Préparation DC 8

Fonctions usuelles : $(x \mapsto x^K)$ $tq\ K \in \mathbb{Q}, sin\ , cos\ et\ tan,\ ln\ , exp,\ (x \mapsto x^\alpha)\ tq\ \alpha\ réel\ ,$ $(x \mapsto a^x)\ tq\ a \in]0,1[\cup]1.+\infty[,\ ch,\ sh,\ Arcsin,\ Arccos,\ Arctan.$

Connaitre parfaitement et notamment pour les fonctions $Arcsin$, $Arccos$ et $Arctan$:

- la définition de chacune de ces fonctions usuelles
- les valeurs particulières de ces fonctions usuelles
- les courbes précises (avec point particulier, domaine de départ et d'arrivée, tangentes particulières, asymptotes et branches infinies, points limites) de toutes les fonctions usuelles
- les dérivées des fonctions usuelles
- les limites usuelles par taux d'accroissement et les croissances comparées
- les propriétés algébriques de ces fonctions usuelles

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha \in \mathbb{R},$

$e^{x+y} = e^x e^y$

$e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$

$(e^x)^\alpha = e^{\alpha x}$

$\ln(e^x) = x$

$ch^2(x) - sh^2(x) = 1$

$ch(2x) = 1 + 2sh^2(x) = 2ch^2(x) - 1$

$sh(2x) = 2sh(x)ch(x)$

$ch(x+y) = ch(x)ch(y) + sh(x)sh(y)$

$ch(x-y) = ch(x)ch(y) - sh(x)sh(y)$

$sh(x+y) = sh(x)ch(y) + ch(x)sh(y)$

$\forall (x,y) \in {\mathbb{R}^{+*}}^2, \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,$

$e^{\ln(x)} = x$

$\ln(x) = \ln(x) + \ln(y)$

$\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

$\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$

$\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$

$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$

$\left(\dfrac{x}{y}\right)^\alpha = \dfrac{x^\alpha}{y^\alpha}$

$x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$

$x^\alpha x^{-\beta} = x^{\alpha-\beta}$

$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$

$\forall x \in [-1;1],$

$Arcsin(-x) = -Arcsin(x)$

$Arcccos(-x) = \pi - Arccos(x)$

$Arccos(x) + Arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$

$\sin(Arccos(x)) = \sqrt{1-x^2} = \cos(Arcsin(x))$

$sin(\mathrm{Arcsin}(x)) = x$

$cos(\mathrm{Arccos}(x)) = x$

$\forall x \in \mathbb{R},$

$tan(\mathrm{Arctan}(x)) = x$

$Arccos(cos(x)) = x \Leftrightarrow x \in [0,\pi]$

$Arcsin(sin(x)) = x \Leftrightarrow x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

$Arctan(tan(x)) = x \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$Arctan(-x) = -Arctan(x)$

$Arctan(x) + Arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\ si\ x > 0 \\ -\frac{\pi}{2}\ si\ x < 0 \end{cases}.$

Savoir compléter et démontrer :

$\sin(x) = y \Leftrightarrow$....................

$\cos(x) = y \Leftrightarrow$....................

$\tan(x) = y \Leftrightarrow$....................

$\forall x \in \cdots, cos(Arctan(x)) = \cdots$

$\forall x \in \cdots, sin(Arctan(x)) = \cdots$

$\forall x \in \cdots, tan(Arcsin(x)) = \cdots$

$\forall x \in \cdots, tan(Arccos(x)) = \cdots$

Sup PCSI - Mathématiques- Mardi 1 décembre 2019

Exemple de DC

1. Compléter et tracer la courbe de f avec précision : valeurs et tangentes particulières, branches infinies.

$\boldsymbol{f : (x \mapsto ln(x))}$ $Df =$ .... $et\ Df' =$................................. $\forall x \in$..................., $f'(x) =$..................	$\boldsymbol{f : (x \mapsto x^{-\pi} =}$**.................)** $Df =$ .... $et\ Df' =$................................. $\forall x \in$..................., $f'(x) =$..................
$\boldsymbol{f : (x \mapsto tan(x) =}$**...........)** $Df =$ .... $et\ Df' =$................................. $\forall x \in$..................., $f'(x) =$.................	$\boldsymbol{f : (x \mapsto \pi^x =}$**.......)** $Df =$ .... $et\ Df' =$................................. $\forall x \in$..................., $f'(x) =$.................
$\boldsymbol{f : (x \mapsto \sqrt[5]{x})}$ $Df =$ .... $et\ Df' =$................................. $\forall x \in$..................., $f'(x) =$..................	$\boldsymbol{f : (x \mapsto}$ $\boldsymbol{Arccos(x) =}$**..)** $Df =$ .... $et\ Df' =$................................. $\forall x \in$..................., $f'(x) =$..................
$\boldsymbol{f : (x \mapsto}$ $\boldsymbol{Arctan(x) =}$**...)** $Df =$ .... $et\ Df' =$................................. $\forall x \in$..................., $f'(x) =$..................	$\boldsymbol{f : (x \mapsto sh(x) =}$**....................)** $Df =$ .... $et\ Df' =$................................. $\forall x \in$..................., $f'(x) =$..................

2. Compléter les phrases suivantes :

1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha =$............................ et $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha =$............................

2) Soit $\alpha \in$...... et $\beta \in$......et $a \in$............. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} \overset{CC}{\cong}$................. et $\lim\limits_{x\to\cdots} x^\alpha |\ln(x)|^\beta \overset{CC}{\cong} 0$.

3) $\forall (x,y) \in$.... , $sh(x+y) =$................................ et $ch(2x) =$......................... =........................=...................... .

4) Soit $y \in$................. $et\ x \in \mathbb{R}$. Alors, $y = ch(x) \Leftrightarrow$.. .

5) Soit $y \in \mathbb{R}\ \ et\ x \in \mathbb{R}$. Alors, $y = sh(x) \Leftrightarrow$.. .

6) Soit $y \in [-1;1]\ et\ x \in \mathbb{R}$. Alors, $y = \sin(x) \Leftrightarrow$.. .

7) Soit $y \in$ .... et $x \in$................ Alors, $y = Arctan(x) \Leftrightarrow$.. .

8) $Arctan(\sqrt{3}) =$...................... , $Arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$................ et $Arccos\left(-\frac{1}{2}\right) =$.......................... .

9) $\forall x \in$................., $Arctan\left(\frac{1}{x}\right) =$...............................

10) $\forall x \in$................., $Arccos(x) = \frac{\pi}{2} -$.....................

11) $\forall x \in$................., $cos(Arcsin(x)) =$...............................

$\forall x \in$................., $tan(Arccos(x)) =$...............................

$\forall x \in$................, $sin(Arctan(x)) =$...............................

3. Donner trois expressions du réel $x \in [0, 2\pi[$ tel que $\begin{cases} cos(x) = -\frac{1}{4} \\ sin(x) = -\frac{\sqrt{15}}{4} \end{cases}$.

$x =$..........................
=...........................
=...........................