Calcul intégral- Recherche de primitive.

1Définition : Soit f une fonction définie sur un domaine D de $\mathbb{R}$ et à valeurs **complexes.** Soit $a \in D$.

1. $\forall x \in D, f(x) = Re\big(f(x)\big) + iIm\big(f(x)\big)$. On définit $Re(f)\colon \big(x \mapsto Re\big(f(x)\big)\big)$ et $Im(f)\colon (x \mapsto Im(f(x))$ les fonctions partie réelle et partie imaginaire de f. Ce sont deux fonctions définies sur D et à valeurs **réelles.**
2. Soit f une fonction définie sur un domaine D de $\mathbb{R}$ et à valeurs **complexes.** Soit L un complexe et a un point ou un bord de D *non isolé*.
3. f est bornée sur D lorsqu'il existe un réel M tel que : $\forall x \in D, |f(x)| \leq M$.
4. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ lorsque $\lim\limits_{x \to a} Re(f)(x) = Re(L)$ et $\lim\limits_{x \to a} Im(f)(x) = Im(L)$.
5. f est continue en a (resp. sur D) lorsque $Re(f)$ et $Im(f)$ sont continues en a (resp. sur D) .
6. f est dérivable en a (resp. sur D) lorsque $Re(f)$ et $Im(f)$ sont dérivables en a (resp. sur D)
7. et $f\,' = (Ref)' + i(Imf)'$. Autrement dit , $\forall x \in D, Re\big(f'(x)\big) = (Ref)'(x) et\ Im\big(f'(x)\big) = (Imf)'(x)$.
8. Une primitive de f sur D est toute fonction F dérivable sur D telle que $\forall x \in D, F'(x) = f(x)$, ;autrement dit lorsque sur D, $Re(F)$ est une primitive de $Re(f)$ et $Im(F)$ est une primitive de $Im(f)$.

2Exemples à connaitre :

1. Soit a un complexe et $f\colon (t \mapsto e^{at})$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = ae^{at}$

et si $a \neq 0$ alors $F\colon (t \mapsto \frac{1}{a}e^{at})$ est une primitive de f.

2. Soit φ une fonction dérivable sur D à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $f\colon (t \mapsto e^{\varphi(t)})$.

Alors f est dérivable sur D et $\forall t \in D, f'\,(t) = \varphi'(t)e^{\varphi(t)}$.

I Généralités (Rappels)

3Définition : Soit a et b deux réels tels que $a < b$. L'intégrale d'une fonction $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ est l'aire algébrique $^{(*)}$de la surface délimitée par la courbe de f , l'axe des abscisses , les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$. Cette aire est notée $\int_a^b f(t)dt$ ou $\int_{[a,b]} f$ (fig1). La fonction que l'on intègre s'appelle **l'intégrande.**

4NB : 1)L'aire géométrique de la même surface est $\int_a^b |f(t)|dt$.

2)L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ ne dépend pas de t , $\int_a^b f(t)dt$ dépend de f de a et de b. La variable t est dite muette, $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(\theta)d\theta$. Cette intégrale dépend de l'expression de f, de a et de b.

2) D'où vient cette notation (fig2): dx signifie une petite variation de x (ici sur l'axe des abscisses) .

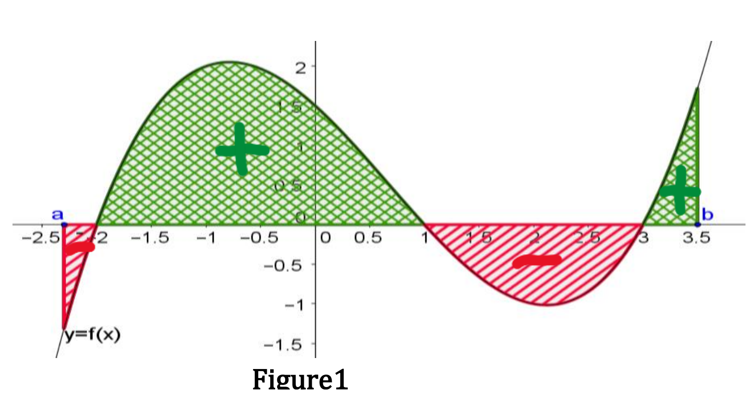


Figure1

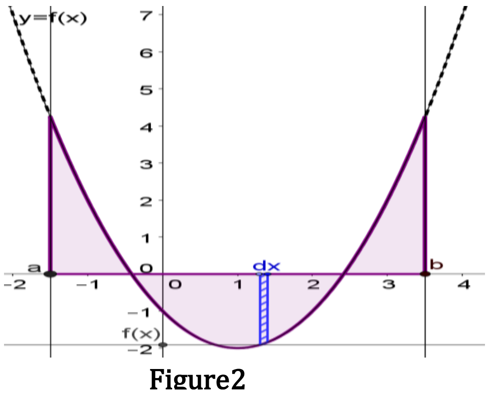


Figure2

Comme f est continue, f varie peu lorsque x varie peu . On peut donc approximer f par $f(x)$ lors de la variation de x entre x et $x + dx$ et ainsi $f(x)dx$ est une approximation de l'aire algébrique hachurée. On va sommer ces aires algébriques pour obtenir l'aire globale : la somme est indiquée par $\int_a^b$ qui signifie que l'on fait la somme de toutes ces petites aires quand x prend (de manière continue) toutes les valeurs entre a à b (on ne peut pas utiliser simplement le signe $\sum$ puisqu' il indique une somme sur des entiers donc « discontinue » par contre on écrira $\int_a^b = \lim \sum$ Cf sommes de Riemann).

5Définition : Soit a et b deux réels. L'intégrale d'une fonction $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ continue sur $[a,b]$ est l'aire :

$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b Re(f)(t)dt + i\int_a^b Im(f)(t)dt$.

Alors $Re\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b Re(f)(t)dt$ et $Im\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b Im(f)(t)dt$.

6**Par convention**, $\int_a^a f(t)dt = 0$ et $\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$ pour tous a et b réels tels que $a < b$.

8**CONSEQUENCE** : Si f est continue sur un intervalle I et à valeurs réelles ou complexes alors pour tout $(a,b) \in I^2$, $\int_a^b f(t)dt$ existe (puisque tout le segment d'extrémités a et b est inclus dans l'intervalle I)

9**Définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux :**

1.Si f est continue sur $]a,b]$ et $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ finie (i.e. f est prolongeable par continuité en a) alors $\tilde{f}:\left(x \mapsto \begin{cases} f(x) \; si \; x \in]a,b] \\ L \; si \; x = a \end{cases}\right)$ est continue sur $[a,b]$ et par définition, $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \tilde{f}(t)dt$. Idem en b^-.

2. Soit $c \in]a,b[$. Si f est continue sur $[a,c[$ et sur $]c,b]$ et $\lim_{x\to c^+} f(x) = L^+$ finie et $\lim_{x\to c^-} f(x) = L^-$ finie (on dit que f est continue par morceaux sur $[a,b]$) alors $\tilde{f}^+:\left(x \mapsto \begin{cases} f(x) \; si \; x \in]c,b] \\ L^+ \; si \; x = c \end{cases}\right)$ est continue sur $[c,b]$ et $\tilde{f}^-:\left(x \mapsto \begin{cases} f(x) \; si \; x \in [a,c[\\ L^- \; si \; x = c \end{cases}\right)$ est continue sur $[a,c]$ et par définition, $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c \tilde{f}^-(t)dt + \int_c^b \tilde{f}^+(t)dt$.

10**Théorème Relation de Chasles :** Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Soit a, b, c trois réels de I.

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

11**Exemple** : Calculons $I = \int_{\frac{4}{e}}^{\frac{8}{e}} \frac{\lfloor t \rfloor}{t} dt$.

$\frac{\lfloor t \rfloor}{t} = \begin{cases} \frac{1}{t} \; si \; t \in \left[\frac{4}{e}, 2\right[\\ \frac{2}{t} \; si \; t \in \left[2, \frac{8}{e}\right] \end{cases}$. Donc$\left(t \mapsto \frac{\lfloor t \rfloor}{t}\right)$est continue sur$\left[\frac{4}{e}, \frac{8}{e}\right] \backslash \{1\}$ $\lim_{t\to 1^-} \frac{\lfloor t \rfloor}{t} = 1 \; finie$ et $\lim_{t\to 1^+} \frac{\lfloor t \rfloor}{t} = 2 \; finie$. Donc

$\int_{\frac{4}{e}}^{\frac{8}{e}} f(t)dt = \int_{\frac{4}{e}}^{2} \frac{1}{t} dt + \int_2^{\frac{8}{e}} \frac{2}{t} dt = [\ln(t)]_{\frac{4}{e}}^{2} + [2\ln(t)]_2^{\frac{8}{e}} = 2\ln\left(\frac{8}{e}\right) - \ln\left(\frac{4}{e}\right) - \ln(2) = 3\ln(2) - 1.$

12**Théorème Linéarité de l'opérateur intégral** : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I . Soit a, b deux réels de I

Soit α une constante (réelle ou cpxe) .

$$\int_a^b f(t) + g(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt \;\; et \;\; \int_a^b \alpha f(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt$$

On peut résumer ces deux égalités en une seule : soit α et β deux constantes réelles ou complexes .

$$\int_a^b \alpha f(t) + \beta g(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$$

13**Attention** : avant de « séparer en deux intégrales », il faut vérifier que toutes les intégrales existent ce qui revient, pour nous cette année, à vérifier que toutes les intégrandes sont continues (ou continues par morceaux) sur tout le segment d'intégration.

Par exemple, $\int_0^1 0dt = \int_0^1 \frac{1}{t} - \frac{1}{t} \, dt$ mais $\int_0^1 \frac{1}{t} \, dt$ n'existe pas donc on n'écrit pas $\cancel{\int_0^1 0t = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{t} dt - \int_0^1 \frac{1}{t} dt}_{horreur}}$.

14**Théorème Positivité de l'opérateur intégral** : Si a, b sont deux réels tels que $a < b$ et f est continue et positive sur $[a,b]$ alors $\int_{[a,b]} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt \geq 0$.

15Ce théorème permet notamment le contrôle qualité de votre résultat : par exemple je sais que $\int_0^{\pi/3} sin^2(t)dt \geq 0$ donc je dois trouver un résultat positif.

16**Théorème Croissance de l'opérateur intégral** : Si a, b sont deux réels tels que $a < b$ et f et g sont continues sur $[a,b]$ et $\forall t \in [a,b], f(t) \leq g(t)$ alors $\int_{[a,b]} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt = \int_{[a,b]} g(t)dt$

17**Exemple** : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_0^1 t^n sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$. Montrons que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Tout d'abord, fixons $n \in \mathbb{N}^*$. $f_n:\left(t \mapsto t^n sin\left(\frac{1}{t}\right)\right)$est continue sur $]0,1]$ et $\lim_{t\to 0} t^n \sin\left(\frac{1}{t}\right) = 0 \;\; car \left(t \mapsto \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right)$ est bornée et $\lim_{t\to 0} t^n = 0$.

Donc$f_n$est prolongeable par continuité en 0 et $I_n = \int_0^1 \tilde{f}_n(t)dt$ existe. De plus, $\forall t \in [0,1], -t^n \leq \tilde{f}_n(t) \leq t^n$donc par croissance de l'intégrale, $\int_0^1 -t^n dt \leq \int_0^1 \tilde{f}_n(t)dt \leq \int_0^1 -t^n dt$ i.e. $-\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. Alors le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

II Propriétés utiles au calcul intégral et à la recherche de primitive

18♥♥Théorème fondamental de l'intégration :

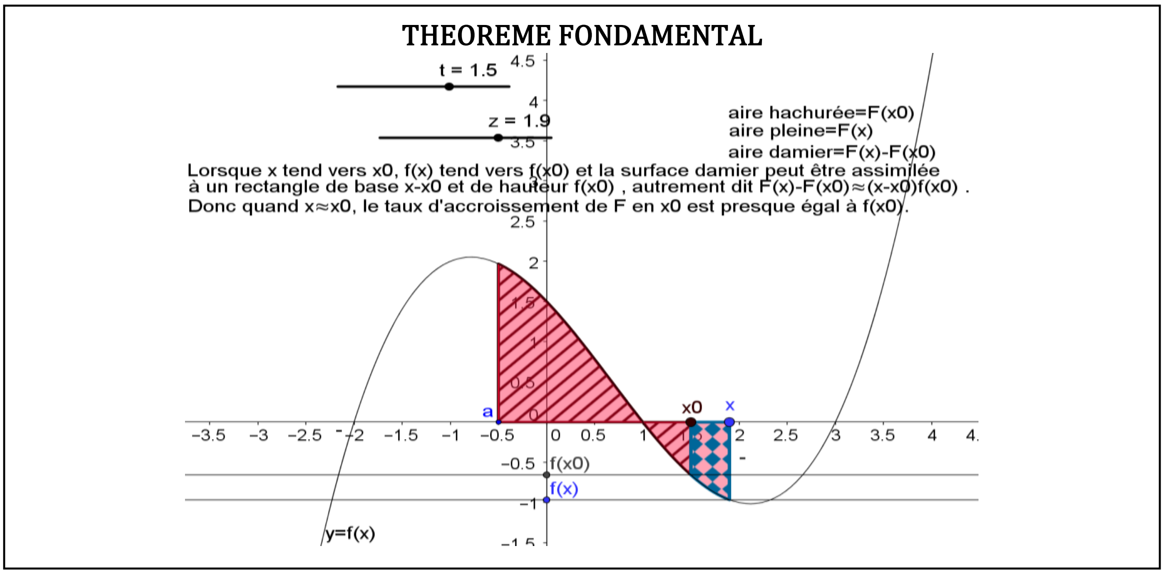
1. Soit f une fonction **continue** sur l'**intervalle** I et $a \in I$. L' application $F: I \to \mathbb{R}$, définie par : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, est une primitive de f sur I et est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.
2. Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle.

Notation : on pourra noter $H(x) = \int^x f(t)dt$ une primitive quelconque de f.

19NB :

- Si F est une primitive de f sur un intervalle I alors les primitives de f sur I sont de la forme $F + cste$ (réelle si f est réelle et complexe si f est complexe .
- Si F est une primitive de f sur les intervalles disjoints I et J alors les primitives de f sur $I \cup J$ sont de la forme $F + cste_1$ sur I et $F + cste_2$ sur J .
- Si F est une primitive de f et G est une primitive de g sur un même intervalle I et α et β sont deux constantes alors $\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f + \beta g$ sur un intervalle I.

20Illustration :



21Exemple : Calculons $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x-1}\int_1^x e^{t^2}dt$.

Posons $f(t) = e^{t^2}$. f est continue sur $\mathbb{R}$ donc le théorème fondamental de l'intégration assure que $F: (x \mapsto \int_1^x e^{t^2}dt)$ est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1. Alors $\forall x \neq 1, \frac{1}{x-1}\int_1^x e^{t^2}dt = \frac{1}{x-1}\big(F(x) - F(1)\big) = \frac{F(x)-F(1)}{x-1}$ est le taux d'accroissement de F en 1 et comme F est dérivable en 1 et $F'(1) = f(1) = e$, je peux conclure que : $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x e^{t^2}dt = e$.

22♥Théorème fondamental du calcul intégral : Soit f continue sur un intervalle I et $(a\,,b) \in I^2$.

Pour tout primitive F de f sur I , on a : $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \overset{notation}{\triangleq} [F(t)]_a^b$.

23Exemples : Calculons I=$\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx$

$\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx = \int_0^1 -(1-x-1)\sqrt{1-x}dx = \int_0^1 -(1-x)\sqrt{1-x}dx + \int_0^1 \sqrt{1-x}dx = \int_0^1 \underbrace{-(1-x)^{\frac{3}{2}}}_{u'(x)u(x)^{\frac{3}{2}}}dx - \int_0^1 \underbrace{-(1-x)^{\frac{1}{2}}}_{u'(x)u(x)^{\frac{1}{2}}}dx =$

$I = \left[\frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$.

Calculons I=$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)\sin(3x)dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)\sin(3x)\,dx \underbrace{\overset{LINEARISATION}{\triangleq}}_{\cos(a)\sin(b)=\frac{\sin(a+b)-\sin(a-b)}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(5x)-\sin(-x)}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(5x) + \sin(x)\,dx =$

$\left[\frac{-1}{10}cos(5x) - \frac{\cos(x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{20} - \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{3}{5} - \frac{\sqrt{2}}{5}$.

Soit β un réel . Calculons $I=\int_{e^2}^{e}\frac{dt}{t(\ln(t))^{\beta}}$. Soit f définie par : $f(t)=\frac{1}{t(\ln(t))^{\beta}}$. $\forall t\in[e,e^2],\ln(t)\geq 1$ donc , f est définie et continue sur le segment $[e,e^2]$ et I existe bien . On a alors :

$$\int_{e^2}^{e}\frac{dt}{t(\ln(t))^{\beta}}=\int_{e^2}^{e}\underbrace{\frac{1}{t}}_{u'(t)}\underbrace{(\ln(t))^{-\beta}}_{\substack{u(t)^{\alpha}\\ avec\ \alpha=-\beta\\ et\ u(t)=\ln(t)}}dt \underset{\substack{u'(t)u(t)^{\alpha}\\ s'intègre\ en\\ \begin{cases}\frac{1}{\alpha+1}u(t)^{\alpha+1} si\ \alpha\neq-1\\ \ln|u(t)|\ si\ \alpha=-1\end{cases}}}{=}\begin{cases}\left[\frac{1}{1-\beta}(\ln(t))^{1-\beta}\right]_{e^2}^{e} si\ \beta\neq 1\\ [\ln(\ln(t))]_{e^2}^{e}\quad si\ \beta=1\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{1-\beta}(1-2^{1-\beta}) si\ \beta\neq 1\\ -\ln(2)\quad si\ \beta=1\end{cases}.$$

Montrons que $H:\left(x\mapsto\int_{x}^{x^3}\frac{e^t}{t}dt\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x\in\mathbb{R}^*, H'(x)=3x^2\frac{e^{x^3}}{x^3}-\frac{e^x}{x}$.

Posons $f(t)=\frac{e^t}{t}$. f est continue sur $\mathbb{R}^*$donc sur chaque intervalle $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$. Par conséquent, le théorème fondamental assure que f admet une primitive F_1 sur $\mathbb{R}^{+*}$et une primitive F_2 sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Prenons $x>0$. Alors $x^3>0$ donc le segment d'extrémités x et x^3 est inclus dans l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$. Par conséquent, $H(x)$ existe et d'après le théorème fondamental de calcul intégral, $\forall x>0, H(x)=F_1(x^3)-F_1(x)$. Comme F_1est et $(x\mapsto x^3)$ sont aussi dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x>0, x^3>0$, $(x\mapsto F_1(x^3))$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et j'en conclus que, H est aussi dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}, H'(x)=3x^{2F_1{}'(x^3)}-F_1^{\prime(x)}=3x^2f(x^3)-f(x)=3x^2\frac{e^{x^3}}{x^3}-\frac{e^x}{x}$.

Prenons $x<0$. Alors $x^3<0$ donc le segment d'extrémités x et x^3 est inclus dans l'intervalle $\mathbb{R}^{-*}$. Par conséquent, $H(x)$ existe et d'après le théorème fondamental de calcul intégral, $H(x)=F_1(x^3)-F_1(x)$.

Comme F_1est et $(x\mapsto x^3)$ sont aussi dérivables sur $\mathbb{R}^{-*}$ et $\forall x<0, x^3<0$, $(x\mapsto F_1(x^3))$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}^{-*}$ et j'en conclus que, H est aussi dérivable sur $\mathbb{R}^{-*}$ et $\forall x\in\mathbb{R}^{-*}, H'(x)=3x^2F_1{}'(x^3)-F_1'(x)=3x^2f(x^3)-f(x)=3x^2\frac{e^{x^3}}{x^3}-\frac{e^x}{x}$.

24♥Théorème d'intégration par parties (IPP) : Soit u et v deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I et $(a,b)\in I^2$. Alors,

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt=[u(t)v(t)]_a^b-\int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

25NB : u et v jouent le même rôle : on a aussi $\int_a^b u(t)v'(t)dt=[u(t)v(t)]_a^b-\int_a^b u'(t)v(t)dt$.

26Exemple : Calculons $I=\int_0^{\pi}t^2\sin(t)dt$. Soit f définie par : $f(t)=t^2\sin(t)$. f est continue sur $[0,\pi]$ donc I existe. Et,

$$I=\int_0^{\pi}\underbrace{t^2}_{u(t)}\underbrace{\sin(t)}_{v'(t)}dt\underset{\substack{IPP\\ u(t)=t,v(t)=-\cos(t)\\ u'(t)=1,v'(t)=\sin(t)}}{=}\left[\underbrace{t^2}_{u(t)}\underbrace{(-\cos(t))}_{v(t)}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\underbrace{2t}_{u'(t)}\underbrace{(-\cos(t))}_{v(t)}dt=\pi^2+2\underbrace{\int_0^{\pi}t\cos(t)dt}_{J}.$$

De même, $$J=\int_0^{\pi}\underbrace{t}_{\alpha(t)}\underbrace{\cos(t)}_{\beta'(t)}dt\underset{\substack{IPP\\ \alpha(t)=t,\beta(t)=\mathrm{SIN}(t)\\ \alpha'(t)=1,\beta'(t)=\cos(t)}}{=}\left[\underbrace{t}_{\alpha(t)}\underbrace{\sin(t)}_{\beta(t)}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\underbrace{1}_{\alpha'(t)}\underbrace{\sin(t)}_{\beta(t)}dt=-\int_0^{\pi}\sin(t)dt.$$ Donc, $J=[\cos(t)]_0^{\pi}=(-1-1)=-2$

et $I=\pi^2-4$. <u>« Contrôle qualité »</u> : $\forall t\in[0,\pi], t^2\sin(t)\geq 0$ donc par la propriété de positivité , $I\geq 0$ OK !! ....

27Application à la recherche d'une primitive de $\ln$: $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. Donc , $F:(x\mapsto\int_1^x\ln(t)\,dt)$ est une primitive de $\ln$. Soit $x\in\mathbb{R}^{+*}$. Calculons $F(x)=\int_1^x\ln(t)\,dt$ (pour obtenir une expression de F sans intégrale)et pour cela, appliquons le TIPP avec $u(t)=\ln(t)$ et $v(t)=t$. u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.

$$F(x)=\int_1^x\ln(t)\,dt=\int_1^x 1\times\ln(t)\,dt\underset{IPP}{=}[t\times\ln(t)]_1^x-\int_1^x t\times\frac{1}{t}dt=x\ln(x)-\int_1^x 1dt=x\ln(x)-[t]_1^x$$

$F(x)=x\ln(x)-x+1$. Ainsi, $H:(x\mapsto x\ln(x)-x+1)$ est une primitive de $\ln$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Donc $G=F-1$ est aussi une primitive de $\ln$.Ainsi , $\boxed{G:(x\mapsto x\ln(x)-x) \text{ est une primitive de } \ln \text{ sur } \mathbb{R}^{+*}.}$

<u>Vérification</u> : $G'(x)=\ln(x)+x\times\frac{1}{x}-1=\ln(x)$ OK !!

28♥Théorème de changement de variables (CV) :
Soit f une fonction continue sur un intervalle J et φ une fonction réelle de classe C^1 sur un intervalle I telles que : $\varphi(I)\subset J$. Soit $(a,b)\in I^2$. Alors,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}f(x)dx=\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

$$x=\varphi(t)$$
$$dx=\varphi'(t)dt$$
$$t=a\Rightarrow x=\varphi(a)$$
$$t=b\Rightarrow x=\varphi(b)$$

29NB : souvent φ est bijective et $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=\int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)}f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

$x=\varphi(t)$ et $t=\varphi^{-1}(x)$
$dx=\varphi'(t)dt$ et $dt=(\varphi^{-1})'(x)dx$
$x=\alpha\Leftrightarrow t=\varphi^{-1}(\alpha)$
$x=\beta\Leftrightarrow t=\varphi^{-1}(\beta)$

30Exemple: Calculons $I=\int_0^1 \frac{dx}{ch(x)}$ en effectuant le changement de variable $t=e^x$.

Soit f définie par : $f(x)=\frac{1}{ch(x)}$. $\forall x\in\mathbb{R}, ch(x)\geq 1$ donc $ch(x)\neq 0$. Donc f est continue sur $[0,1]$ et I existe . Alors,

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{ch(x)}=\int_0^1 \frac{2dx}{e^x+\frac{1}{e^x}}=2\int_0^1 \frac{e^x dx}{(e^x)^2+1}\underbrace{=}_{\substack{CV\\ x=\ln(t) i.e. t=e^x\\ dx=\frac{1}{t}dt\ \ i.e. dt=e^x dx\\ x=0\Leftrightarrow t=1\\ x=1\Leftrightarrow t=e}} 2\int_1^e \frac{dt}{t^2+1}=2[Arctan(t)]_1^e=2Arctan(e)-\frac{\pi}{2}.$$

Calculons $\int_0^1 \sqrt{1-u^2}du$

$$\int_0^1 \sqrt{1-u^2}du\underbrace{=}_{\substack{u=\sin(\theta)\\ du=\cos(\theta)d\theta\\ u=0\Leftrightarrow\theta=0\\ u=1\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{2}}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-(sin\theta)^2}\cos(\theta)\,d\theta=\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{cos^2\theta}\cos(\theta)\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(\theta)d\theta\overbrace{\underbrace{=}_{\cos(2\theta)=2\cos^2(\theta)-1}}^{LINEARISATION}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(2\theta)+1}{2}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2\theta)}{2}+\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sin\left(2\frac{\pi}{2}\right)}{4}+\frac{\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$$ Ilustration !!!!

31Application à la recherche d' une primitive de $\left(x\mapsto\frac{1}{x^2+a^2}\right)$, $\left(x\mapsto\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)$, $\left(x\mapsto\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)$ tel que $a>0$

$\forall x, \int_{\cdot}^x \frac{1}{t^2+a^2}dt=\frac{1}{a^2}\int_{\cdot}^x\frac{1}{\left(\frac{t}{a}\right)^2+1}dt\underbrace{=}_{\substack{u=\frac{t}{a}\\ adu=dt\\ t=0\Leftrightarrow u=0\\ t=x\Leftrightarrow u=\frac{x}{a}}}\frac{1}{a^2}\int_{\cdot}^{\frac{x}{a}}\frac{1}{u^2+1}adu=\frac{1}{a}Arctan\left(\frac{x}{a}\right)+cste$. Avec le même principe : $\forall x\in]-a;a[$,

$$\int_{\cdot}^x\frac{1}{\sqrt{a^2-t^2}}dt=\int_{\cdot}^x\frac{1}{a\sqrt{1-\left(\frac{t}{a}\right)^2}}dt\underbrace{=}_{\substack{u=\frac{t}{a}\\ adu=dt\\ t=0\Leftrightarrow u=0\\ t=x\Leftrightarrow u=\frac{x}{a}}}\frac{1}{a}\int_{\cdot}^{\frac{x}{a}}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}adu=Arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+cste\ .$$

Et $\forall x, \int_{\cdot}^x\frac{1}{\sqrt{a^2+t^2}}dt=\int_{\cdot}^x\frac{1}{a\sqrt{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}}dt\underbrace{=}_{\substack{u=\frac{t}{a}\\ adu=dt\\ t=0\Leftrightarrow u=0\\ t=x\Leftrightarrow u=\frac{x}{a}}}\frac{1}{a}\int_{\cdot}^{\frac{x}{a}}\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}adu=\ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\right)+cste$

$\forall x\in[-1;1], \int_{\cdot}^x\sqrt{1-u^2}du\underbrace{=}_{\substack{u=\sin(\theta)\\ du=\cos(\theta)d\theta\\ u=0\Leftrightarrow\theta=0\\ u=x\Leftrightarrow\theta=Arcsin(x)}}\int_{\cdot}^{Arcsin(x)}\sqrt{1-(sin\theta)^2}\cos(\theta)\,d\theta=\int_{\cdot}^{Arcsin(x)}\sqrt{cos^2\theta}\cos(\theta)\,d\theta=$

$$\int_{\cdot}^{Arcsin(x)}\cos^2(\theta)d\theta=\int_{\cdot}^{Arcsin(x)}\frac{\cos(2\theta)+1}{2}d\theta=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2\theta)}{2}+\theta\right]_{\cdot}^{Arcsin(x)}=\frac{\sin(2Arcsin(x))}{4}+\frac{Arcsin(x)}{2}+cste=\frac{x\sqrt{1-x^2}+Arcsin(x)}{2}+cste$$

Alors, $\forall x\in[-a;a], \int_{\cdot}^x\sqrt{a^2-t^2}dt=a\int_{\cdot}^x\sqrt{1-\left(\frac{t}{a}\right)^2}dt\underbrace{=}_{\substack{u=\frac{t}{a}\\ adu=dt\\ t=0\Leftrightarrow u=0\\ t=x\Leftrightarrow u=\frac{x}{a}}}a^2\int_0^{\frac{x}{a}}\sqrt{1-u^2}du=\frac{x\sqrt{a^2-x^2}+a^2Arcsin\left(\frac{x}{a}\right)}{2}+cste$.

<u>31bisApplication aux intégrales de fonctions paires, impaires ou périodiques :</u>

1. Si f est continue sur l'intervalle I et impaire sur I alors pour tout réel $a\in I$, $\int_{-a}^a f(t)dt=0$
2. Si f est continue sur l'intervalle I et paire alors pour tout réel $a\in I$, $\int_{-a}^a f(t)dt=2\int_0^a f(t)dt$
3. Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique alors pour tous réels a et b , $\int_a^b f(t)dt=\int_{a+T}^{b+T}f(t)dt$ et $\int_0^T f(t)dt=\int_a^{a+T}f(t)dt$

1. Supposons f impaire et continue sur I et $a\in I$.

$$\int_{-a}^a f(t)dt=\int_{-a}^0 f(t)dt+\int_0^a f(t)dt\underbrace{=}_{\substack{CV\\ x=-u}}\int_a^0 f(-u)(-du)+\int_0^a f(t)dt\underbrace{=}_{\substack{car\\ f\\ impaire}}\int_a^0 -f(u)(-du)+\int_0^a f(t)dt$$

$$=\int_a^0 f(u)du+\int_0^a f(t)dt=-\int_0^a f(t)dt+\int_0^a f(t)dt=0.$$

2. Supposons f paire et continue sur I et $a\in I$.

$$\int_{-a}^a f(t)dt=\int_{-a}^0 f(t)dt+\int_0^a f(t)dt\underbrace{=}_{\substack{CV\\ x=-u}}\int_a^0 f(-u)(-du)+\int_0^a f(t)dt\underbrace{=}_{\substack{car\\ f\ est\\ paire}}\int_a^0 f(u)(-du)+\int_0^a f(t)dt=\int_0^a f(u)du+\int_0^a f(t)dt=2\int_0^a f(t)dt.$$

3. Supposons $f$est continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique. Soit deux réels a et b .

$\int_a^b f(t)dt\underbrace{=}_{\substack{CV\\ u=t+T\\ du=dt}}\int_{a+T}^{b+T}f(u-T)dt\underbrace{=}_{\substack{car\ f\\ est\ T-périodique}}\int_{a+T}^{b+T}f(u)du$ et $\int_0^T f(t)dt=\int_0^a f(t)dt+\int_a^{a+T}f(t)dt+\int_{a+T}^T f(t)dt=\underbrace{\int_0^a f(t)dt-\int_T^{a+T}f(t)dt}_{=0\ d'après ce\ qui\ précède}+$
$\int_a^{a+T}f(t)dt=\int_a^{a+T}f(t)dt$

III Méthodes de calcul intégral

32Nous cherchons à calculer $I=\int_a^b f(t)dt$

A. **Justifier que I existe ....**

Si f est continue sur le segment $[a,b]$ alors I existe.

Si f est continue sur le segment $]a,b]$ et f a une limite finie en a alors I existe.

Si f est continue sur le segment $]a,b[$ et f a une limite finie en a et une limite finie en b alors I existe.

B. **Observer la forme de f et travailler en conséquence ....**

33FORME SIMPLE QUE L'ON PEUT INTEGRER DIRECTEMENT :

Expression de f	Une Primitive usuelle de f	Exemple
$exp(ax+b)$	$\frac{1}{a}\exp(ax+b)$	
$\exp((ai+b)x)$	$\frac{1}{ai+b}\exp((ai+b)x)$	
$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}\ln(\lvert ax+b\rvert)$	
$ln(x)$	$xln(x)-x$	
$cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	
$sin(ax+b)$	$\frac{-1}{a}\cos(ax+b)$	
$ch(ax+b)$	$\frac{1}{a}\mathrm{sh}(ax+b)$	
$sh(ax+b)$	$\frac{1}{a}\mathrm{ch}(ax+b)$	
$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a}Arctan\left(\frac{x}{a}\right)$	
$\tan(x)$	$-ln\lvert\cos(x)\rvert$	
$1+tan^2x$ $\left(=\frac{1}{cos^2(x)}\right)$	$\tan(x)$	
x^α tel que $\alpha\in\mathbb{R}$	$\begin{cases}\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \text{si } \alpha\neq-1\\ \ln(\lvert x\rvert) & si\ \alpha=-1\end{cases}$	
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\ln(x+\sqrt{x^2+1})$	
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln(x+\sqrt{x^2-1})$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$Arcsin(x)$	
$\frac{1}{x^2+1}$	$Arctan(x)$	
$u'(x)u(x)^\alpha$ tq $\alpha\neq-1$	$\frac{u(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\left(x\mapsto\frac{\ln(x)^2}{2}\right)$ est une primitive de $\left(x\mapsto\frac{\ln(x)}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$
$\frac{u'(x)}{u(x)^\alpha}=u'(x)u(x)^{-\alpha}$ tq $\alpha\neq1$	$\frac{u(x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$	$\left(x\mapsto\frac{1}{3(1+ch(3x))}\right)$ est une primitive de $\left(x\mapsto\frac{sh(3x)}{(1+ch(3x))^2}\right)$ sur $\mathbb{R}$.
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(\lvert u(x)\rvert)$	$-ln\lvert cos\rvert$ est une primitive de tan sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$	$(x\mapsto\cos(x)\,e^{\sin(x)})$ est une primitive de $e^{\sin}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.
$u'(x)\sin(u(x))$	$-\cos(u(x))$	
$u'(x)\cos(u(x))$	$\sin(u(x))$	
$u'(x)\ \mathrm{sh}(u(x))$	$\mathrm{ch}(u(x))$	
$u'(x)\ \mathrm{ch}(u(x))$	$\mathrm{sh}(u(x))$	
$\frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}=u'(x)(1+tan^2(u(x)))$	$\tan(u(x))$	
$u'(ax+b)$	$\frac{u(ax+b)}{a}$	
$u'(x)\times v'(u(x))$	$v(u(x))$	

34 FORME PLUS COMPLIQUEE POUR LAQUELLE ON DOIT TRAVAILLER :

- Transformer l'expression (linéarisation, décomposition en éléments simples , « bidouilles »)
- Faire une ou des IPP
- Faire un changement de variables ….

$f(x)$	Méthode pour intégrer f	Exemple
$sin^2(px)$ ou $cos^2(px)$ p réel	**OBJECTIF : faire apparaitre des termes de la forme $cos(mx)$.** Pour cela : **Linéariser avec la formule de trigo** : $cos(2a) = 1 - 2sin^2(a) = 2cos^2(a) - 1$	$\int_0^1 sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$
$cos(px)\cos(mx)$ p, m réels	**OBJECTIF : faire apparaitre une somme de termes de la forme $cos(mx)$.** Pour cela :**Linéariser avec la formule de trigo** : $\cos(a)\cos(b) = \frac{cos(a+b)+cos(a-b)}{2}$	$\int_0^{\pi}\cos(px)\cos(qx)dx$ tq $(p,q) \in \mathbb{N}^2$
$sin(px)\,sin(mx)$ p, m réels	**OBJECTIF : faire apparaitre une somme des termes de la forme $cos(x)$.** Pour cela :**Linéariser avec la formule de trigo** : $\sin(a)sin(b) = \frac{cos(a-b)-cos(a+b)}{2}$	
$sin(px)\cos(mx)$ p, m réels	**OBJECTIF : faire apparaitre une somme des termes de la forme $sin(mx)$.** Pour cela : **Linéariser avec la formule de trigo** : $\sin(a)\cos(b) = \frac{sin(a+b)+sin(a-b)}{2}$	
$cos^k(px)\,sin^l(px)$ Avec p réel k et l entiers naturels et $k = 2n+1$ impair (ou l impair)	**OBJECTIF : faire apparaitre une somme de termes de la forme $u'(x)u(x)^d$.** Pour cela : **Ecrire** $cos^{2n+1}(px) = (cos^2(px))^n\cos(px)$ **Utiliser la formule de trigo** $cos^2(a) + sin^2(a) = 1$: $f(x) = sin^l(px)\;(1 - sin^2(px))^n\cos(px)$ **Développer avec la FBN** et reconnaitre une somme de termes de la forme $u'(x)u(x)^d$ Si $l = 2n+1$ alors idem en échangeant sin et cos.	$\int_{.}^{x} sin^5(t)dt$
$cos^k(px)\,sin^l(mx)$ avec p, m réels k et l entiers naturels	**OBJECTIF : faire apparaitre une somme de termes de la forme $cos(dx)$ ou $sin(dx)$.** **Linéariser avec les formules Euler et binôme de Newton** : $cos^k(px)\,sin^l(mx) = \left(\frac{e^{ipx}+e^{-ipx}}{2}\right)^k\left(\frac{e^{ipx}-e^{-ipx}}{2i}\right)^l = \cdots$ Développer dans chaque parenthèse avec la formule du binôme de Newton Développer le produit des deux parenthèses Regrouper les exponentielles imaginaires deux à deux conjuguées	
$ch^k(px)\,sh^l(mx)$ p, m réels avec k ou l entiers naturel	**OBJECTIF : faire apparaitre une somme de termes de la forme e^{dx}.** Pour cela : **remplacer ch et sh par leur expression en fonction d'exponentielles réelles** et tout développer.**(on peut si k ou l impairs appliquer la même méthode qu'au 5)**	$\int_0^1 ch(3x)sh^2(x)e^{-x}dx$
$P(x)ln(x)$ $P(x)$ Arctan(mx)	**OBJECTIF : faire apparaitre une fraction que l'on sait intégrer .** Pour cela : IPP en intégrant $P(x)$ et dérivant l'autre facteur $ln(x)$, $Arctan(x)$ Ie : $u'(x) = P(x)$ et $v(x) = ln(x)$	$\int_e^{\frac{1}{e}}(1-3x^2)\ln^2(x)dx$
$P(x)Arcsin(mx)$ $P(x)Arccos(mx)$ (P polynomiale, m réel)	IPP en intégrant $P(x)$ et dérivant l'$Arcsin(mx)$ Ie : $u'(x) = P(x)$ et $v(x) = Arcsin(mx)$ OU BIEN **CV : $u = sin(x)$ (resp.ou $u = cos(x)$) pour se ramnener à une forme ci-dessous**	$\int_0^{\frac{1}{2}} x^2Arccos(2x)dx$ $\int_{-1}^{1} xArcsin(x)dx$
$P(x)e^{mx}$ $P(x)cos(mx)$, $P(x)sin(mx)$ $P(x)ch(mx)$, $P(x)sh(mx)$ (m réel, P polynomiale)	**OBJECTIF : faire baisser le degré du polynôme jusqu'à obtenir une constante.** Des IPP en dérivant $P(x)$etintégrant l'autre facteur $exp(mx), cos(mx)ou$ … Autant d'IPP que le degré de P jusquà obtenir un polynôme constant .	$\int_0^1(2x^2 - x + 3)e^{-2x}dx$
$sin(px)e^{mx}$ $cos(px)e^{mx}$	**OBJECTIF : obtenir une relation de la forme $I = aI + b$.** Pour cela : **Deux IPP** en dérivant le sin (ou cos)et en intégrant $l'exponentielle$ Retrouver l'intégrale de départ et résoudre $I = b + aI$ OU bien **OBJECTIF : obtenir une intégrande de la forme $e^{(c+id)x}$.** Pour cela : **Passer en complexe** $sin(px)e^{mx} = Im(e^{(m+ip)x})$ donc une primitive de $sin(px)e^{mx}$ est $Im\left(\frac{e^{(m+ip)x}}{m+ip}\right)$. Il reste à trouver $Im\left(\frac{e^{(m+ip)x}}{m+ip}\right)$	$\int_0^{\pi}\sin(4x)e^{-3x}dx$
$sin^p(x)e^{mx}$ $cos^p(x)e^{mx}$	**On linéarise** $sin^p(x)$ puis on applique la méthode précédente	

$sh(px)e^{mx}$ $sh^p(x)e^{mx}$ $ch(px)e^{mx}$ $ch^p(x)e^{mx}$	**On peut tout mettre sous forme exponentielle ! (ou faire comme précédemment avec sin et cos)**	
$\frac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q polynomiale	**On décompose en éléments simples puis on intègre chaque élément simple comme suit …**	$\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{1-2x}dx$
$\frac{1}{(x-\alpha)}$	**Reconnaitre la forme** $\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\int^{x}\frac{1}{t^2+6t-7}dt$ $\int_{2}^{1}\frac{t^3+3t-1}{t^2+t}dt$
$\frac{1}{(x-\alpha)^n}$ $avec\ n \geq 2$	**Reconnaitre la forme** $u'(x)u^{-n}(x)$.	$\int^{x}\frac{1}{9t^2+6t+1}dt$
$\frac{1}{x^2+ax+b}$ $avec\ a^2-4b<0$	**OBJECTIF : faire apparaitre** $\frac{1}{1+t^2}$ **à intégrer**. Pour cela : Ecrire x^2+ax+b sous sa forme canonique $\alpha[\left(\frac{x+\beta}{\gamma}\right)^2+1]$ Faire le changement de variable $t=\frac{x+\beta}{\gamma}$	$\int_{-1}^{1}\frac{1}{t^2+t+1}dt$
$\frac{cx+d}{x^2+ax+b}$ $avec\ a^2-4b<0$	**OBJECTIF : écrire $f(x)$ sous la forme** $A\times\underbrace{\frac{2x+a}{x^2+ax+b}}_{\frac{u'(x)}{u(x)}}+B\times\underbrace{\frac{1}{x^2+ax+b}}_{une\ des\ formes\ précédentes}$. Pour cela, écrire $cx+d=\frac{c}{2}(2x+a)+\left(d-\frac{ac}{2}\right)$. Distribuer le dénominateur sur ces deux termes.	$\int_{0}^{1}\frac{1-3t}{t^2+2t+2}dt$
$\frac{1}{(x^2+1)^n}$ Où n entier naturel supérieur à 2	**OBJECTIF : Obtenir une relation entre** $I_n=\int_w^z\frac{1}{(x^2+1)^n}dx$ **et** $I_{n-1}=\int_w^z\frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}dx$ **pour obtenir une relation entre** I_n **et** $I_1=\int_w^z\frac{1}{x^2+1}dx$ Décomposer $\frac{(1+x^2)-x^2}{(x^2+1)^n}=\frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}-\underbrace{\frac{x}{2}}_{u(x)}\times\underbrace{\frac{2x}{(x^2+1)^n}}_{v'(x)}$. Faire une IPP pour intégrer $u(x)v'(x)$ Faire apparaitre une relation $I_n=A\times I_{n-1}+B\times I_n$. En déduire $I_n\ en\ fonction\ de\ I_{n-1}$. Puis $I_{n-1} en\ fonction\ de\ I_{n-2}$ (…)	$\int_{0}^{1}\frac{1}{(x^2+1)^2}dx$

EXEMPLES

35Méthode pour intégrer les fonctions de la forme $f(x)=\frac{1}{ax^2+bx+c}$,où a,b,c réels et a non nul.

Posons $Q(x)=ax^2+bx+c$

1er cas : $\Delta_Q=0$ *i.e.* Q est un carré . Cherchons une primitive de $f:x\mapsto\frac{1}{9x^2+6x+1}$

f est continue sur $Df=\mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{3}\}$; donc sur tout intervalle inclus dans Df, f admet des primitives. Et, sur chacun de ces intervalles , on a :

$$\int\frac{1}{9x^2+6x+1}dx=\int\underbrace{\frac{1}{(3x+1)^2}}_{\substack{de\ la\ forme\ u'(x)u(x)^{-2}\\ à\ un\ facteur\ cst\ près.}}dx=\underbrace{\frac{1}{3}\int\frac{3}{(3x+1)^2}dx}_{\substack{je\ fais\ appariatre\ ce\ facteur\\ et\ je\ compense}}=\frac{1}{3}\frac{-1}{(3x+1)^2}+cste.$$

2er cas : $\Delta_Q>0$ *i.e.* Q se factorise en deux facteurs de degré 1 à racines réelles distinctes. Cherchons une primitive de $f:x\mapsto\frac{1}{x^2+6x-7}$

f est continue sur $Df=\mathbb{R}\backslash\{-7\,;1\}$; donc sur tout intervalle inclus dans Df, f admet des primitives.

$\forall x\in Df,\frac{1}{x^2+6x-7}=\frac{1}{(x+7)(x-1)}=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{(x-1)}-\frac{1}{(x+7)}\right]$. Donc, sur chaque intervalle inclus dans Df, les primitives de f sont les fonctions de la forme $\left(x\mapsto\frac{1}{8}ln\left|\frac{x-1}{x+7}\right|+cste\right)$.

2er cas : $\Delta_Q<0$ *i.e.* Q n'a pas de racines réelles . Cherchons les primitives de $f:x\mapsto\frac{1}{x^2+3x+4}$ sur $\mathbb{R}$.

f est continue sur $Df=\mathbb{R}$; donc sur tout intervalle, f admet des primitives et $F:(x\mapsto\int_0^x\frac{1}{t^2+3t+4}dt)$ est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

$$\forall t\in\mathbb{R},t^2+3t+4=\left(t+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+4=\left(t+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}=\frac{7}{4}\left[\frac{4}{7}\left(t+\frac{3}{2}\right)^2+1\right]=\frac{7}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\left(t+\frac{3}{2}\right)\right)^2+1\right]=\frac{7}{4}\left[\left(\frac{2t+3}{\sqrt{7}}\right)^2+1\right].$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x \frac{1}{\frac{7}{4}\left[\left(\frac{2t+3}{\sqrt{7}}\right)^2+1\right]} dt = \frac{4}{7}\int_0^x \frac{1}{\left(\frac{2t+3}{\sqrt{7}}\right)^2+1} dt \underbrace{=}_{\substack{CV \\ u=\frac{2x+3}{\sqrt{7}}}} \frac{4}{7}\int_{\frac{3}{\sqrt{7}}}^{\frac{2x+3}{\sqrt{7}}} \frac{1}{u^2+1}\frac{\sqrt{7}}{2} dt = \frac{2}{\sqrt{7}}\int_{\frac{3}{\sqrt{7}}}^{\frac{2x+3}{\sqrt{7}}} \frac{1}{u^2+1} dt = \frac{2}{\sqrt{7}}[Arctan(u)]_{\frac{3}{\sqrt{7}}}^{\frac{2x+3}{\sqrt{7}}} =$
$\frac{2}{\sqrt{7}} Arctan\left(\frac{2x+3}{\sqrt{7}}\right) + cste.$

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont alors toutes les fonctions de la forme $\left(x \mapsto \frac{2}{\sqrt{7}} Arctan\left(\frac{2x+3}{\sqrt{7}}\right) + c\right)$ tq c cste réelle.

36Méthode pour intégrer les fonctions de la forme $f(x) = \frac{ux+v}{ax^2+bx+c}$,où a, b, c, u, v réels et a , u non nuls et $Q(x) = ax^2 + bx + c$ tq $\Delta_Q = b^2 - 4ac < 0$.

Cherchons les primitives de $f : x \mapsto \frac{2-5x}{2x^2-x+1}$ sur $\mathbb{R}$.

$\Delta_Q < 0$.Par conséquent, f est continue sur $Df = \mathbb{R}$; donc sur tout intervalle, f admet des primitives et $F: \left(x \mapsto \int_0^x \frac{2-5t}{2t^2-t+1} dt\right)$ est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{2-5t}{2t^2-t+1} = \frac{2-\frac{5}{4}(4t-1)-\frac{5}{4}}{2t^2-t+1} = -\frac{5}{4}\underbrace{\frac{(4t-1)}{2t^2-t+1}}_{g(t)} + \frac{3}{4}\underbrace{\frac{1}{2t^2-t+1}}_{h(t)}$. Donc, puisque g et h sont continues sur $\mathbb{R}$,

$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = -\frac{5}{4}\int_0^x \frac{(4t-1)}{2t^2-t+1} dt + \frac{3}{4}\underbrace{\int_0^x \frac{1}{2t^2-t+1} dt}_{H(x)} = -\frac{5}{4} ln|2x^2 - x + 1| + \frac{3}{4} H(x).$

Ensuite pour calculer $H(x)$, il faut appliquer la méthode illustrée précédemment . Ici, $\Delta_Q < 0$.

$\forall t \in \mathbb{R}, 2t^2 - t + 1 = 2\left[t^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right] = 2\left[\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} + \frac{1}{2}\right] = 2\left[\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}\right] = \frac{14}{16}\left[\left(\frac{4}{\sqrt{7}}\left(t - \frac{1}{4}\right)\right)^2 + 1\right] = \frac{7}{8}\left[\left(\frac{4t-1}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1\right].$

Donc, $H(x) = \int_0^x \frac{1}{2t^2-t+1} dt = \frac{8}{7}\int_0^x \frac{1}{\left(\frac{4t-1}{\sqrt{7}}\right)^2+1} dt = \frac{8}{7}\int_{\frac{1}{\sqrt{7}}}^{\frac{4x-1}{\sqrt{7}}} \frac{1}{u^2+1}\frac{\sqrt{7}}{4} du = \frac{2}{\sqrt{7}} Arctan\left(\frac{4x-1}{\sqrt{7}}\right) + \frac{2}{\sqrt{7}} Arctan\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right).$

Ainsi, $F(x) = -\frac{5}{4} ln|2x^2 - x + 1| + \frac{3}{4} \times \frac{2}{\sqrt{7}} Arctan\left(\frac{4x-1}{\sqrt{7}}\right) + \frac{3}{4} \times \frac{2}{\sqrt{7}} Arctan\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right).$

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont toutes les fonctions de la forme : $\left(x \mapsto -\frac{5}{4} ln|2x^2 - x + 1| + \frac{3}{2\sqrt{7}} Arctan\left(\frac{4x-1}{\sqrt{7}}\right) + cste\right).$

37 Méthode pour intégrer les fonctions de la forme $f(x) = \frac{P(x)}{ax^2+bx+c}$,où a, b, c réels et a non nul et P polynomiale de degré supérieur ou égal à 2

Posons $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Quel soit le signe de Δ_Q, on commence par décomposer f en éléments simples puis on intègre chaque éléments simples :

- un élément simple de première espèce s'intègre directement (on en connait une primitive)
- un élément simple de deuxième espèce s'intègre avec les méthodes précédents

Calculons $I = \int_1^{-1} \underbrace{\frac{1-2t^4}{t^2-2t-15}}_{f(t)} dt.$

$\forall t \in \mathbb{R}, Q(t) = t^2 - 2t - 15 = (t-5)(t+3)$. Par conséquent, f est continue sur $Df = \mathbb{R}\backslash\{-3,5\}$ donc sur [-1 ;1]. Ainsi, I existe.

$$\begin{array}{c|l} -2t^4 + 1 & t^2 - 2t - 15 \\ \underline{-(-2t^4 + 4t^3 + 30t^2)} & -2t^2 - 4t - 38 \\ -4t^3 - 30t^2 + 1 & \\ \underline{-(-4t^3 + 8t^2 + 60t)} & \\ -38t^2 - 60t + 1 & \\ \underline{-(-38t^2 + 76t + 570)} & \\ -136t - 569 & \end{array}$$

$Alors, \forall t \in [-1\,;1], f(t) = \frac{1-2t^4}{t^2-2t-15} = \frac{(t^2-2t-15)(-2t^2-4t-38)-136t-569}{t^2-2t-15} = -2t^2 - 6t - 48 +$

$f(t) = -2t^2 - 4t - 38 - \frac{136t \mp 569}{(t-5)(t+3)} = -2t^2 - 4t - 38 - \left[\frac{\frac{1249}{8}}{t-5} - \frac{\frac{161}{8}}{t+3}\right].$

$Donc, I = \left[-\frac{2}{3}t^3 - 2t^2 - 38t - \frac{1249}{8} ln|t-5| + \frac{161}{8} ln|t+3|\right]_1^{-1}$

Ainsi, $I = \frac{2}{3} - 2 + 38 - \frac{1249}{8} ln\left|\frac{6}{4}\right| + \frac{161}{8} ln\left|\frac{2}{4}\right| = \frac{232}{3} - \frac{1249}{8} ln\left|\frac{3}{2}\right| + \frac{161}{8} ln\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{232}{3} + 136\ln(2) - \frac{1249}{8}\ln(3) + 272\ln(2).$

IV Méthodes pour trouver une primitve

38Nous cherchons une primitive de f sur l'intervalle I (ou toutes les primitives de f sur I):une primitive de f est est souvent notée $\int f(x)dx$. Vous trouverez des calculs de primitives utilisant cette notation. Pour ma part, je vais revenir à un calcul d'intégral classique en suivant la méthode suivante :

A. **Justifier que f admet une primitive sur cet intervalle I** .... Si f est continue sur l'intervalle I , alors f admet des primitives sur I.
B. **Regarder la forme de f :**
   - Ou bien je reconnais dans l'expression de f une dérivée usuelle (tableau 1).

- Ou bien je peux transformer f (par linéarisation ou « bidouille » ou décomposition en éléments simples) afin de l'écrire f comme une somme de fonctions dont je connais une primitive . Dans le tableau 2, cela correspondant aux cas ne nécessitant ni IPP ni de CV .
- Ou bien le calcul d'une intégrale de f nécessite IPP ou CV (cf tableau2). Dans ce cas ,
  - Je choisis un élément a dans I et j'introduis $F: I \to \mathbb{R}$, définie par : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.
  - J' invoque le cours pour affirmer que F est une primitive de f sur I .
  - Je calcule $F(x)$ avec les méthodes du tableau précédent .

39**Exemple :** Cherchons une primitive de $f(x) = \frac{\ln(x)}{x(1+(\ln(x))^2)}$.

f est continue sur $I =]0, +\infty[$ donc f admet une primitive sur l'intervalle I.

$f(x) = \frac{\ln(x)}{x(1+(\ln(x))^2)} = \frac{1}{2}\frac{\frac{2\ln(x)}{x}}{1+(\ln(x))^2} = \frac{1}{2}\frac{u'(x)}{u(x)}$. Donc les primitives de f sur I sont les fonctions de la forme : $(x \mapsto \frac{1}{2}\ln(1 + (\ln(x))^2) + c)$ tq c constante réelle.

Exemple : Cherchons une primitive de $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-3x}}$.

f est continue sur $I =]\frac{1}{3}, +\infty[$ donc f admet une primitive sur l'intervalle I.

$\forall x \in I, f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-3x}} = \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)(1-3x)+\frac{1}{3}}{\sqrt{1-3x}} = -\frac{1}{3}\sqrt{1-3x} + \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{1-3x}} = \frac{1}{9}\underbrace{(-3)(1-3x)^{\frac{1}{2}}}_{u'(x)u(x)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{9}\underbrace{(-3)(1-3x)^{-\frac{1}{2}}}_{u'(x)u(x)^{-\frac{1}{2}}}$.

Donc $F: \left(x \mapsto \frac{1}{9}\frac{(1-3x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{9}\frac{(1-3x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)$ est une primitive de f sur I.

Exemple : Cherchons une primitive de $f(x) = x^2 Arctan(x)$ sur $\mathbb{R}$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ donc f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

$$\int_{.}^{x} t^2 Arctan(t)dt = \left[\frac{t^3}{3}Arctan(t)\right]_{.}^{x} - \int_{.}^{x}\frac{t^3}{3(1+t^2)}dt = \frac{x^3}{3}Arctan(x) - \frac{1}{3}\int_{.}^{x}\frac{t(t^2+1)-t}{(1+t^2)}dt$$
$$= \frac{x^3}{3}Arctan(x) - \frac{1}{3}\int_{.}^{x} t - \frac{1}{2}\frac{2t}{(1+t^2)}dt = \frac{x^3}{3}Arctan(x) - \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right] + cste.$$

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $(x \mapsto \frac{x^3}{3}Arctan(x) - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln(1+x^2) + c)$ tel que c cste réelle.

Exemple : Cherchons une primitive de $f(x) = \frac{2x^3+3x-1}{x^2+x+1}$.

Notons $N(x) = 2x^3 + 3x - 1$ et $D(x) = x^2 + x + 1$. $\Delta_D < 0$. Donc $Df = \mathbb{R}$ et f est continue sur l' intervalle $\mathbb{R}$. Par conséquent, f admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et $F: (x \mapsto \int_0^x f(t)dt)$ est celle qui s'annule en 0. Cherchons une expression de F en calculant $F(x) = \int_0^x \frac{2t^3 \mp 3t-1}{t^2+t+1}.dt$.

• Effectuons la division euclidienne de N par D :

$$\begin{array}{r|l} 2t^3 + 3t - 1 & t^2 + t + 1 \\ \cline{2-2} -(2t^3 + 2t^2 + 2t) & 2t - 2 \\ \hline -2t^2 + t - 1 & \\ -(-2t^2 - 2t - 2) & \\ \hline 3t + 1 & \end{array}$$

Donc, $2t^3 + 3t - 1 = (t^2 + t + 1)(2t - 2) + 3t + 1$.

Et par conséquent,

$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{(t^2+t+1)(2t-2)+3t+1}{t^2+t+1} = (2t-2) + \frac{3t+1}{t^2+t+1} = (2t-2) + \frac{\frac{3}{2}(2t+1)-\frac{1}{2}}{t^2+t+1} = \underbrace{(2t-2)}_{Q(t)} + \frac{3}{2}\underbrace{\frac{(2t+1)}{t^2+t+1}}_{g(t)} - \frac{1}{2}\underbrace{\frac{1}{t^2+t+1}}_{h(t)}$.

•Q, g et h sont continues sur $\mathbb{R}$ donc, $\forall x \in \mathbb{R}$ $F(x) = \int_{.}^{x} \mathrm{Q(t)}dt + \frac{3}{2}\int_{.}^{x} g(t)dt - \frac{1}{2}\underbrace{\int_{.}^{x} h(\mathrm{t})dt}_{H(x)}$

$$F(x) = x^2 - 2x + \frac{3}{2}\ln(x^2 + x + 1) - \frac{1}{2}H(x).$$

•Calcul de $H(x)$: $\forall t \in \mathbb{R}, t^2 + t + 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right] = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right]$

$$H(x) = \int_{.}^{x} \frac{1}{\frac{3}{4}\left[\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]}dt = \frac{4}{3}\int_{.}^{x}\frac{1}{\left[\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]}dt \underbrace{=}_{\substack{CV \\ u=\frac{2t+1}{\sqrt{3}} \\ du=\frac{2}{\sqrt{3}}dt \ et\ dt=\frac{\sqrt{3}}{2}du \\ t=.\Leftrightarrow u=... \\ t=x\Leftrightarrow u=\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}} \frac{4}{3}\int_{...}^{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{[u^2+1]}\frac{\sqrt{3}}{2}du = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{...}^{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{[u^2+1]}du$$

$$H(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}[Arctan(u)]_{...}^{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[Arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + cste\right] = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[Arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + cste\right].$$

•Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$F(x) = x^2 - 2x + \frac{3}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\left[Arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + cste\right] = x^2 - 2x + \frac{3}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{Arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} + cste$.

•Ainsi les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont toutes les fonctions de la forme $\left(x \mapsto x^2 - 2x + \frac{3}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{Arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} + cste\right)$.

40 Méthode quand le théorème d'IPP ou le CV ne peut pas s'appliquer partout : deux exemples

Recherche d'une primitive d'$Arcsin$

$Arcsin$ est continue sur $[-1,1]$. Donc , $F: (x \mapsto \int_0^x \text{Arcsin}(t)\,dt)$ est une primitive de $Arcsin$.
Calculons $F(x) = \int_0^x \text{Arcsin}(t)\,dt$. Je souhaite appliquer le TIPP avec $u(t) = Arcsin(t)$ et $v(t) = t$. u' n'étant définie et continue que sur$]-1,1[$, je vais fixer $x \in]-1,1[$. Alors , $F(x) = \int_0^x 1 \times \text{Arcsin}(t)\,dt = [t \times \text{Arcsin}(t)]_1^x - \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt$. Donc,$\forall$ $x \in]-1,1[$, $F(x) = xArcsin(x) + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{-2t}{\sqrt{1-t^2}}dt = xArcsin(x) + \sqrt{1-x^2} - 1$. De plus, F est continue en 1 et en -1; donc, $F(1) = \lim_{x \to 1^-} F(x) = \lim_{x \to 1^-} xArcsin(x) + \sqrt{1-x^2} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1$. Idem en$-1$.
Ainsi, $\forall\, x \in [-1,1]$, $F(x) = xArcsin(x) + \sqrt{1-x^2} - 1$.
Posons $G = F - 1$. Alors, $G: \left(x \mapsto xArcsin(x) + \sqrt{1-x^2}\right)$ est une autre primitive (plus simple) de $Arcsin$ sur $[-1,1]$.
Rque : G étant une primitive de $Arcsin$ sur [-1,1] , G est alors dérivable en -1 et en 1 (ce qui n'est pas évident lorsqu'on regarde son expression contenant $Arcsin$ et $\sqrt{x^2-1}$ non dérivables ni en 1 et ni en -1) et $G'(1) = Arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$ et $G'(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

Calcul de $I = \int_0^1 t\ln(t)dt$.

<u>Existence :</u> Posons $f: \left(t \mapsto \begin{cases} t\ln(t) si\ t \in]0,1] \\ 0\ si\ t = 0 \end{cases}\right)$. f est continue sur [0,1] ; donc, $I = \int_0^1 f(t)dt$ existe .
<u>Calcul</u> : la méthode préconisée pour intégrer le produit d'un polynôme et d'un logarithme est l'intégration par parties en posant $u(t) =$ une primitive du polynôme et $v(t) = ln(t)$. Mais $v = ln$ n'est pas dérivable sur [0,1] , donc je ne peux pas appliquer le $TIPP$ sur [0,1] mais je peux l'appliquer sur $[x, 1]$ avec $x \in]0,1]$.
Posons $F: (x \mapsto \int_1^x t\ln(t)dt)$ une primitive $de\ f$ sur [0,1] (d'après le théorème fondamental).
Alors $I = F(1) - F(0) = -F(0)$. Or F est continue en 0 ; donc , $F(0) = \lim_{x \to 0^+} F(x)$. De plus,$\forall x \in]0,1]$,

$$F(x) = \int_1^x t\ln(t)dt \underset{\substack{IPP \\ u(t)=\frac{t^2}{2}\ et\ v(t)=\ln(t) \\ C^1 sur\ [x,1]\ et \\ u'(t)=t\ et\ v'(t)=\frac{1}{t}}}{=} \left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^2}{2} \times \frac{1}{t}dt = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\int_1^x t\,dt = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^x.$$

Donc, $\forall x \in]0,1]$, $F(x) = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}$. Alors , $F(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Ainsi , $I = -\frac{1}{4}$.
<u>Contrôle qualité</u> : sur $[0,1]$, $t\ln(t) \le 0$, donc $I \le 0$. OK!!

41 POUR ALLER PLUS LOIN :

$\sqrt{x^2+1}$ ou $P(x)\sqrt{x^2+1}$ où P polynomiale.	Faire le CV : $x = sh(t)$ Appliquer les formules de trigo hyperboliques ou remplacer par des exponentielles.
$\sqrt{x^2-1}$ ou $P(x)\sqrt{x^2-1}$ où P polynomiale.	Faire le CV : $x = ch(t)$ Appliquer les formules de trigo hyperboliques ou remplacer par des exponentielles
$\sqrt{1-x^2}$ ou $P(x)\sqrt{1-x^2}$ où P polynomiale.	Faire le CV : $x = sin(t)$ puis linéariser
$\sqrt{x^2+ax+b}$	Ecrire $x^2+ax+b\ sous\ la\ forme\ [\left(\frac{x+\beta}{\gamma}\right)^2 \pm 1]$ Faire le CV : $t = \frac{x+\beta}{\gamma}$ pour se ramener à$\sqrt{t^2 \pm 1}$
$\sqrt{-x^2+ax+b}$	Ecrire $-x^2+ax+b\ sous\ la\ forme\ [1 - \left(\frac{x+\beta}{\gamma}\right)^2]$ Faire le CV : $t = \frac{x+\beta}{\gamma}$ pour se ramener à$\sqrt{1-t^2}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+ax+b}}$ $avec\ a, b\ réels$	**OBJECTIF : faire apparaitre $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ ou $\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$ à intégrer** Ecrire $de\ x^2+ax+b\ sous\ la\ forme\ canonique\ [\left(\frac{x+\beta}{\gamma}\right)^2 \pm 1]$ Faire le changement de variable $t = \frac{x+\beta}{\gamma}$
$\frac{1}{\sqrt{-x^2+ax+b}}$ $avec\ a, b\ réels, a^2+4b > 0$	**OBJECTIF : faire apparaitre $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ à intégrer** Ecrire $-x^2+ax+b\ sous\ la\ forme\ [1 - \left(\frac{x+\beta}{\gamma}\right)^2]$ Faire le CV : $t = \frac{x+\beta}{\gamma}$

42Méthode pour intégrer les fonctions de la forme $\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$,où a, b, c réels et a non nul.

Suivant le signe de a, en mettant $\sqrt{|a|}$, on se ramène à intégrer une fonction de la forme $g : \left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pm x^2+\alpha x+\beta}}\right)$ où α et β constantes. Ensuite on reconnait une dériver usuelle ou on fait un bon CV.

Calculons $I = \int_1^2 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}}_{=g(x)} dx$.

g est continue sur [1,2] donc I existe. $4x - x^2 = -[x^2 - 4x] = -[(x-2)^2 - 4] = 4\left[1 - \frac{1}{4}(x-2)^2\right] = 4\left[1 - \left(\frac{x}{2} - 1\right)^2\right]$.

Donc, $I = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{4\left[1-\left(\frac{x}{2}-1\right)^2\right]}} dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}} dx \underbrace{=}_{\substack{CV \\ u=\frac{x}{2}-1 \\ du=\frac{1}{2}dx \\ .dx=2du \\ x=1\Leftrightarrow u=-\frac{1}{2} \\ x=2\Leftrightarrow u=0}} \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} 2\, du = \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = [Arcsin(x)]_{-\frac{1}{2}}^0 = \frac{\pi}{6}$.

Calculons $I = \int_1^2 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}}_{=g(x)} dx$.

g est continue sur [1,2] donc I existe. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left[4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 1\right] = \frac{1}{4}[(2x+1)^2 - 1]$. Donc,

$I = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}[(2x+1)^2-1]}} dx = 2\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{(2x+1)^2-1}} dx \underbrace{=}_{\substack{CV \\ u=2x+1 \\ du=2dx \\ .dx=\frac{1}{2}du \\ x=1\Leftrightarrow u=3 \\ x=2\Leftrightarrow u=5}} \frac{1}{2}\int_3^5 \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{1}{2} du = \frac{1}{4}\int_3^5 \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} du = [\ln(u + \sqrt{u^2-1})]_3^5 = ln\left(\frac{5+2\sqrt{6}}{3+2\sqrt{2}}\right)$

43Méthode pour intégrer les fonctions de la forme $\sqrt{\pm x^2 \pm 1}$. (fait en cours)

Recherche d'une primitive de $f : (u \mapsto \sqrt{1-u^2})$.

f est continue sur l'intervalle $[-1; 1]$ donc admet des primitives sur cet intervalle et $F: (x \mapsto \int_0^x \sqrt{1-u^2} du)$ est la primitive sur cet intervalle qui s'annule en 0.

$$\forall x \in [-1; 1], F(x) = \int_0^x \sqrt{1-u^2} du \underbrace{=}_{\substack{comme\ u\in[-1,1], \\ on\ pose\ u=\sin(\theta) \\ avec\ \theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ ie.\theta=Arcsin(-x) \\ du=\cos(\theta)d\theta \\ u=0\Leftrightarrow\theta=0 \\ u=x\Leftrightarrow\theta=Arcsin(x)}} \int_0^{Arcsin(x)} \sqrt{1-(sin\theta)^2}\cos(\theta)\, d\theta = \int_0^{Arcsin(x)} \sqrt{cos^2\theta}\cos(\theta)\, d\theta$$

$$\underbrace{=}_{\substack{car\ \cos(\theta)\geq 0 \\ quand\ \theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}} \int_0^{Arcsin(x)} \cos^2(\theta)d\theta = \int_0^{Arcsin(x)} \frac{\cos(2\theta)+1}{2} d\theta = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2\theta)}{2} + \theta\right]_0^{Arcsin(x)} = \frac{\sin(2Arcsin(x))}{4} + \frac{Arcsin(x)}{2} = \frac{x\sqrt{1-x^2}+Arcsin(x)}{2}$$

Alors, $\forall x \in [-a; a]$, $\int_0^x \sqrt{a^2-t^2}dt = a\int_0^x \sqrt{1-\left(\frac{t}{a}\right)^2}dt \underbrace{=}_{\substack{u=\frac{t}{a} \\ adu=dt \\ t=0\Leftrightarrow u=0 \\ t=x\Leftrightarrow u=\frac{x}{a}}} a^2\int_0^{\frac{x}{a}} \sqrt{1-u^2}du = a^2\frac{\frac{x}{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}+Arcsin\left(\frac{x}{a}\right)}{2} = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}+a^2Arcsin\left(\frac{x}{a}\right)}{2}$.

Recherche d'une primitive de $f : (u \mapsto \sqrt{1+u^2})$.

f est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$ donc admet des primitives sur cet intervalle et $F: (x \mapsto \int_0^x \sqrt{1+u^2}du)$ est la primitive sur cet intervalle qui s 'annule en 0.

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x \sqrt{1+u^2}du \underbrace{=}_{\substack{u=sh(\theta)\ i.e.\theta=\ln(u+\sqrt{1+u^2}) \\ du=ch(\theta)d\theta \\ u=0\Leftrightarrow\theta=0 \\ u=x\Leftrightarrow\theta=\ln(x+\sqrt{1+x^2})}} \int_0^{\ln(x+\sqrt{1+x^2})} \sqrt{1+(sh\theta)^2}\,ch(\theta)\, d\theta =$$

$$\int_0^{\ln(x+\sqrt{1+x^2})} \sqrt{ch^2\theta}\,ch(\theta)\, d\theta \underbrace{=}_{car\ ch(\theta)\geq 0} \int_0^{\ln(x+\sqrt{1+x^2})} ch^2(\theta)d\theta = \int_0^{\ln(x+\sqrt{1+x^2})} \frac{ch(2\theta)+1}{2} d\theta$$

Donc, $\int_0^x \sqrt{1+u^2}du = \frac{1}{2}\left[\frac{sh(2\theta)}{2} + \theta\right]_0^{\ln(x+\sqrt{1+x^2})} = \frac{sh\left(2\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right)}{4} + \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2} = \frac{x\sqrt{1+x^2}+\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2}$.

Recherche d'une primitive de $f : (u \mapsto \sqrt{u^2-1})$.

f est continue sur les intervalles $]-\infty, -1]$ et $[1, +\infty[$ donc admet des primitives sur chacun de ces intervalles et $F: (x \mapsto \int_{-1}^x \sqrt{u^2-1}du)$ est la primitive de f sur $]-\infty, -1]$ qui s'annule en -1.

$\forall x \in]-\infty,-1]$, $\int_{-1}^{x}\sqrt{u^2-1}du \underbrace{=}_{\substack{\text{Comme } u\leq -1, \text{on peut poser } u=-\mathrm{ch}(\theta) \text{ avec } \theta\in\mathbb{R}^+ \\ i.e.\ \theta=\ln\left(-u+\sqrt{u^2-1}\right) \\ du=-\mathrm{sh}(\theta)d\theta \\ u=-1\Leftrightarrow\theta=0 \\ u=x\Leftrightarrow\theta=\ln\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right)}} \int_0^{\ln\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right)}\sqrt{ch^2(\theta)-1}\,(-\mathrm{sh}(\theta))\,d\theta =$

$-\int_0^{\ln\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right)}\sqrt{sh^2\theta}\,\mathrm{sh}(\theta)\,d\theta \underbrace{=}_{\substack{car\ \ln\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right)<0 \\ \text{donc } \mathrm{sh}(\theta)\leq 0}} -\int_0^{\ln\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right)}\mathrm{sh}^2(\theta)d\theta = -\int_0^{\ln\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right)}\frac{\mathrm{ch}(2\theta)-1}{2}d\theta$

$=-\frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{sh}(2\theta)}{2}-\theta\right]_0^{\ln\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right)} = -\frac{\mathrm{sh}\left(2\ln\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right)\right)}{4}+\frac{\ln\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right)}{2} \underbrace{=}_{\downarrow car} \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1}+\ln\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right)\right).$

$$\mathrm{sh}\left(\ln\left(\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right)^2\right)\right)=\frac{1}{2}\left(e^{\ln\left(\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right)^2\right)}-e^{-\ln\left(\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right)^2\right)}\right)=\frac{1}{2}\left(\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right)^2-e^{\ln\left(\frac{1}{\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right)^2}\right)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right)^2-\frac{1}{\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right)^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{x^2-1-x^2}\right)^2\right)=\frac{1}{2}\left(\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)^2\right)=-2x\sqrt{x^2-1}.$$

44Méthode pour intégrer une fonction de la forme $f:\left(x\mapsto\sqrt{ax^2+bx+c}\right)$.

Suivant le signe de a, en mettant $\sqrt{|a|}$, on se ramène à intégrer une fonction de la forme $g:\left(x\mapsto\sqrt{\pm x^2+\alpha x+\beta}\right)$ où α et β constantes

Calculons $I=\int_0^1\underbrace{\sqrt{x-x^2}}_{=g(x)}dx$.

g est continue sur [0,1] donc I existe.

$x-x^2=-[x^2-x]=-\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]=\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left[1-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right]=\frac{1}{4}[1-(2x-1)^2].$

Donc, $I=\int_0^1\sqrt{\frac{1}{4}[1-(2x-1)^2]}\,dx=\int_0^1\frac{1}{2}\sqrt{1-(2x-1)^2}\,dx \underbrace{=}_{\substack{CV \\ u=2x-1 \\ du=2dx\ i.e. dx=\frac{1}{2}du \\ x=0\Leftrightarrow u=-1 \\ x=1\Leftrightarrow u=1}} \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}\,\frac{1}{2}\,du=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}\,du \underbrace{=}_{\substack{CV \\ u=\sin(t)}}$ ..

Calculons $I=\int_0^1\underbrace{\sqrt{x^2-3x+5}}_{=g(x)}dx$.

g est continue sur [0,1] donc I existe.

$x^2-3x+5=\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]+5=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}=\frac{11}{4}\left[\frac{4}{11}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+1\right]=\frac{11}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{11}}\left(x-\frac{3}{2}\right)\right)^2+1\right]$. Donc, $I=$

$\int_0^1\sqrt{\frac{11}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{11}}\left(x-\frac{3}{2}\right)\right)^2+1\right]}\,dx=\frac{\sqrt{11}}{2}\int_0^1\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{11}}\left(x-\frac{3}{2}\right)\right)^2+1}\,dx \underbrace{=}_{\substack{CV \\ u=\frac{2}{\sqrt{11}}\left(x-\frac{3}{2}\right) \\ du=\frac{2}{\sqrt{11}}dx\ i.e. dx=\frac{\sqrt{11}}{2}du \\ x=0\Leftrightarrow u=-\frac{3}{\sqrt{11}} \\ x=1\Leftrightarrow u=\frac{-1}{\sqrt{11}}}} \frac{\sqrt{11}}{2}\int_{-\frac{3}{\sqrt{11}}}^{\frac{-1}{\sqrt{11}}}\sqrt{u^2+1}\,\frac{\sqrt{11}}{2}\,du \underbrace{=}_{\substack{CV \\ u=\mathrm{sh}(t)}} (\ldots.).$