# Corrigé DL 3

**Ex 1 Tracé de courbes**

A. Soit $a, b$ et $c$ des réels tels que $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$ .

On pose pour tout réel $x$, $P(x) = \underbrace{ax^2 + bx + c}_{forme\ développée} \underbrace{=}_{d'après\ le\ cours} \underbrace{a(x-\alpha)^2 + \beta}_{forme\ canonique}$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ $et\ \beta = -\frac{\Delta}{4a}$

1. On suppose $a > 0$.
   a. Sans utiliser la dérivation, expliquer pourquoi $P$ atteint son minimum en $\alpha$ et donner la valeur de ce minimum.
   b. Expliquer comment tracer la courbe de $P$ à partir de la courbe de $(x \mapsto x^2)$.
   c. En déduire le tableau de variation de $P$.
   d. Quel est l'effet sur la courbe d'une augmentation (resp. diminution) de $a$ ? Même question avec $\alpha$, puis $\beta$?
   1ere - Simulation de tir de basket (ac-paris.fr)
   e. Tracer la courbe de $P$ en distinguant les cas $\Delta > 0, \Delta = 0$ $et$ $\Delta < 0$ et en indiquant $\alpha$ $et$ le minimum ( avec valeur ) de $P$, les racines éventuelles de $P$.
2. On suppose $a < 0$. Répondre aux questions précédentes en les adaptant à ce cas.

B. Expliquer comment passer de la courbe de $sin$ à celle de $f: (x \mapsto 3\sin(2x))$ puis celle de $g: \left(x \mapsto 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

**1.a.** $\forall x, a(x-\alpha)^2 \geq 0$ $donc$ $P(x) \geq \beta = P(\alpha)$. Par conséquent, $P$ atteint son minimum $\beta$ en $\alpha$ .

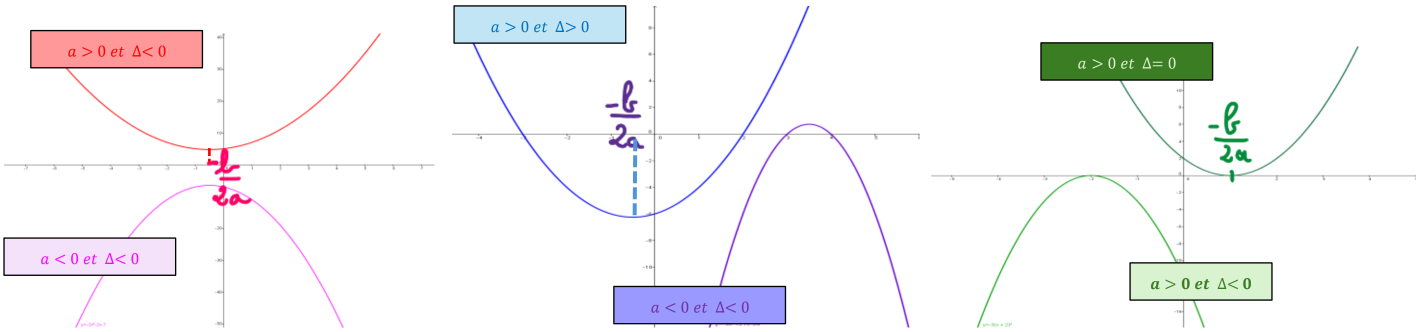
1.b. Soit $f: (x \mapsto x^2)$.

$$Cf \xrightarrow{\substack{translation\ de\\ vecteur\ \alpha\vec{\imath}}} C_{(x \mapsto (x-\alpha)^2)} \xrightarrow{\substack{dilatation\ si\ a>1\\ et\ retractation\ si\ a<1\\ verticale\\ de\ rapport\ a}} C_{(x \mapsto a(x-\alpha)^2)} \xrightarrow{\substack{translation\ de\\ vecteur\ \beta\vec{\jmath}}} C_P.$$

1.c. $C_P$ est donc une parabole comme $Cf$ et son minimum est le point $A(\alpha, \beta)$. Par conséquent, $P$ est strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty, \alpha]$.

1.d. Le paramètre $a$ fait varier l'inclinaison des pentes de la parabole : plus a grandit, plus la parabole monte vite vers l'infini.
Les variations du paramètre $\alpha$ font décaler $C_P$ horizontalement. Les variations du paramètre $\beta$ font décaler $C_P$ verticalement.

1.c.




**Ex 2** Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(a) = \prod_{k=0}^{n} cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$.

1. On pose $u_n = sin\left(\frac{a}{2^n}\right) P_n(a)$. Montrer que la suite $(u_n)$ est géométrique.

En déduire la limite de $P_n(a)$ quand $n \to +\infty$. (on utilisera la limite usuelle : $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin(t)}{t}$) .

1. $Soit\ n \in \mathbb{N}^*$.

$$u_n = sin\left(\frac{a}{2^n}\right) P_n(a) = sin\left(\frac{a}{2^n}\right) \prod_{k=0}^{n} cos\left(\frac{a}{2^k}\right) = sin\left(\frac{a}{2^n}\right) cos\left(\frac{a}{2^n}\right) \prod_{k=0}^{n-1} cos\left(\frac{a}{2^k}\right) \overset{\substack{\frac{1}{2}\sin(2X)=\sin(X)\cos(X)\\ avec\ X=\frac{a}{2^n}\\ donc\ 2X=\frac{a}{2^{n-1}}}}{\widehat{=}} \frac{1}{2} sin\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right) \prod_{k=0}^{n-1} cos\left(\frac{a}{2^k}\right) = \frac{1}{2} u_{n-1}.$$

Par suite, $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n u_0$ $i.e.$ $sin\left(\frac{a}{2^n}\right) P_n(a) = \left(\frac{1}{2}\right)^n sin(a)\cos(a) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} sin(2a)$.

2. **<u>Ou bien $a = 0$</u>** alors $P_n(0) = \prod_{k=0}^{n} cos(0) = 1$.

**<u>Ou bien $a \neq 0$.</u>** Alors , comme $\forall n, \frac{a}{2^n} \neq 0$ $et$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a}{2^n} = 0$, pour $n$ assez grand , $\frac{a}{2^n} \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[ \cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc pour $n$ assez grand, $sin\left(\frac{a}{2^n}\right) \neq 0$ et par suite,

pour $n$ assez grand, $P_n(a) = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} sin(2a)}{sin\left(\frac{a}{2^n}\right)} = \dfrac{\frac{a}{2^n}}{sin\left(\frac{a}{2^n}\right)} \times \underbrace{\frac{sin(2a)}{2a}}_{\substack{facteur\\ inépendant\ de\ n\\ donc\ constant\ quand\\ n \to +\infty.}}$ .

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a}{2^n} = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} \frac{\sin(X)}{X} = 1$ donc $\lim\limits_{X \to 0} \underbrace{\frac{X}{\sin(X)}}_{\substack{inverse\ de\\ \frac{\sin X}{X}}} = \frac{1}{1} = 1$ $et$ par composition, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\frac{a}{2^n}}{sin\left(\frac{a}{2^n}\right)} = 1$.

J'en conclus qie $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n(a) = \frac{\sin(2a)}{2a}$.

**<u>Ainsi,</u>** $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n(a) = \begin{cases} \frac{\sin(2a)}{2a} & si\ a \neq 0 \\ 1\ si\ a = 0 \end{cases}$.

**Ex 3**

**1.** Trouver deux réels $a$ et $b$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, 4x^4 + 1 = (2x^2 + ax + 1)(2x^2 + bx + 1)$.

**2.** En déduire la limite quand $n \to +\infty$ de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{4k^4+1}$.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, (2x^2 + ax + 1)(2x^2 + bx + 1) = 4x^4 + (2b + 2a)x^3 + (4 + ab)x^2 + (a + b)x + 1$. Donc pour que $\forall x \in \mathbb{R}, 4x^4 + 1 = (2x^2 + ax + 1)(2x^2 + bx + 1)$, il suffit de choisir $a$ et $b$ tels que $\begin{cases} a + b = 0 \\ 4 + ab = 0 \end{cases}$ $i.e.$ $\begin{cases} b = -a \\ 4 - a^2 = 0 \end{cases}$ $i.e..$ $\begin{cases} b = -2 \\ a = 2 \end{cases}$ $ou$ $\begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases}$.
   $Ainsi,$ $\forall x \in \mathbb{R}, 4x^4 + 1 = (2x^2 + 2x + 1)(2x^2 - 2x + 1)$.
2. Posons $f(x) = \frac{x}{4x^4+1} = \frac{x}{(2x^2+2x+1)(2x^2-2x+1)}$. D'après le cours, il existe a,b,c et d réels tels que :

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{(2x^2+2x+1)(2x^2-2x+1)} = \frac{ax+b}{(2x^2+2x+1)} + \frac{cx+d}{(2x^2-2x+1)}$.

Alors, $\forall x \in \mathbb{R}, xf(x) = \frac{x^2}{(2x^2+2x+1)(2x^2-2x+1)} = \frac{ax^2+bx}{(2x^2+2x+1)} + \frac{cx^2+dx}{(2x^2-2x+1)}$. Donc, $\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0 = a + c$. Donc $c = -a$.

De plus, $f(0) = 0 = b + d$. Donc, $d = -b$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{(2x^2+2x+1)(2x^2-2x+1)} = (ax + b)\left[\frac{1}{(2x^2+2x+1)} - \frac{1}{(2x^2-2x+1)}\right] = (ax + b)\left[\frac{-4x}{(2x^2+2x+1)(2x^2-2x+1)}\right]$.

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, x = (ax + b)(-4x)$. Donc $a = 0$ et $b = -\frac{1}{4}$ conviennent .

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{4x^4+1} = -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(2x^2+2x+1)} - \frac{1}{(2x^2-2x+1)}\right]$.

Par suite, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{4k^4+1} = \sum_{k=1}^{n} -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(2k^2+2k+1)} - \frac{1}{(2k^2-2k+1)}\right] = -\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(2k(k+1)+1)} - \frac{1}{(2(k-1)k+1)}\right]$

$S_n \underbrace{=}_{\substack{en\ posant \\ u_k=\frac{1}{(2(k-1)k+1)}}} -\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}[u_{k+1} - u_k] = -\frac{1}{4}[u_{n+1} - u_1] = -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(2n(n+1)+1)} - 1\right]$.

**Ex 4** Montrer que les images ponctuelles des solutions de l'équation $(e)$ : $(z + 1)^n = (iz - 1)^n$ d'inconnue $z$ complexe, sont toutes alignées. Déterminer ces solutions.

1. Soit $z$ une solution de $(e)$ et $M$ le point d'affixe $z$. Alors, $(z + 1)^n = (iz - 1)^n$ donc $|(z + 1)^n| = |(iz - 1)^n|$ donc $|z + 1|^n = |iz - 1|^n$. Comme $|z + 1|$ $et$ $|iz - 1|$ sont des réels positifs qui ont la même puissance $n$, il sont égaux ( car la fonction $(x \mapsto x^n)$ est injective sur $\mathbb{R}^+$). Alors, $|z + 1| = |iz - 1| = \left|i\left(z - \frac{1}{i}\right)\right| = |i|\left|z - \frac{1}{i}\right| = \left|z - \frac{1}{i}\right| = |z + i|$. Introduisons les points $B$ d'affixe $-1$ et le point $C$ d'affixe $-i$. Alors $MB = |z + 1| = |z + i| = MC$. Donc,$M$ est sur la médiatrice de $[B, C]$.
   Ainsi, tous les points images ponctuelles des solutions de $(e)$ sont alignées sur la médiatrice $D$ de $[B, C]$.
2. (-1) n'est pas solution de $(e)$. Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{-1\}$.

$z\ sol°de\ (e) \Leftrightarrow (z + 1)^n = (iz - 1)^n \Leftrightarrow \frac{(iz-1)^n}{(z+1)^n} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{iz-1}{z+1}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \frac{iz-1}{z+1}$ $est\ une\ racine\ nième\ de\ l'unité$

$$\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n - 1]\!]/\frac{iz - 1}{z + 1} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n - 1]\!]/iz - 1 = e^{i\frac{2k\pi}{n}}(z + 1) \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n - 1]\!]/(i - e^{i\frac{2k\pi}{n}})z = 1 + e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

Or, $i - e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 0 \Leftrightarrow e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \frac{2k\pi}{n} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow \exists p \in \frac{\mathbb{Z}}{k} = \frac{n}{4} + pn \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{car\ k\ compris \\ entre\ 0\ et\ n-1}} k = \frac{n}{4}$.

De plus, lorsque $k = \frac{n}{4}$, $\left(i - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)z = 0 \neq 1 + i = 1 + e^{i\frac{2k\pi}{n}}$. Donc $k = \frac{n}{4}$ n'est pas possible.

$$\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n - 1]\!]\backslash\left\{\frac{n}{4}\right\}, z = \frac{1 + e^{i\frac{2k\pi}{n}}}{\left(i - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)} = \frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}}}{i\left(1 + ie^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)} = \frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}}}{i\left(1 + e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)} = \frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}}}{i\left(2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{n}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{n}\right)}\right)}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}}}{e^{i\frac{\pi}{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{n}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{n}\right)}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{n}\right)}e^{-i3\frac{\pi}{4}} = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{n}\right)}e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

Ainsi, $Sol(e) = \left\{\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{n}\right)}e^{i\frac{5\pi}{4}} / k \in [\![0, n - 1]\!]\backslash\left\{\frac{n}{4}\right\}\right\}$.

Remarque : Posons $z_k = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{n}\right)}e^{i\frac{5\pi}{4}}$. On retrouve que tous les points $M_k(z_k)$, images des solutions de $(e)$, sont alignés sur $D$. En effet,

Si $\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{n}\right)} > 0$ alors $\arg(z_k) = \frac{5\pi}{4}[2\pi]$. Donc, $M_k \in D$.

Si $\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{n}\right)} < 0$ alors $z_k = -\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{n}\right)}e^{-i\pi}e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{n}\right)}e^{i\left(\frac{5\pi}{4}-\pi\right)}$ donc $\arg(z_k) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$. Donc, $M_k \in D$.

Si $\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{n}\right)} = 0$ alors $z_k = 0$ $et$ $M_k = O$. Donc, $M_k \in D$.