Programme de colle 10

Chap. 7 Calcul intégral et recherche de primitive

1. Partie réelle , partie imaginaire, limite, continuité, dérivation, fonction dérivée, primitive d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Dérivée et primitive de $(t \mapsto e^{at})$ où $a \in \mathbb{C}^*$.
2. Définition géométrique de l'intégrale sur un segment d'une fonction continue réelle. Définition de l'intégrale sur un segment d'une fonction complexe et continue sur ce segment, Définition de l'intégrale sur un segment d'une fonction continue sur l'intérieur de ce segment et prolongeable par continuité aux bords du segment. Définition de l'intégrale de telles fonctions entre des bornes non strictement croissantes.
3. Relation de Chasles, linéarité, positivité et croissance de l'opérateur intégral.
4. Théorème fondamental (TFI) de l'intégration : existence d'une primitive d'une fonction continue sur une intervalle et expression sous forme intégrale de la primitive s'annulant en un point fixé de cet intervalle.
5. Théorème fondamental du calcul intégral $(TFCI)$, théorème d'intégration par parties $(TIPP)$, théorème de changement de variables (TCV).
6. Primitives usuelles .
7. Calcul intégral ou recherche d'une primitive de fonctions de la forme :
   - ✓ Dérivées usuelles
   - ✓ $\frac{u'(x)}{u(x)}$, $u'(x)u(x)^{\alpha}$ où $\alpha \neq -1$, $\frac{u'(x)}{u(x)^{\alpha}} = u'(x)u(x)^{-\alpha}$ où $\alpha \neq 1$, $u'(x)e^{u(x)}$, $u'(x)\cos(u(x))$ ...
   - ✓ Produit d'une fonction $polynômiale$ et du $logarithme$ ou de l'$Arctangente$
   - ✓ Produit de fonctions $polynômiale$ et d'une fonction sinusoïdale ou exponentielle ou hyperbolique
   - ✓ Produit de fonctions exponentielle et d'une fonction sinusoïdale
   - ✓ Produit de fonctions sinusoïdales
   - ✓ $\frac{Q}{P}$ avec P et Q polynomiales
   - ✓ $(x \mapsto \sqrt{1-x^2})$, $\left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}\right)$. $(x \mapsto \sqrt{a^2-b^2x^2})$ où a et b réels non nuls.

Chapitre 8 Equations différentielles linéaires

I Généralités

1. Définitions :
   - ✓ Equation différentielle linéaire d'ordre n ($\boldsymbol{edln}$) : fonctions coefficients, fonction second membre, inconnue et variable d'intégration
   - ✓ Equation homogène associée
   - ✓ Solution d'une équation diff. sur un intervalle I sur lequel les fonctions coefficients et le second membre sont continues-courbe intégrale- solution réelle / solution complexe.
   - ✓ Résoudre ou intégrer une équa.diff.
2. Propriétés :
   - ✓ Solution d'une $\boldsymbol{edln}$ homogène : solution nulle et combinaison linéaire de deux solutions.
   - ✓ Principe de superposition
   - ✓ Passage en complexe.
3. Théorème fondamental de résolution d'une $\boldsymbol{edln}$ $(\boldsymbol{E})$: si (E) admet une solution particulière alors les solutions de (E) sont toutes les fonctions sommes de cette solution particulière et d'une solution de (EH).

II Résolution d'une edl 1 (E): $\alpha(x)y'(x) + \beta(x)y(x) = \gamma(x)$ tq α, β et γ fonctions continues sur un intervalle I

A. Résolution de (E) sur un intervalle $J \subset I$ sur lequel α ne s'annule pas.

Sur un tel intervalle J, (E) s'écrit $y'(x) + a(x)y(x) = d(x)$ et (EH) s'écrit $y'(x) + a(x)y(x) = 0$ où a et d fonctions continues sur un intervalle J.

1. Théorème de résolution d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 $(TRedlh_1)$.
2. Résolution de (EH) lorsque l'on connait une solution particulière non nulle de (EH).
3. Recherche d'une solution particulière de (E) :
   - ✓ Solution évidente
   - ✓ Solution de la forme de d ou autre essai !
   - ✓ Méthode de variation de la constante : méthode qui permet toujours de trouver une SP de (E) sur J et même toutes les solutions de (E) sur J.
4. Problème de Cauchy .

B. Résolution de (E) sur un intervalle I sur lequel α s'annule pas

Raccordement par continuité et dérivabilité des solutions.

Questions de cours : CONNAITRE TOUS LES ENONCES DES DEFINTIONS, PROPRIETES ET THEOREMES DU COURS. SAVOIR ENONCER et DEMONTRER :

- **Théorème fondamental du calcul intégral $TFCI$ (lien entre primitive et intégrale)**
- **Théorème d'intégration par parties.**
- **Théorème de changement de variables.**
- **Théorème fondamental de résolution d'une $edln$ (E): Soit J un intervalle sur lequel les fonctions coefficients et le second membre sont continues. Si f_0 est une solution particulière de (E) sur J alors les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme $f_0 + \varphi$ où φ solution de (EH) sur J.**
- **Théorème de résolution de (EH): $y'(x) + a(x)y(x) = 0$ sur un intervalle I sur lequel a est continue.**