Programme de colle 8

Chap 6 Dernières fonctions usuelles

Logarithme népérien :

- Définition comme l'unique primitive de $\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ s'annulant en 1.
- Dérivabilité et dérivée, monotonie, limite par taux d'accroissement : $\lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t}$.
- Dérivabilité et dérivée de $\varphi : (x \mapsto ln|u(x)|)$ où u dérivable sur un intervalle I et ne s'annule pas sur I.
- Une primitive de ln sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Propriétés algébriques : $\ln(xy), \ln\left(\frac{1}{x}\right), \ln\left(\frac{x}{y}\right), \ln(x^r)$ où $r \in \mathbb{Q}$.
- Inégalités usuelles $\forall x \geq 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ et interprétation géométrique.
- Limites usuelles et premières croissances comparées : $\lim_{x \to 0} \ln(x)$, $\lim_{x \to +\infty} \ln(x)$, $\lim_{x \to 0} x\ln(x)$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$.
- Représentation : courbe de ln.

Exponentielle :

- Définition comme la bijection réciproque de ln. Autre notation : $e^x = \exp(x)$.
- Continuité, monotonie , dérivabilité et dérivée, limite par taux d'accroissement : $\lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t}$.
- Dérivabilité et dérivée de $\varphi : (x \mapsto e^{u(x)})$ où u dérivable sur un intervalle.
- Une primitive de exp et de $u'(x)e^{u(x)}$.
- Propriétés algébriques : $\exp(x+y), \exp(-x), \exp(x-y), \exp(rx)$ où $r \in \mathbb{Q}, \ln(e^x), e^{\ln(x)}$.
- Inégalités usuelles $\forall x, \exp(x) \geq 1 + x$ et interprétation géométrique.
- Limites usuelles et autres croissances comparées : $\lim_{x \to -\infty} e^x$, $\lim_{x \to +\infty} e^x$, $\lim_{x \to -\infty} xe^x$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}$.
- Représentation : courbe de exp.

Logarithme et exponentielle de base $a \in \mathbb{R}^{+*} \backslash \{1\}$:

- Définitions
- Relation entre log_a et exp_a.
- Représentation : courbe de log_a et exp_a en fonction de a.
- Propriétés algébriques.

Puissances réelles :

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Définition de x^α.
- Propriétés algébriques : $x^{\alpha+\beta}, x^{-\alpha}, x^{\alpha-\beta}, x^{\alpha\beta}, x^\alpha y^\alpha, \frac{x^\alpha}{y^\alpha}, \ln(x^\alpha), (e^x)^\alpha$
- Fonctions $f_\alpha : (x \mapsto x^\alpha)$. Continuité, monotonie, dérivabilité et dérivée, limite par taux d'accroissement : $\lim_{x \to 1} \frac{x^\alpha - 1}{x - 1}$ ou $\lim_{t \to 0} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t}$, prolongement par continuité éventuel en 0, dérivabilité en 0 du prolongement, asymptotes éventuelles, branches paraboliques éventuelles.
- Dérivabilité et dérivée de $\varphi : (x \mapsto u(x)^\alpha)$ où u dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
- Primitive de $(x \mapsto x^\alpha)$ et de $\left(x \mapsto u'(x)\big(u(x)\big)^\alpha\right)$.
- Représentation : courbe de f_α.
- Croissances comparées : $\lim_{x \to -\infty} |x|^\alpha e^{\gamma x}$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\gamma x}}{x^\alpha}$, $\lim_{x \to 0} x^\alpha |\ln(x)|^\beta$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^\beta(x)}{x^\alpha}$.
- Définition des fonctions de la forme $u(x)^{v(x)}$. Nouvelles formes indéterminées.

Cosinus et sinus hyperboliques.

- Définition
- Propriétés algébriques
- Propriétés des fonctions : parité, continuité, dérivabilité et fonction dérivée et tracé de la courbe.
- $\forall x, |x| \leq |sh(x)| < ch(x)$.
- Bijection (induite) et le cas échéant, bijection réciproque.
- Primitive de $\left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$ et de $\left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

Arcsinus, Arccosinus et Arctangente.

- Définition de chacune de ces fonctions.
- Valeurs particulières.

- Résolution des équations $y = sin(x)$, $y = \cos(x)$ et $y = \tan(x)$ $d'inconnue\ x\ réelle$.
- Propriétés algébriques : simplification de
  - $\sin(Arsin(x))$ et $Arcsin(\sin(x))$
  - $\cos(Arccos(x))$ et $Arccos(\cos(x))$
  - $\tan(Arctan(x))$, $Arctan(\tan(x))$.
  - $Arcsin(-x), Arccos(-x), Arctan(-x)$
  - $Arcsin(x) + Arccos(x)$
  - $Arctan(x) + Arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.
  - $\cos\ (Arcsin(x))$ et $\sin(Arccos(x))$
  - $\cos(Arctan(x))$ et $\sin(Arctan(x))$
  - $\tan(Arcsin(x))$ et $\tan\ (Arccos(x))$
- Propriétés des fonctions :
  - domaine de définition
  - parité, symétrie de la courbe
  - continuité
  - monotonie
  - dérivabilité et expression des dérivées
  - représentation.
- Courbe des fonctions $Arcsin$, $Arccos$, $Arctan$.
- Primitive de $\left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ et de $\left(x \mapsto \frac{1}{1+x^2}\right)$.
- Dérivée de $Arccos(u(x))$, de $Arcsin(u(x))$ et de $Arctan(u(x))$.

TOUS LES ENONCES DES DEFINITIONS, PROPRIETES ET THEOREMES DOIVENT ETRE CONNUS.

Question de cours : énoncer une définition et /ou une propriété de cours

OU

énoncer et démontrer les résultats suivants:.

1. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+*}, \forall n \in \mathbb{N}^*$,
   - ✓ $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
   - ✓ $\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln(y)$
   - ✓ $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
2. Les premières croissances comparées : $\forall x > 0, \ln(1+x) \leq x$. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} x ln(x) = 0$.
3. Les croissances comparées (pour la preuve, on admet $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$) :

   $\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^{+*}$,
   - ✓ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)^\alpha}{x^\beta} = 0$
   - ✓ $\lim\limits_{x \to 0} x^\beta |\ln(x)|^\alpha = 0$
   - ✓ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^\beta}{e^{\gamma x}} = 0$
   - ✓ $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^\beta e^{\gamma x} = 0$
4. Enoncer et démontrer le caractère bijectif de sh - Déterminer l'expression de sa bijection réciproque et de la dérivée de cette bijection réciproque.
5. Définition (TBCSM) des fonctions de $Arcsin$, $Arccos$ et $Arctan.$, dérivabilité (TDBR) de ces fonctions et expression de leur dérivée.
6. Compléter et démontrer : $\forall x \in \cdots, Arcsin(x) + Arccos(x) = \cdots$ et $\forall x \in \cdots, Arctan(x) + Arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \cdots$
7. Compléter et démontrer :
   - ✓ $\forall x \in \cdots, \cos(Arcsin(x)) = \cdots$ et $\sin(Arccos(x)) = \cdots$
   - ✓ $\forall x \in \cdots, \cos\ (Arctan(x)) = \cdots$ et $\sin\ (Arctan(x)) = \cdots$
   - ✓ $\forall x \in \cdots, \tan\ (Arccos(x)) = \cdots$ et $\forall x \in \cdots, \tan\ (Arcsin(x)) = \cdots$

+ savoir tracer rapidement ET précisément (tangentes particulières , asymptotes et branches paraboliques, points limites) la courbe de chacune des fonctions usuelles.