Préparation DC 7

Connaitre parfaitement :

- Les trois définitions d'une application injective
- Les deux définitions d'une application surjective
- Les deux définitions d'une application bijective et de la bijection réciproque.
- Le critère de limite du taux d'accroissement
- Le théorème des bijections continues et strictement monotones
- Le théorème de dérivation de la bijection réciproque
- Le théorème « monotonie et dérivation »
- Les courbes des fonctions usuelles étudiées cette semaine (sans Arcsin, Arccos et Arctan).

Savoir démontrer :

1. sh est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}, sh^{-1}(t) = Argsh(t) = \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)$. $Argsh$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}, Argsh'(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$.
2. ch induit une bijection $ch_|$ de $\mathbb{R}^+$ sur $[1;+\infty[$ et $\forall t \in [1;+\infty[, {ch_|}^{-1}(t) = Argch(t) = \ln\left(t + \sqrt{t^2-1}\right)$. $Argch$ est dérivable sur $]1;+\infty[$ et $\forall t \in]1;+\infty[, Argch'(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$.

Savoir refaire :

Ex 6 Montrer que pour tout réel x de $]0,1[$, $x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$.

Ex 10 Déterminer tous les réels a tels que $\forall x \in \mathbb{R}, ch(x) \leq e^{ax^2}$.

Ex 12 Soit $t \in]0;1[$. Pour tout $x \in]0;1[$, on pose $f_t(x) = min\{n \in \mathbb{N}^* / x^n \leq t\}$.
Montrer que pour tout $x \in]0\,;1[, \frac{\ln(t)}{\ln(x)} \leq f_t(x) < \frac{\ln(t)}{\ln(x)} + 1$. En déduire $\lim\limits_{x \to 1^-} (1-x) f_t(x)$.