TD 7 Calcul intégral et un peu plus !

Ex 1 A. Calculer les intégrales I ou primitives F suivantes : $\alpha \in \mathbb{R}, (n,m) \in \mathbb{N}^2, x \in \mathbb{R}$.

1. $I = \int_{\ln(4)}^{\ln(2)} (3e^{-\frac{x}{4}} + 1)^2 dx$
2. $I = \int_1^2 e^u \left(\frac{1}{u} + \ln(u)\right) du$
3. $I_\alpha = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln^\alpha(x)}$
4. $I = \int_{e^3}^{e^2} \frac{dx}{x\ln(x)\ln(\ln(x))}$
5. $I = \int_0^1 (1 + \frac{1}{4}x)^3 dx$
6. $F(x) = \int_.^x \sqrt{\theta} + \frac{1}{\sqrt{\theta}} d\theta$
7. $I_{(x)} = \int_{2x}^x t^{x^2} e^x dt$
8. $I = \int_0^1 te^{3t^2} dt$
9. $I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}Arcsin(x)} dx$
10. $F(t) = \int_.^t \frac{5}{cos^2(3z)} dz$
11. $I = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (cos^5 y + 4cos^3 y - 7)\sin(y)\, dy$
12. $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\sin(t))^5 dt$
13. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin(3t))^2 dt$
14. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(2x)\, sin^6(2x) dx$
15. $I = \int_0^\pi \sin(nt)\sin(mt) dt$
16. $I = \int_\pi^{2\pi/3} \frac{sint}{\sqrt{\cos(2t)+1}} dt$
17. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(2t)\tan(t) dt$
18. $F(x) = \int^x ch(3t)sh(t) dt$
19. $I = \int_0^1 \frac{Arctan(t)}{1+t^2} dt$
20. $I = \int_0^1 e^t \sin(e^t)\, dt$
21. $I(x) = \int_.^x xsh(tx) dt$
22. $I = \int_0^1 e^{2t} sh(t) dt$
23. $I = \int_0^1 \frac{1}{1-it} dt$
24. $F(x) = \int_.^x \frac{\ln(t)}{t(1+\ln(t^2))} dt$
25. $I = \int_1^2 \frac{1}{t}\sqrt{2 + \ln(t)} dt$

B. Idem. On pourra utiliser la parité de l'intégrande et/ou simplifier son expression sur l'intervalle d'intégration.

26. $I = \int_{-1}^1 e^{-|u|} du$
27. $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{e^{x^3} - e^{-x^3}}{\ln(3+\cos(\tan(x)))} dx$

Ex 2 Calculer les intégrales suivantes en appliquant le théorème d'intégration par parties ou passage en cpxe (ou rien ?)

1. $I = \int_0^1 (5u^2 + 3)ch(2u) du$
2. $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} (5t - 1)sin^3(2t) dt$
3. $I = \int_1^2 \ln^2(y) dy$
4. $I = \int_0^\pi \cos(2t)e^{-t} dt$
5. $I = \int_{-1}^{\sqrt{3}} 2t^3 Arctan(t) dt$
6. $I = \int_2^1 t^2 \ln(4t)\, dt$
7. $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (3t - t^3)\sin(4t) dt$
8. $I = \int_0^{\pi/4\pi} e^t(\sin(t) - \cos(t))\, dt$
9. $F(y) = \int^y Arccos(t) dt$
10. $I = \int_0^\pi tsin(t)e^t dt$
11. $I = \int_0^1 a^3 e^{-a^2/2} da$
12. $I = \int_1^2 \cos(\ln(t)) dt$
13. $I = \int_1^2 \frac{\omega\ln(\omega)}{(1+\omega^2)^2} d\omega$ (on écrira $\frac{1}{\omega(1+\omega^2)} = \frac{a}{\omega} + \frac{b\omega+c}{1+\omega^2}$ où a, b, c $cstes$)

Ex 3 Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \int_1^2 \frac{3}{1-4t} dt$
2. $I = \int_{-4}^{-2} \frac{1-x}{3x-2} dx$
3. $I = \int_0^{-1} \frac{4}{(1-2x)^7} dx$
4. $I = \int_0^1 \frac{x^6-1}{1+2x} dx$
5. $I = \int_{-2}^{-3} \frac{1}{t(t^2-1)} dt$
6. $F(x) = \int_.^x \frac{4t-5}{t^2+3t+2} dt$
7. $I = \int_{-1}^0 \frac{t^3}{5+3t^2} dt$
8. $I = \int_{-5/\sqrt{3}}^0 \frac{1}{25+9t^2} dt$
9. $I = \int_1^0 \frac{x^3}{x^2+1} dx$
10. $I = \int_1^0 \frac{x}{(x^2+1)^3} dx$
11. $I = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt$
12. $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2} dt$
13. $I = \int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{t^2}{1+4t^2} dt$
14. $I = \int_{-\frac{1}{4}}^0 \frac{t^2+t}{1-4t^2} dt$
15. $I = \int_0^{-1} \frac{1}{2+t+t^2} dt$
16. $I = \int_0^1 \frac{2t-1}{2-t+t^2} dt$
17. $I = \int_0^1 \frac{t^2-3t}{2t^2+t+1} dt$
18. $I = \int_0^1 \frac{2t^3+3t+4}{t^2-t+1} dt$

Ex 4 Calculer à l'aide de changements de variables les intégrales suivantes :

1. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^4(t) dt$ (CV : $x = tan(t)$)
2. $I = \int_3^4 \frac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx$ (CV : $t = 1 + x^2$)
3. $I = \int_{1/2}^0 e^{\sqrt{u}} du$ (CV : $x = \sqrt{u}$)
4. $I = \int_0^1 x^2 Arccos(x) dx$
5. $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{sin(x)}$ (CV : $t = cos(x)$)
6. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+sin(x)}$ (CV : $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$).
7. $I = \int_0^\pi \frac{dx}{1+cos^2(x)}$ (CV : $t = \tan(x)$)
8. $I = \int_1^2 \frac{1+\sqrt{1+t}}{\sqrt{1+t}-1} dt$
9. $I = \int_{1/2}^0 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} dt$ (CV : $t = cos^2(x)$)
10. $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+ch(x)}$
11. $I = \int_{1/2}^0 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} dt$ (CV : $t = cos^2(x)$)
12. $F(y) = \int_0^y \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$
13. $I_2 = \int_0^\pi \frac{1}{1+sinx} dx$ (CV:$u=tan\left(\frac{x}{2}\right)$)

Ex 5 Calculer à l'aide de changements de variables ou pas les intégrales ou primitives suivantes :

1. $I = \int_0^1 \frac{2t+1}{\sqrt[5]{t^2+t+1}} dt$
2. $I = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2-3x}} dx$
3. $I = \int_0^{-1} (1 - 2\alpha)^{\frac{4}{7}} d\alpha$
4. $I = \int_0^{1/2} \frac{t-3}{\sqrt{1-t^2}} dt$
5. $I = \int_2^3 \frac{t}{\sqrt{t-1}} dt$
6. $\int_.^x \frac{1-5t}{\sqrt{2t-1}} dt$
7. $I = \int_1^0 \theta\sqrt{1-\theta} d\theta$
8. $I = \int_0^1 (1 + 3t)\sqrt[8]{3 - 2t} dt$
9. $I = \int_1^0 t\sqrt{1-t^2} dt$
10. $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-t^2}} dt$
11. $I = \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$ (CV : t=?)
12. $I = \int_1^2 \sqrt{t^2-1} dt$ (CV : $t = chx$)
13. $\int_.^x \sqrt{4t^2+9}\, dt$ $(CV : t = ??)$
14. $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-4t^2} dt$
15. $I = \int_0^{\frac{1}{2}} t^2\sqrt{1-t^2} dt$

16. $I=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}dx$. On fera pour cela un bon changement de variable aboutissant à intégrer $\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$.
17. $I=\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{4}}\sqrt{-x-x^2}dx$. On fera pour cela un bon changement de variable aboutissant à intégrer$\sqrt{1-u^2}$.
18. $I=\int_a^b\sqrt{(x-a)(b-x)}dx$ où a,b réels tels que $a<b$. On pourra effectuer le CV : $u=x-\frac{a+b}{2}$.
19. $I=\int_0^1\sqrt{t^2-t+1}dt$.

Ex 6 Trouver une primitive des fonctions f suivantes :

1. $f:(x\mapsto\sqrt{x^2-x})$
2. $f:(x\mapsto\frac{1+x}{(3+2x+x^2)^{2017}})$
3. $f:(x\mapsto\frac{x}{1+x})$
4. $f:(x\mapsto\frac{x^5-2x^2+6}{2-x})$
5. $f:(t\mapsto\frac{t^4-t+1}{2+t+t^2})$
6. $f:(x\mapsto xArcsin(x))$
7. $f:(x\mapsto xcos(2x)e^{-x})$
8. $f:(x\mapsto\frac{1}{x(1+\ln(x))^2})$
9. $f:(y\mapsto\frac{1}{\cos(y)})$
10. $f:(x\mapsto\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}})$
11. $f:(x\mapsto\frac{\ln(x)}{2x})$
12. $f:(x\mapsto\frac{1}{(1+x^2)^3})$
13. $f:(x\mapsto e^{(x+e^x)})$
14. $f:(r\mapsto\frac{r}{r^2+6r-7})$
15. $f:(x\mapsto 2^x)$

Ex 7 A vous de jouer, de tenter ! 0) Calculer $I=\int_0^1 e^{Arccos(x)}dx$.

1) Soit $I=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{dx}{sinx+\sin(2x)}$. Montrer que $I=\int_0^{1/2}\frac{du}{(1-u)(1+u)(1+2u)}$. En déduire la valeur de I.
2) Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(cosx)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)dx$). En déduire la valeur de $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan(x))\,dx$
3) Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et telle que : $\forall x\in[a,b], f(a+b-x)=f(x)$. Calculer $I=\int_a^b xf(x)dx$ en fonction de $J=\int_a^b f(x)dx$ .Application : Calculer $I_2=\int_0^{\pi}\frac{xsinx}{1+cos^2x}dx$ $\left(\text{CV: } u=?? \text{ ou forme connue}\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}\right)$.
4) Déterminer une primitive de $f:(x\mapsto\cos(x)\ln(1+\cos(x)))$ sur $]-\pi,\pi[$. On pourra faire une IPP.
5) Soit $I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)Arctan(x)dx$. Montrer, en effectuant le CV $u=\frac{1}{x}$, que : $I=\frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1+u^2}{u^2}du-I$. En déduire I.
6) Déterminer toutes les primitives de $f:\left(x\mapsto\frac{1}{2+sin^2(x)}\right)$. On pourra effectuer le CV : $u=tan(x)$.
7) Soit $I=\int_{-1}^{-2}\frac{\sqrt{1+r^2}}{r}dr$. Montrer que $I=\int_{\ln(\sqrt{2}-1)}^{\ln(\sqrt{5}-2)}\frac{ch^2(t)}{sh(t)}dt=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{5}-2}1-\frac{1}{u^2}+\frac{2}{u-1}-\frac{2}{u+1}du$. En déduire I .
8) Soit $f:[5,7]\to\mathbb{R}$ continue . Calculer $I=\int_2^4\frac{f(9-x)}{f(9-x)+f(3+x)}dx$.
9) Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(t)}{\cos(t)+\sin(t)}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(u)}{\sin(u)+\cos(u)}du=\frac{\pi}{4}$.

Ex 8 $\forall n\in\mathbb{N}^*$, on pose $I_n=\int_0^1\frac{1}{(1+t^2)^n}dt$.

1. Etablir une relation entre I_n et I_{n+1}.
2. En déduire $I=\int_0^1\frac{1}{t^4+2t^2+1}dt$,$J=\int_0^1\frac{t^2}{(1+t^2)^3}dt$ et $K=\int_0^1\frac{1}{(1+t^2)^4}dt$.
3.

Ex 9 $\forall n\in\mathbb{N}$, on pose $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^n t dt$. **INTEGRALE DE WALLIS**

a. Montrer que: $(n+2)J_{n+2}=(n+1)J_n$. En déduire une expression de J_n à l' aide de factorielles.
b. Montrer que (J_n) est décroissante et minorée donc (J_n) est .... On note L sa limite finie.
c. Montrer que $\forall n,(n+1)J_nJ_{n+1}=\frac{\pi}{2}$
d. En déduire que $L=0$.

Ex 10 $\forall n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n=\int_0^1(1-t^2)^n dt$.

$a.$ Déterminer une expression de I_n à l'aide de la formule du binôme .
b. Exprimer I_n en fonction de I_{n-1} . En déduire une autre expression de I_n.
c. Donner alors une formule sommatoire .
d. Montrer que (I_n) est convergente .

Ex 11 Pour tout $n\in\mathbb{N}$,on pose $I_n=\int_0^1\frac{t^n}{\sqrt{1+t}}dt$.

a. Calculer I_0, I_1 et I_2 .
b. Etudier la monotonie et la convergence de (I_n). Trouver sa limite.
c. Déterminer la limite quand $n\to+\infty$ de (nI_n) grâce à une IPP. En déduire un équivalent simple de I_n en $+\infty$.
d. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n et vérifier la cohérence avec les limites obtenues aux questions b et c

Ex 12 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, On pose $I_n = \int_1^e x(lnx)^n dx.$

a. Calculer $I_0, I_1 \; et \; I_2$.
b. Etablir une relation de récurrence entre $I_n \; et \; I_{n+1}$.
c. Montrer que la suite (I_n) est convergente.

Ex 13 Dérivation de fonctions définies par un intégrale. Limite par taux d'accroissement.

1. Déterminer $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}\int_1^x e^{-t^2} dt$.
2. Soit f une fonction continue sur [0,1]. Calculer $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.
3. $F: \left(x \mapsto x\int_1^x \frac{e^t-1}{1+5t^2} dt\right)$ est une primitive de quelle fonction sur $\mathbb{R}$?
4. Montrer que $F: \left(x \mapsto \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{e^{-t}}{t} dt\right)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$et donner sa dérivée.
5. Montrer que la fonction $\left(x \mapsto \int_0^x \frac{\sin(xt)}{t} dt\right)$est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer cette dérivée.
6. Montrer que f : $\left(x \mapsto \int_0^{sin^2x} Arcsin(\sqrt{t})dt + \int_0^{cos^2x} Arccos(\sqrt{t})dt\right)$ est constante (par deux méthodes).

Ex 15 Limite par encadrement d'une fonction définie par un intégrale.

1. Déterminer $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x-1}\int_1^x e^{-t^2} dt$.
2. Etude de la limite en 0 des fonctions $\left(x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt\right)$ et $\left(x \mapsto \int_x^{3x} \frac{\sin(2t)}{t} dt\right)$.

Ex 16 Fonction définie par une intégrale Soit $\varphi(t) = \frac{1}{\ln(t)} \; et \; f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt.$

1. Déterminer le domaine de définition et celui de continuité de φ.
2. Monter que $\forall x \in]0,1[, f(x)$ existe. Monter que $\forall x \in]1,+\infty[, f(x)$ existe. Ainsi, $D_f = D\varphi =]0,1[\cup]1,+\infty[$.
3. Justifier que φ admet une primitive G sur l'intervalle $]0,1[$ et une primitive H sur l'intervalle $]1,+\infty[$.
4. Soit $x \in]0,1[$. Exprimer $f(x)$ à l'aide de $G, x \; et \; x^2$. En déduire que f est de classe C^1 sur $]0,1[$ et exprimer $f'(x)$ à l'aide de $\varphi, x \; et \; x^2$. En déduire les variations de f sur $]0,1[$.
5. Faire de même sur l'intervalle $]1,+\infty[$.
6. Soit $x \in]0,1[$.Montrer que : $\frac{x^2-x}{2\ln(x)} \leq f(x) \leq \frac{x^2-x}{\ln(x)}$. En déduire les limites de f en 0.
7. Soit $x \in]1,+\infty[$.Montrer que : $\frac{x^2-x}{2\ln(x)} \leq f(x) \leq \frac{x^2-x}{\ln(x)}$. En déduire les limites de f en $+\infty$.
8. Soit $x \in]1,+\infty[$.Montrer que $\forall t \in [x,x^2], 0 < \frac{1}{t-1} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{x^2}{t-1}$. En déduire la limite de f en 1^+.
9. Faire de même en 1^- et conclure.

Ex 17 Un autre fonction définie par un intégrale.

4. Soit f la fonction définie sur **R*** par : $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(1+t^2)}$.
   a. Montrer que f est impaire.
   b. Etudier les variations de f.
   c. Montrer que : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \; et \; \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.
5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$et déterminer sa limite en 0 et sa limite en $+\infty$.

Ex 18 Une dernière fonction définie par un intégrale très différente.

Soit Φ la fonction définie par : $\Phi(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2} dt$.

a. Déterminer $D_\Phi$et calculer $\Phi(0)$.
b. Montrer que :$\forall x > 0, \frac{\pi}{4}e^{-2x} \leq \Phi(x) \leq \frac{\pi}{4}e^{-x}$ .En déduire la limite de Φ en $+\infty$ et la branche infinie $C_\Phi \; en + \infty$.
c. Faites de même en $-\infty$.
d. Etudier les variations de Φ et représenter son graphe.