\{M(z)/z \in {T_a}^{-1} \langle \mathrm{i}\mathbb{R} \rangle\right\}$ et $L = \{M(z)/z \in T_a(\mathbb{R})\}$.

Ex 3 <u>Des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.</u>

1. Soit $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$. Montrer que $\forall x \in [0,1], f \circ f(x) = x$. Qu'en déduit-on sur f ?

2. Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que: $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

4. Montrer que f n'est pas injective. On utilisera encore la définition *:* φ est injective sur A lorsque $\forall (a, a') \in A^2, [\varphi(a) = \varphi(a') \Longrightarrow a = a']$.

1) Montrer, sans étudier les variations de f, que $f(\mathbb{R}) = [-1; 1]$. f est-elle surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$?
2) Montrer que f induit une bijection $f_|$ de $[-1,1]$ sur $[-1,1]$ et déterminer une expression de g^{-1}.