

Equations différentielles linéaires

I Généralités $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Un élément de K est appelé un scalaire .

1. Définitions

Définition :

- Une **équation différentielle linéaire d'ordre n (edln)** est une équation de la forme :

$$(E): \alpha_n(x)y^{(n)} + \alpha_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + \alpha_1(x)y' + \alpha_0(x)y = \gamma(x)$$

ou

$$(E): \alpha_n(x)y^{(n)}(x) + \alpha_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + \alpha_1(x)y'(x) + \alpha_0(x)y(x) = \gamma(x)$$

où $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0, \gamma$ sont des fonctions connues, définies et continues sur un même intervalle J de \mathbb{R} et à valeurs dans K , α_n n'est pas la fonction nulle .

$\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0$ sont appelées les **fonctions coefficients** et γ est la **fonction second membre**.

y est la **fonction inconnue**, y' sa fonction dérivée, y'' sa dérivée seconde, ..., $y^{(n)}$ sa dérivée nième.

x est la variable d'intégration ou de dérivation.

- (E) est dite à **coefficients constants** lorsque les fonctions $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0$ sont constantes.

- L'**équation homogène** associée à (E) est l'équation différentielle

$$(EH): \alpha_n(x)y^{(n)} + \alpha_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + \alpha_1(x)y' + \alpha_0(x)y = 0$$

(le second membre d'une équation homogène est nul..... on entend parfois, par abus, sans second membre).

- Soit I un intervalle inclus dans J (éventuellement $I = J$).

Une **solution** de (E) sur I est toute fonction f continue et dérivable n fois sur I , à valeurs dans K et telle que : pour tout x de I , $\alpha_n(x)f^{(n)}(x) + \alpha_{n-1}(x)f^{(n-1)}(x) + \dots + \alpha_1(x)f'(x) + \alpha_0(x)f(x) = \gamma(x)$.

La courbe d'une solution de (E) sur I s'appelle une **courbe intégrale** sur I .

On dit que f est une solution complexe (resp. réelle) lorsque f est à valeurs dans \mathbb{C} (resp. \mathbb{R}).

- **Résoudre ou intégrer (E)** sur I c'est trouver toutes les solutions de (E) sur I .

NB : Puisque $I \subset J$, si f est solution de (E) sur J alors f est une solution de f sur I .

Lorsque les fonctions $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0, \gamma$ sont à valeurs réelles (resp. complexes) et que rien n'est précisé dans l'énoncé, on cherche les solutions réelles (resp. complexes).

Dans la suite, nous allons résoudre deux types d'équa. diff. linéaires particulières :

les **équations différentielles linéaires d'ordre 1** de la forme $y' + a(x)y = d(x)$ puis de la forme $\alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x)$.

les **équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants** de la forme $ay'' + by' + cy = d(x)$.

Exemples :

1) $(E) y'(x) = e^{ix}$ est une edl1. Les solutions de (E) sont toutes les primitives complexes de $(x \mapsto e^{ix})$, sont donc toutes les fonctions de la forme $(x \mapsto \frac{1}{i}e^{ix} + c)$ tq c constante complexe.

2) $(E): y'' = 1$ est une edl2. Les solutions de (E) sont toutes les fonctions linéaires i.e. de la forme $(x \mapsto ux + v)$ tq u et v constantes réelles.

3) Les équations différentielles $(E_1): xy'(x) + (y(x))^2 = 0$, $(E_2): y(x) + \ln(y'(x)) = 0$ et $(E_3): y'(x)y(x) = x$ sont d'ordre 1 (car elles ne font intervenir que y et y') mais ne sont pas linéaires (car elles contiennent y^2 , $\ln(y')$ ou $y' \times y$). On ne résoudra pas ces équations différentielles dans ce chapitre. Vous le ferez en chimie.

Voici la technique :

- Si y ne s'annule pas sur I , intervalle ne contenant pas 0, alors

$$y \text{ est solution de } (E_1) \text{ sur } I \Leftrightarrow \forall x \in I, \frac{y'(x)}{(y(x))^2} = \frac{-1}{y(x)} \Leftrightarrow \exists c \in \frac{\mathbb{R}}{\forall x} \in I \frac{-1}{y(x)} = -\ln|x| + c \text{ est solution de } (E_1) \text{ sur } I$$

dérivée de $\frac{1}{y(x)}$ deux primitives d'une même fonction sur un intervalle différent d'une cste

y est solution de (E_1) sur $I \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}/\forall x \in I, y(x) = \frac{1}{\ln|x|-c}$. En chimie, la résolution est terminée. En maths, on devra trouver une relation entre c et I et traiter le cas où y s'annule.

- On remarque que pour que y soit solution de (E_2) , il faut que $y' > 0$ ie y strictement croissante. Soit I un intervalle de \mathbb{R} sur lequel y est dérivable et strictement croissante.

$$y \text{ solution de } (E_2) \text{ sur } I \Leftrightarrow \forall x \in I, y(x) + \ln(y'(x)) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in I, e^{-y(x)} = y'(x) \\ \Leftrightarrow \forall x \in I, y'(x)e^{y(x)} = 1 \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}/\forall x \in I, e^{y(x)} = x + c \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}/\forall x \in I, y(x) = \ln(x + c)$$

- y solution de (E_3) sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I, y(x)y'(x) = x \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \frac{(y(x))^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}/\forall x \in I, |y(x)| = \sqrt{\frac{x^2}{2} + c}$.

En chimie, selon le signe de votre fonction inconnue y , vous choisirez $y(x) = \pm \sqrt{\frac{x^2}{2} + c}$.

En maths pour trouver toutes les solutions, nous devons discuteret c'est compliqué

- 4) En informatique, la **méthode d'Euler**, par exemple, permet une résolution numérique de la plupart des équations différentielles linéaires ou non.

2. Propriétés

5

Considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre n suivante :

$$(E): \alpha_n(x)y^{(n)} + \alpha_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + \alpha_1(x)y' + \alpha_0(x)y = \gamma(x)$$

où $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0, \gamma$ sont des fonctions connues, définies et continues sur un même intervalle J de \mathbb{R} et à valeurs dans K .

$$(EH): \alpha_n(x)y^{(n)} + \alpha_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + \alpha_1(x)y' + \alpha_0(x)y = 0$$

6

Proposition :

- (EH) admet toujours une solution : la fonction nulle.
- Toute combinaison linéaire de deux solutions de (EH) est solution de (EH) .

7

Proposition de Principe de superposition : Si f_1 est solution de $(E_1) : \alpha_n(x)y^{(n)} + \alpha_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + \alpha_1(x)y' + \alpha_0(x)y = d_1(x)$ et f_2 est solution de $(E_2) : \alpha_n(x)y^{(n)} + \alpha_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + \alpha_1(x)y' + \alpha_0(x)y = d_2(x)$ alors $f = f_1 + f_2$ est solution de $(E) : \alpha_n(x)y^{(n)} + \alpha_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + \alpha_1(x)y' + \alpha_0(x)y = d_1(x) + d_2(x)$.

8

Proposition de Passage en complexe:

On suppose ici que $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0$ sont à valeurs réelles et γ est à valeurs complexes. On note

$$(E_r): \alpha_n(x)y^{(n)} + \alpha_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + \alpha_1(x)y' + \alpha_0(x)y = \text{Re}(\gamma(x))$$

$$(E_c): \alpha_n(x)y^{(n)} + \alpha_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + \alpha_1(x)y' + \alpha_0(x)y = \text{Im}(\gamma(x))$$

Alors, f est solution de $(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Re}(f) \text{ est solution de } (E_r) \\ \text{et} \\ \text{Im}(f) \text{ est solution de } (E_c) \end{cases}$

9

Proposition de régularité des solutions : Soit $I \subset J$.

Si f est une solution de (E) sur I et α_n ne s'annule pas sur I alors f est de classe C^n sur I .

10

Théorème fondamental (TFedl) de résolution d'une équation différentielle linéaire: Si f_0 est une solution particulière de (E) alors les solutions de (E) sur J sont toutes les fonctions de la forme $f_0 + \varphi$ où φ est solution de (EH) sur J .

II Equations différentielles linéaires d'ordre 1

11

Soit $(E) : \alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x)$ où α, β, γ sont continues sur l'intervalle J et sont à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Les théorèmes de résolution ne sont valables que sur un intervalle sur lequel α ne s'annule pas.

pour résoudre (E) sur J , intervalle sur lequel α s'annule :

1. On résout (E) sur tout intervalle I inclus dans J , sur lequel α ne s'annule pas et le plus grand possible .

Sur cet intervalle I , l'équation (E) s'écrit : $y' + \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}y = \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)}$.

Autrement dit, sur I , $(E): y' + a(x)y = d(x)$ et $(EH): y' + a(x)y = 0$ où $a: I \rightarrow K$ et $d: I \rightarrow K$ sont continues.

La résolution de (E) sur I est traitée dans la suite du cours partie A.

2. On fait des raccords par continuité et dérivabilité aux points où s'annule la fonction α (partie B).

Une **solution réelle (resp. complexe)** de (E) sur J est toute fonction f définie, continue et dérivable sur J , à valeurs dans \mathbb{R} (resp. \mathbb{C}) et telle que : pour tout x de J , $\alpha(x)f'(x) + \beta(x)f(x) = \gamma(x)$.

12

Partie A : On considère un intervalle I inclus dans J sur lequel α ne s'annule pas.

Alors sur I , (E) et (EH) s'écrivent :

$$(E) : y' + a(x)y = d(x) \quad \text{et} \quad (EH) : y' + a(x)y = 0$$

où a et d sont des fonctions continues sur I et à valeurs dans K .

Une **solution réelle (resp. complexe)** de (E) sur I est toute fonction f définie, continue et dérivable sur I , à valeurs dans \mathbb{R} (resp. \mathbb{C}) et telle que : pour tout x de I , $f'(x) + a(x)f(x) = d(x)$.

13

Méthode pour résoudre $(E) : y' + a(x)y = d(x)$ sur I :

1. Résoudre $(EH) : y' + a(x)y = 0$.
2. Trouver une solution particulière f_0 de (E) .
3. Conclure en appliquant le théorème fondamental de résolution d'une équ. diff. linéaire (TFedl).

1. Résolution de (EH): $y' + a(x)y = 0$.

Théorème fondamental de résolution (1) de (EH) : $(EH): y' + a(x)y = 0$. Soit A une primitive de a sur I . Alors les solutions de (EH) sur I sont toutes les fonctions $(x \rightarrow ke^{-A(x)})$ telles que $k \in K$, k constante indépendante de x .

NB: $\{(x \rightarrow -k'e^{-A(x)}) / k' \in K\} = \{(x \rightarrow 7k''e^{-A(x)}) / k'' \in K\} = \{(x \rightarrow ke^{-A(x)}) / k \in K\}$.

Méthode pour résoudre (EH): $y' + a(x)y = 0$ sur I :

- 1) On cherche une primitive A de a sur I (intervalle sur lequel a est continue).
- 2) On simplifie si possible $e^{-A(x)}$ en utilisant : $e^{\delta \ln(u(x))} = e^{\ln((u(x))^\delta)} = u(x)^\delta$.
- 3) On applique le théorème de résolution de (EH) .

Exemples :

1) Résolvons l'équation différentielle : $\frac{e^x}{\alpha(x)} y' - \frac{x}{\beta(x)} y = 0$ sur \mathbb{R} . La fonction exponentielle ne s'annulant jamais, (E) s'écrit : $y' - \frac{xye^{-x}}{a(x)} = 0$.

(E) est homogène et $a: (x \rightarrow -xe^{-x})$ est continue sur \mathbb{R} donc le théorème précédent s'applique sur tout $I = \mathbb{R}$.

Cherchons une primitive de a : $F: (x \rightarrow \int_0^x -te^{-t} dt)$ est la primitive de a sur \mathbb{R} qui s'annule en 0. Cherchons une autre expression de $F(x)$:

$$F(x) = \int_0^x -te^{-t} dt = [te^{-t}]_0^x - \int_0^x e^{-t} dt = xe^{-x} + e^{-x} - 1.$$

Ainsi $F: (x \rightarrow xe^{-x} + e^{-x} - 1)$ est une primitive de a . Donc $A = F + 1$ en est une autre. Alors $A(x) = (x + 1)e^{-x}$ et $e^{-A(x)} = e^{-(x+1)e^{-x}}$.

Ainsi, les solutions de (EH) sont toutes les applications $(x \rightarrow ke^{-(x+1)e^{-x}})$ telles que k constante.

2) Résolvons l'équation différentielle : $\frac{\cos(x)}{\alpha(x)} y' - \frac{\sin(x)}{\beta(x)} y = \frac{\sin(2x) - \sin(x)}{\gamma(x)}$ sur $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. Sur I , α ne s'annule pas donc (E) s'écrit :

$$y' - \frac{\tan(x)}{a(x)} y = \frac{2 \sin(x) - \tan(x)}{d(x)}$$

et (EH) s'écrit : $y' - \tan(x)y = 0$. a et d sont continues sur I .

Résolution de (EH) : $A: (x \rightarrow \ln|\cos(x)|)$ est une primitive de a sur I

et $\forall x \in I, e^{-A(x)} = e^{-\ln|\cos(x)|} = e^{\ln(\frac{1}{|\cos(x)|})} = \frac{1}{\cos(x)}$. Donc les solutions de (EH) sur I sont toutes les fonctions de la forme

$$(x \rightarrow \frac{k}{\cos(x)}) \text{ telles que } k \text{ constante réelle.}$$

Recherche d'une solution particulière : $f_1: (x \rightarrow -\cos(x))$ est une solution particulière de $\cos(x)y' - \sin(x)y = \sin(2x)$ et $f_2: (x \rightarrow 1)$ est une solution particulière de $\cos(x)y' - \sin(x)y = -\sin(x)$. Donc, $f = f_1 + f_2$ ie $f: (x \rightarrow 1 - \cos(x))$ est une solution particulière de (E) par le principe de superposition.

Conclusion: Les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme $(x \rightarrow 1 - \cos(x) + \frac{k}{\cos(x)})$ telles que k constante réelle.

Exemple important : Soit $m \in K$ fixé (cste). Les solutions de $(EH): y' + my = 0$ sur \mathbb{R} sont toutes les fonctions $(x \rightarrow ke^{-mx})$ tel que $k \in K$, k constante indépendante de x .

Théorème de résolution (2) de (EH) : Si φ_0 est une solution non nulle de $(EH): y' + a(x)y = 0$ sur I , alors les solutions de (EH) sur I sont toutes les fonctions $(x \rightarrow k\varphi_0(x))$ telles que $k \in K$, k constante indépendante de x .

NB : si je trouve une solution particulière évidente de (EH) sur I , les autres solutions de (EH) sont les fonctions colinéaires à cette solution particulière.

Exemple : Résolvons $(EH): \cos(x)y' + \sin(x)y = 0$ sur $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. (EH) est une $edl1$, \cos ne s'annule pas sur I , \cos et \sin sont continus sur I . De plus, \cos est une solution évidente de (EH) sur I . Donc les solutions de (EH) sur I sont toutes les fonctions de la forme $k \times \cos$ telles que k cste réelle.

2. Recherche d'une solution particulière. Méthode de variation de la constante.

a. Méthode générale

Méthode pour rechercher une solution particulière de $(E): y' + a(x)y = d(x)$ sur I

- 1) Chercher une **solution évidente** (notamment une fonction constante).
- 2) **Essayer « n'importe quoi »enfin plutôt de la forme du second membre** (si d est polynomiale, resp. exponentielle, chercher une solution polynomiale, resp. exponentielle ...) !! Mais ce n'est pas sûr d'aboutir ! On peut superposer ou passer en complexe.
- 3) Appliquer la **méthode de variation de la constante** expliquée ci-dessous.

Exemple : Résoudre $(E): y'(x) + iy(x) = e^{ix}$. (E) est une $edl1$ à coefficients constants et second membre continue sur \mathbb{R} .

I. Résolution de (EH) : Les solutions de $(EH): y' + iy = 0$ sont toutes les fonctions $(x \rightarrow ke^{-ix})$ tel que $k \in \mathbb{C}$, k cste.

II. Recherche d'une SP de (E) : Je cherche une SP de la forme $f(x) = ce^{ix}$ avec c cste complexe. On a alors f dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = cie^{ix}$. Donc, f solution de (E) sur \mathbb{R} si et tssi $\forall x \in \mathbb{R}, cie^{ix} + ice^{ix} = e^{ix}$ si et tssi $\forall x \in \mathbb{R}, 2cie^{ix} = e^{ix}$ si et tssi $\forall x \in \mathbb{R}, 2ci = 1$ si et tssi $c = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$

Donc, $f_0(x \rightarrow -\frac{i}{2}e^{ix})$ est une SP de (E)

III_CCL : Les solutions de $(E) : y' + iy = e^{ix}$ sont toutes les fonctions $(x \rightarrow ke^{-ix} + \frac{1}{2i} e^{ix})$ tq $k \in \mathbb{C}$, k indépendante de x .

Exemple important : Soit $(m, q) \in K^2$ fixé (m, q cstes) et $(E) : y' + my = q$

Si $m \neq 0$ alors les solutions de (E) sur \mathbb{R} sont toutes les fonctions $(x \rightarrow ke^{-mx} + \frac{q}{m})$ tel que $k \in K$, k constante.

Si $m = 0$ alors les solutions de (E) sur \mathbb{R} sont toutes les fonctions $(x \rightarrow qx + k)$ tel que $k \in K$, k constante.

b. Méthode de variation de la constante (MVC) :

Lemme : Toute fonction f dérivable sur I peut toujours s'écrire sous la forme $f(x) = k(x)e^{-A(x)}$ où k fonction dérivable sur I . Il suffit pour cela de choisir k telle que $k(x) = f(x)e^{A(x)}$.

Pour appliquer cette méthode, il faut avoir préalablement résolu (EH) . Les solutions de (EH) sont de la forme $\varphi(x) = ke^{-A(x)}$ avec k constante.

La **méthode de variation de la constante (MVC)** consiste à chercher une solution particulière de (E) sur I sous la forme :

$f(x) = k(x)e^{-A(x)}$ où k fonction dérivable sur I . On obtient alors que :

$f : (x \mapsto k(x)e^{-A(x)})$ est solution de (E) sur I si et ssi k est une primitive de $g : (x \rightarrow d(x)e^{A(x)})$ sur I .

NB : il est parfois nécessaire de faire une *IPP* ou un *CV* pour trouver une primitive de $g : (x \mapsto d(x)e^{A(x)})$ dans la recherche d'une solution particulière de (E) sur I .

Théorème : la méthode de variation de la constante permet toujours de trouver une solution particulière de (E) sur I et même de résoudre entièrement (E) . (E) a donc toujours une solution particulière et toujours une infinité de solutions sur I .

Exemples :

1) Résolvons $(E) : xy' + y = 1$ sur \mathbb{R}^* . Sur \mathbb{R}^* , $(E) : y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}$. a et d sont continues sur \mathbb{R}^* .

Résolution de (EH) : $y' + \frac{1}{x}y = 0$ sur \mathbb{R}^* . $A : (x \rightarrow \ln|x|)$ est une primitive de a et $e^{-A(x)} = e^{-\ln|x|} = e^{\ln(\frac{1}{|x|})} = \frac{1}{|x|}$. Donc les solutions de

(EH) sur \mathbb{R}^* sont toutes les fonctions $(x \rightarrow \frac{k}{x})$ telles que k constante réelle.

Recherche d'une solution particulière : $f_0 : (x \rightarrow 1)$ est une solution particulière évidente.

Conclusion : les solutions de (E) sur \mathbb{R}^* sont toutes les fonctions $(x \rightarrow 1 + \frac{k}{x})$ telles que k constante réelle.

2) Résolvons $(E) : \frac{(x^2 + 1)y'(x) + xy(x)}{a(x)} = \frac{1}{d(x)}$ sur \mathbb{R} . Sur \mathbb{R} , (E) s'écrit $y' + \frac{x}{1+x^2}y = \frac{1}{1+x^2}$. a et d sont continues sur \mathbb{R}^* .

Résolution de (EH) : $a(x) = \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \frac{2x}{1+x^2}$. $A : (x \rightarrow \frac{1}{2} \ln(1+x^2))$ est une primitive de a et $\forall x > 0$,

$e^{-A(x)} = e^{-\frac{1}{2} \ln(1+x^2)} = e^{\ln((1+x^2)^{-\frac{1}{2}})} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Donc les solutions de (EH) sur \mathbb{R} sont toutes les fonctions $(x \rightarrow \frac{k}{\sqrt{1+x^2}})$ telles que k constante réelle.

Recherche d'une solution particulière : appliquons la MVC. Cherchons une SP de (E) sous la forme :

$f(x) = \frac{k(x)}{\sqrt{1+x^2}} = k(x)(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ telle que k dérivable sur \mathbb{R} . Alors f est dérivable sur \mathbb{R} et

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = k'(x)(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} + k(x) \left(-\frac{1}{2}\right) 2x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{k'(x)}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{k(x)x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$. Alors,

f est solution de (E) si et ssi $\forall x \in \mathbb{R}, (1+x^2)f'(x) + xf(x) = 1$.

si et ssi $\forall x \in \mathbb{R}, (1+x^2) \left(\frac{k'(x)}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{k(x)x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \right) + x \frac{k(x)}{\sqrt{1+x^2}} = 1$

si et ssi $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{1+x^2}k'(x) = 1$

si et ssi $\forall x \in \mathbb{R}, k'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

si et ssi k est une primitive de $g : (x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}})$.

Prenons $k_0 : (x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2}))$ est une primitive de g et donc $f_0 : (x \mapsto \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}})$ est une SP de (E) .

Conclusion : les solutions de (E) sur \mathbb{R} sont toutes les fonctions $(x \rightarrow \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{k}{\sqrt{1+x^2}})$ telles que k cste réelle.

3. Problème de Cauchy : ed1 avec conditions initiales

Théorème de Cauchy-Lipschitz :

Soit $(E) : y' + a(x)y = d(x)$ où a et d sont continues sur l'intervalle I à valeurs dans K et a ne s'annule pas sur I .

Pour tout $x_0 \in I$ et $y_0 \in K$, il existe une et une seule solution f de (E) sur I telle que $f(x_0) = y_0$. f est l'unique solution du

problème de Cauchy $\begin{cases} y' + a(x)y = d(x), x \in I \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$.

Autrement dit, pour tout $(x_0, y_0) \in I \times K$, il existe une et une seule courbe intégrale passant par le point de coordonnées (x_0, y_0) .

30 **Remarques** : Parfois (et notamment en physique) la condition initiale est remplacée par une condition limite : par exemple, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = L_0$. Dans ce cas, on ne peut pas assurée l'existence ni l'unicité des solutions.

31 **Exemple** : Par définition, la seule solution de $(E): y' = \frac{1}{x}$ sur \mathbb{R}^{+*} qui vérifie $y(1) = 0$ est la fonction logarithme népérien.

32 **Méthode pour résoudre un problème de Cauchy sur un intervalle I sur lequel α ne s'annule pas .**

1) Je cherche toutes les solutions de (E) : je trouve toutes les fonctions de la forme $f_0(x) + ke^{-A(x)}$ tq k cste.

2) Je détermine la valeur de la constante k de sorte que : $f(x_0) = y_0$.

33 **Exemples : 1)** La solution de $(C) : \begin{cases} y' + 5y = -1 \\ y(2) = 3 \end{cases}$ sur \mathbb{R} est $(x \mapsto \frac{16}{5}e^{-5(x-2)} - \frac{1}{5})$.

2) Résolvons le problème de Cauchy $\begin{cases} xy'(x) + y(x) = 1 \text{ tq } x \in \mathbb{R}^{+*} \\ y(1) = 0 \end{cases}$.

Les solutions de $(E): xy' + y = 1$ sur \mathbb{R}^{+*} sont toutes les fonctions $(x \mapsto 1 + \frac{k}{x})$ telles que k constante réelle.

Et, $1 + \frac{k}{1} = 0 \Leftrightarrow k = -1$. Donc la fonction $(x \mapsto 1 - \frac{1}{x})$ est l'unique solution de ce problème de Cauchy.

ATTENTION : Sur un intervalle sur lequel α s'annule, un problème de Cauchy peut admettre plusieurs ou aucune solution.

34 **Partie B. Résolution de $(E) : \alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x)$ sur J où α s'annule.**

Exemples :

1) Résolvons $(E) : \frac{(x-1)}{\alpha(x)}y' + \frac{x}{\beta(x)}y = \frac{e^{-x}}{\gamma(x)}$ sur \mathbb{R} .

(E) est une (ed1) à coefficients et second membre continues sur $J = \mathbb{R}$. α s'annule en 1 uniquement . Notons $I_1 =]-\infty; 1[$ et $I_2 =]1; +\infty[$. f est solution de (E) sur \mathbb{R}

$\Leftrightarrow f$ est dérivable sur \mathbb{R} et vérifie (E) sur \mathbb{R}

$\Leftrightarrow f$ est dérivable sur I_1 , sur I_2 et en 1 et vérifie (E) sur I_1 , sur I_2 et en 1

$\Leftrightarrow f$ est solution de (E) sur I_1 , sur I_2 et est dérivable en 1 et vérifie (E) en 1.

A. Résolution de (E) sur I_1 et I_2 .

Sur I_1 et I_2 , (E) s'écrit : $y' + \frac{x}{x-1}y = \frac{1}{x-1}e^{-x}$ et $(EH) : y' + \frac{x}{x-1}y = 0$.

Résolution de (EH) : sur I_1 et I_2 , $a(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{(x-1)+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$. Donc, $A: (x \mapsto x + \ln|x-1|)$ est une primitive de a sur

I_1 et I_2 et $e^{-A(x)} = e^{-(x+\ln|x-1|)} = e^{-x}e^{-\ln|x-1|} = e^{-x}e^{\ln(\frac{1}{|x-1|})} = \frac{1}{|x-1|}e^{-x} = \begin{cases} \frac{1}{x-1}e^{-x} & \text{si } x \in I_1 \\ \frac{1}{1-x}e^{-x} & \text{si } x \in I_2 \end{cases}$.

Les solutions de (EH) sur I_1 sont toutes les fonctions $(x \mapsto \frac{k_1}{x-1}e^{-x})$ telles que $k_1 \in \mathbb{R}$ cste

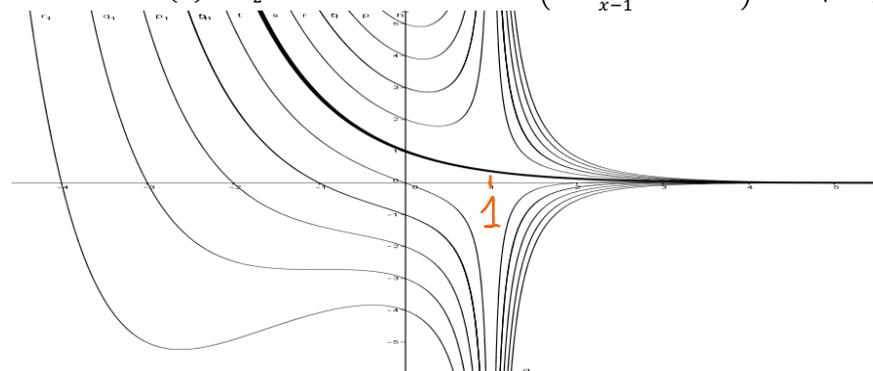
Les solutions de (EH) sur I_2 sont toutes les fonctions $(x \mapsto \frac{k_2}{1-x}e^{-x})$ telles que $k_2 \in \mathbb{R}$ cste ie toutes les fonctions $(x \mapsto \frac{k_2'}{x-1}e^{-x})$ telles que $k_2' \in \mathbb{R}$ cste.

II Solution particulière : je remarque que $f_0: (x \mapsto e^{-x})$ est une solution particulière de (E) sur \mathbb{R} donc sur I_1 et I_2 .

III Conclusion :

Les solutions de (E) sur I_1 sont toutes les fonctions $(x \mapsto \frac{k_1}{x-1}e^{-x} + e^{-x})$ telles que $k_1 \in \mathbb{R}$ cste

Les solutions de (E) sur I_2 sont ie toutes les fonctions $(x \mapsto \frac{k_2}{x-1}e^{-x} + e^{-x})$ telles que $k_2 \in \mathbb{R}$ cste.



Il semblerait que peu de solutions se raccorderaient par continuité en 1 . Seule la courbe en gras, raccord des deux solutions sur I_1 et I_2 correspondant à $k_1 = k_2 = 0$, convient . Mais toutes les fonctions ne sont pas tracées donc ce dessin n'est pas une démonstration.

B. Résolution de (E) sur \mathbb{R} : raccord en 1.

• f est solution de (E) sur \mathbb{R} si et ssi f est solution de I_1 et sur I_2 et f est continue et dérivable et vérifie (E) en 1.

si et ssi $\begin{cases} \text{il existe } k_1 \text{ et } k_2 \text{ des cstes réelles telles que: } \forall x \in I_1, f(x) = \frac{k_1}{x-1}e^{-x} + e^{-x} \text{ et } \forall x \in I_2, f(x) = \frac{k_2}{x-1}e^{-x} + e^{-x} \\ f \text{ est continue et dérivable en 1 et } 0 \times f'(1) + 1f(1) = e^{-1} \text{ i.e. } f(1) = \frac{1}{e} . \end{cases}$

- Considérons donc une fonction $f: x \mapsto \begin{cases} \frac{k_1}{x-1} e^{-x} + e^{-x} & \text{si } x > 1 \\ \frac{1}{e} & \text{si } x = 1 \\ \frac{k_2}{x-1} e^{-x} + e^{-x} & \text{si } x < 1 \end{cases}$ où k_1 et k_2 sont des cstes réelles à déterminer de sorte

que f soit continue et dérivable en 1. On a alors : f est continue en 1 si et ssi $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{k_1}{x-1} e^{-x} + e^{-x} = \frac{1}{e} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{k_2}{x-1} e^{-x} + e^{-x}$.

Or, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{k}{x-1} e^{-x} + e^{-x} = \begin{cases} \pm \infty & \text{si } k \neq 0 \\ \frac{1}{e} & \text{si } k = 0 \end{cases}$. Donc, f est continue en 1 si et ssi $k_1 = k_2 = 0$ si et ssi f est $(x \mapsto e^{-x})$.

De plus, $(x \mapsto e^{-x})$ est solution de (E).

C. Conclusion : $(x \mapsto e^{-x})$ est la seule solution de (E) sur \mathbb{R} .

2) Résolvons (E): $\frac{x(x-1)y'}{\alpha(x)} - \frac{(3x-1)y}{\beta(x)} + \frac{x^2(x+1)}{-\gamma(x)} = 0$ sur \mathbb{R} .

(E) est une (ed1) à coefficients et second membre continues sur $J = \mathbb{R}$. α s'annule en 1 et en 0 uniquement.

Notons $I_1 =]-\infty, 0[$, $I_2 =]0, 1[$ et $I_3 =]1, +\infty[$.

f est solution de (E) sur \mathbb{R}

$\Leftrightarrow f$ est dérivable sur \mathbb{R} et vérifie (E) sur \mathbb{R}

$\Leftrightarrow f$ est dérivable sur I_1 , sur I_2 , sur I_3 , en 1 et en 0 et vérifie (E) sur I_1 , sur I_2 sur I_3 , en 0 et en 1

$\Leftrightarrow f$ est solution de (E) sur I_1 , sur I_2 , sur I_3 et est dérivable en 1 et en 0 et vérifie (E) en 1 et en 0

A. Résolution de (E) sur I_1, I_2 et I_3 .

Sur I_1, I_2 et I_3 , (E) s'écrit : $y' + \frac{-(3x-1)}{x(x-1)} y = \frac{-x(x+1)}{(x-1)}$ et (EH) : $y' + \frac{-(3x-1)}{x(x-1)} y = 0$.

Résolution de (EH) : sur I_1, I_2 ou I_3 , $a(x) = \frac{-(3x-1)}{x(x-1)} = \frac{-3}{x-1} + \frac{1}{x(x-1)}$ et il existe a et b réels tq :

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \frac{1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}$. On a $a = \lim_{x \rightarrow 0} a + \frac{bx}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(x-1)} = -1$ et $b = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x-1)}{x} + \frac{b}{x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x(x-1)} = 1$ et Donc, sur I_1, I_2 et I_3 ,

$a(x) = \frac{-(3x-1)}{x(x-1)} = \frac{-3}{x-1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x-1)}$ et $A: (x \mapsto -\ln|x| - 2\ln|x-1|)$ est une primitive de a sur I_1, I_2 ou I_3 et $e^{-A(x)} =$

$e^{-(-\ln|x| - 2\ln|x-1|)} = e^{\ln|x|} e^{2\ln|x-1|} = |x|(x-1)^2 = \begin{cases} -x(x-1)^2 & \text{si } x \in I_1 \\ x(x-1)^2 & \text{si } x \in I_2 \text{ ou } I_3 \end{cases}$.

Les solutions de (EH) sur I_1 sont toutes les fonctions $(x \mapsto -k_1'x(x-1)^2)$ telles que $k_1' \in \mathbb{R}$ cste i.e. toutes les fonctions $(x \mapsto k_1x(x-1)^2)$ telles que $k_1 \in \mathbb{R}$ cste i.e.

Les solutions de (EH) sur I_2 sont toutes les fonctions $(x \mapsto k_2x(x-1)^2)$ telles que $k_2 \in \mathbb{R}$ cste.

Les solutions de (EH) sur I_3 sont toutes les fonctions $(x \mapsto k_3x(x-1)^2)$ telles que $k_3 \in \mathbb{R}$ cste

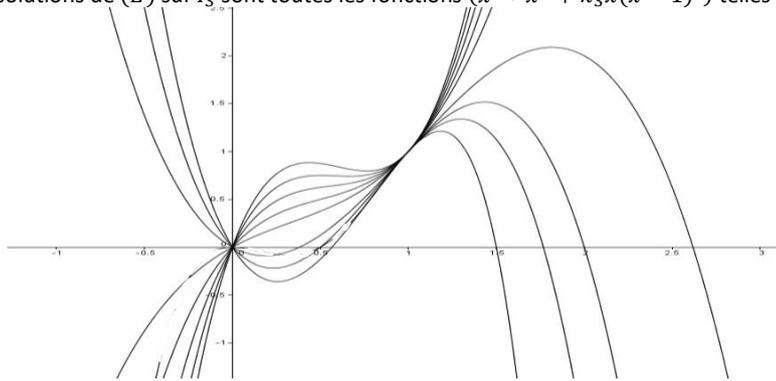
Il Solution particulière : je remarque que $f_0: (x \mapsto x^2)$ est une solution particulière de (E) sur \mathbb{R} donc sur I_1, I_2 et I_3 .

III Conclusion :

Les solutions de (E) sur I_1 sont toutes les fonctions $(x \mapsto x^2 + k_1x(x-1)^2)$ telles que $k_1 \in \mathbb{R}$ cste.

Les solutions de (E) sur I_2 sont toutes les fonctions $(x \mapsto x^2 + k_2x(x-1)^2)$ telles que $k_2 \in \mathbb{R}$ cste.

Les solutions de (E) sur I_3 sont toutes les fonctions $(x \mapsto x^2 + k_3x(x-1)^2)$ telles que $k_3 \in \mathbb{R}$ cste.



Graphiquement, il semblerait que tous les raccords en 1 se passent toujours bien (ie raccord continue et dérivable en 1 quelles que soient les valeurs de k_2 et k_3). Par contre en 0, les raccords se passent bien en termes de continuité mais pour la dérivabilité il faut apparemment que $k_1 = k_2$.

B. Résolution de (E) sur \mathbb{R} : raccords en 0 et en 1.

- f est solution de (E) sur \mathbb{R}

sietssi f est solution de I_1 et sur I_2 et sur I_3 et f est continue et dérivable et vérifie (E) en 1 et en 0

sietssi il existe k_1, k_2 et k_3 des cstes réelles telles que:

$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in I_1, f(x) = x^2 + k_1x(x-1)^2 \text{ et } \forall x \in I_2, f(x) = x^2 + k_2x(x-1)^2 \text{ et } \forall x \in I_3, f(x) = x^2 + k_3x(x-1)^2 \\ \text{et } f \text{ est continue et dérivable en 1 et } 0 \times f'(1) - 2f(1) + 2 = 0 \text{ i.e. } f(1) = 1. \\ \text{et } f \text{ est continue et dérivable en 0 et } 0 \times f'(0) + f(0) + 0 = 0 \text{ i.e. } f(0) = 0. \end{array} \right.$

- Considérons donc une fonction $f: x \mapsto \begin{cases} x^2 + k_1x(x-1)^2 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 + k_2x(x-1)^2 & \text{si } x \in]0, 1[\text{ où } k_1, k_2 \text{ et } k_3 \text{ sont des cstes réelles à} \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ x^2 + k_3x(x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

déterminer de sorte que f soit continue et dérivable en 1 et en 0.

Remarque : Lorsque $k_1 = k_2 = k_3$, la fonction est polynomiale d'expression $f(x) = x^2 + kx(x-1)^2$ et est donc continue et dérivable en 0 et en 1 et est donc solution de (E) sur \mathbb{R} .

Continuité de f en 1 : f est continue en 1 si et ssi $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + k_3 x(x-1)^2 \stackrel{TJRSVRAI}{=} 1 = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + k_2 x(x-1)^2$.

Donc, pour toutes valeurs de k_2 et k_3 , f est continue en 1.

Continuité de f en 0 : f est continue en 0 si et ssi $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + k_2 x(x-1)^2 \stackrel{TJRSVRAI}{=} 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 + k_1 x(x-1)^2$.

Donc, pour toutes valeurs de k_1 et k_2 , f est continue en 0.

Dérivabilité de f en 1 : f est dérivable en 1 si et ssi $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + k_3 x(x-1)^2 - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + k_2 x(x-1)^2 - 1}{x-1} \in \mathbb{R}$.

Or, $\frac{x^2 + k_3 x(x-1)^2 - 1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1) + k_3 x(x-1)^2}{x-1} = (x+1) + k_3 x(x-1)$. Donc, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + k_3 x(x-1)^2 - 1}{x-1} = 2$. Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + k_3 x(x-1)^2 - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + k_2 x(x-1)^2 - 1}{x-1} = 2$ quelles que soient les valeurs de k_2 et k_3 .

Donc, pour toutes valeurs de k_2 et k_3 , f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$.

Dérivabilité de f en 0 : f est dérivable en 0 si et ssi $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + k_2 x(x-1)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + k_1 x(x-1)^2}{x} \in \mathbb{R}$.

Or, $\frac{x^2 + k_2 x(x-1)^2}{x} = x + k_2(x-1)^2$. Donc, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + k_2 x(x-1)^2}{x} = k_2$. Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + k_2 x(x-1)^2}{x} = k_2$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + k_1 x(x-1)^2}{x} = k_1$. Donc, f est dérivable en 0 si et ssi $k_1 = k_2$.

C. Conclusion : Les solutions de (E) sur \mathbb{R} sont toutes les fonctions $\left(x \mapsto \begin{cases} x^2 + k_1 x(x-1)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + k_3 x(x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \right)$ où k_1 et k_3 cstes réelles

35 Graphiquement, faire un raccord en δ revient à trouver les courbes intégrales de (E) sur I_1 et celles sur I_2 qui se recollent par continuité et dérivabilité en δ .

Sur J , (E) peut avoir aucune, une ou une infinité de solutions.

NB : il est aussi parfois plus simple d'appliquer le *critère de dérivabilité* pour calculer la limite du taux d'accroissement dans l'étude de la dérivabilité au point de raccord. De plus, toutes les *techniques étudiées (+ les développements limités)* sont à votre disposition pour calculer les limites utiles dans l'étude du raccord.

III Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficient constants

36 On considère ici l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 (edl2) à coefficients constants

(E): $ay'' + by' + cy = d(x)$ et son équation homogène associée (EH) : $ay'' + by' + cy = 0$

où a, b, c sont des constantes, éléments de K , a non nul et d est une fonction définie et continue sur un intervalle J de \mathbb{R} et à valeurs dans K . (a, b, c sont les coefficients et d est la fonction second membre)

37 Exemples : Les solutions sur \mathbb{R} de (E): $y'' = 0$ sont toutes les fonctions affines.

Les solutions réelles sur \mathbb{R}^{*+} de (E): $y'' = x^\alpha$, où α paramètre réel distinct de -1 et de -2 , sont toutes les fonctions de la forme

$\left(x \mapsto \frac{x^{\alpha+2}}{(\alpha+2)(\alpha+1)} + ax + b \right)$ telles que a et b constantes réelles.

38 Remarque : (E) peut toujours s'écrire sous la forme (E): $y'' + \frac{b}{a}y' + \frac{c}{a}y = \frac{d(x)}{a}$ et (EH): $y'' + By' + Cy = 0$.

39 **Méthode :** pour résoudre (E), nous allons donc :

1. Résoudre (EH).
2. Trouver une solution particulière f_0 de (E).
3. Conclure en appliquant le théorème fondamental de résolution d'une équ. diff. linéaire (TFedl).

1. Résolution de (EH)

NB : on peut toujours résoudre (EH) sur \mathbb{R} .

40 **Théorème fondamental de résolution de (EH) :**

Soit (EH): $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$ où a, b, c constantes complexes ou réelles et a non nulle.

Soit (e.c) : $ar^2 + br + c = 0$ appelée **équation caractéristique de (EH) de discriminant Δ** .

NB : (e.c) est donc une équation polynomiale de degré 2 à coefficients réels ou complexes d'inconnue r réelle ou complexe).

A. **Solutions complexes** (cas où a, b, c sont réels ou complexes et l'inconnue y est à valeurs complexes).

si $\Delta \neq 0$, notons r_1 et r_2 les deux solutions complexes distinctes de (e.c). Alors, les solutions de (EH) sont toutes les fonctions de la forme $\left(x \mapsto Ue^{r_1 x} + Ve^{r_2 x} \right)$ telles que U et V constantes complexes.

si $\Delta = 0$, notons r_0 la seule solution (double) de (e.c). Alors, les solutions de (EH) sont toutes les fonctions de la forme $\left(x \mapsto (Ux + V)e^{r_0 x} \right)$ telles que U et V constantes complexes.

B. **Solutions réelles** (cas où a, b, c sont des réels et l'inconnue y est à valeurs réelles)

si $\Delta > 0$, notons r_1 et r_2 les deux solutions réelles de (e.c). Alors, les solutions (réelles) de (EH) sont toutes les fonctions de la forme $\left(x \mapsto Ue^{r_1 x} + Ve^{r_2 x} \right)$ telles que U et V constantes réelles.

si $\Delta=0$, notons r_0 la seule solution (double) de (e.c). Alors, les solutions (réelles) de (EH) sont toutes les fonctions de la forme $\left(\begin{matrix} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (Ux + V)e^{r_0x} \end{matrix} \right)$ telles que U et V constantes réelles.

si $\Delta < 0$, notons $r = \rho + i\omega$ et $\bar{r} = \rho - i\omega$ (où ρ et ω réels) les deux racines complexes non réelles conjuguées de (e.c). Alors, les solutions (réelles) de (EH) sont toutes les fonctions de la forme $\left(\begin{matrix} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (U \cos(\omega x) + V \sin(\omega x))e^{\rho x} \end{matrix} \right)$ telles que U et V constantes réelles.

41 Exemples :

1) Résoudre (E) : $y'' + y' + y = x + 1$.

• Résolution de (EH) : $y'' + y' + y = 0$. Posons (e.c) : $r^2 + r + 1 = 0$. Les solutions de (e.c) sont $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et \bar{j} . Donc les solutions réelles

de (EH) sont toutes les applications de la forme $\left(\begin{matrix} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \left(U \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + V \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right) e^{-\frac{x}{2}} \end{matrix} \right)$ telles que U et V constantes réelles.

• La fonction $(x \mapsto x)$ est une solution particulière de (E).

Ainsi, les solutions réelles de (E) sont toutes les applications c

2) Résoudre (EH) : $my'' + (1 + m^2)y' + my = 0$ où m paramètre réel.

1^{er} cas : $m = 0$. Alors (EH) : $y' = 0$ est une edl1 homogène. Les solutions réelles de (EH) sont toutes les fonctions constantes réelles.

2^{ème} cas $m \neq 0$. Alors (EH) est une edl2 homogène.

Posons (e.c) : $mr^2 + (1 + m^2)r + m = 0$ et $\Delta = (1 + m^2)^2 - 4m^2 = (1 - m^2)^2$.

1^{er} sous-cas : $m \neq +1$ et $m \neq 0$. Alors, $r_1 = \frac{-(1+m^2)+(1-m^2)}{2m} = -m$ et $r_2 = \frac{-(1+m^2)-(1-m^2)}{2m} = -\frac{1}{m}$ sont deux solutions réelles et distinctes de

(e.c). Les solutions réelles de (EH) sont toutes les fonctions de la forme $\left(\begin{matrix} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \left(Ue^{-\frac{x}{m}} + Ve^{-mx} \right) \end{matrix} \right)$ telles que U et V constantes réelles.

2^{ème} sous-cas : $m = 1$. Alors, $r_0 = -1$ est l'unique solution de (e.c). Les solutions réelles de (EH) sont toutes les fonctions de la forme

$\left(\begin{matrix} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (U + Vx)e^{-x} \end{matrix} \right)$ telles que U et V constantes réelles.

3^{ème} sous-cas : $m = -1$. Alors, $r_0 = 1$ est l'unique solution de (e.c). Les solutions réelles de (EH) sont toutes les fonctions de la forme

$\left(\begin{matrix} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (U + Vx)e^x \end{matrix} \right)$ telles que U et V constantes réelles.

42 Exemples fondamentaux : Soit ω une constante réelle et non nulle.

Les solutions (réelles) de $y'' = 0$ sont toutes les applications de la forme $\left(\begin{matrix} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto Ux + V \end{matrix} \right)$ telles que U et V constantes réelles.

Les solutions (réelles) de $y'' + \omega^2 y = 0$ sont toutes les applications de la forme $\left(\begin{matrix} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto U \cos(\omega x) + V \sin(\omega x) \end{matrix} \right)$ telles que U et

V constantes réelles ou encore de manière équivalente toutes les applications de la forme $\left(\begin{matrix} \mathbb{R} \rightarrow K \\ x \mapsto W \cos(\omega x + \Omega) \end{matrix} \right)$ telles que W et Ω constantes réelles.

Les solutions (réelles) de $y'' - \omega^2 y = 0$ sont toutes les applications de la forme $\left(\begin{matrix} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto Ue^{\omega x} + Ve^{-\omega x} \end{matrix} \right)$ telles que U et V

constantes réelles ou encore de manière équivalente toutes les applications de la forme $\left(\begin{matrix} \mathbb{R} \rightarrow K \\ x \mapsto U \operatorname{ch}(\omega x) + V \operatorname{sh}(\omega x) \end{matrix} \right)$ telles que U et V constantes réelles.

43 Remarques :

1. $U \cos(\omega x) + V \sin(\omega x) = W \cos(\omega x - \varphi)$ avec $W = \sqrt{U^2 + V^2}$ et $\varphi = \operatorname{Arctan}\left(\frac{V}{U}\right) [\pi]$.

2. Les constantes U et V se déterminent, dans un deuxième temps, grâce aux conditions initiales vérifiées par y . L'énoncé donne souvent les valeurs $y(x_0)$ et $y'(x_0)$ où x_0 est un réel connu. On pourra aussi utiliser le comportement de y à l'infini. Deux relations contenant U et V suffisent, le plus souvent, à déterminer U et V .

3. Les solutions de (e.c) sont les solutions de $r^2 + Br + C = 0$.

2. Recherche d'une solution particulière de (E).

a. Méthode

1. On cherche une SP évidente (fonction constante ??)

2. On essaie de trouver une solution particulière sous la forme du second membre.

3. On reconnaît une forme ci-dessous en $d(x)$ et on applique l'une des méthodes suivantes.

b. $d(x) = P(x)e^{Mx}$ où M réel ou complexe et P fonction polynomiale à coeff. réels ou complexes.

d est continue sur tout \mathbb{R} , je vais chercher une solution particulière de (E) sur tout \mathbb{R} .

Méthode :

Si M n'est pas solution de (e.c), alors on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $f(x) = Q(x)e^{Mx}$ avec Q polynomiale à coefficients réels (resp. complexes) et $\deg Q = \deg P$.

Si M est solution simple de $(e.c)$, alors on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $f(x) = Q(x)e^{Mx}$ avec Q polynôme à coefficients réels (resp. complexes) et $\deg Q = \deg P + 1$.

Si M est solution double de $(e.c)$, alors on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $f(x) = Q(x)e^{Mx}$ avec Q polynôme à coefficients réels (resp. complexes) et $\deg Q = \deg P + 2$.

46 **On admet que cette recherche aboutit toujours**. On peut alors assurer que : lorsque le second membre est du type $d(x) = P(x)e^{Mx}$, alors (E) admet toujours une solution particulière sur \mathbb{R} et donc une infinité de solutions.

47 **Remarque** : En utilisant la méthode superposition on traite ici toutes les équations avec second membre de la forme polynôme $\times ch$ (ou sh). Grâce à la *FBN*, on sait aussi trouver une SP lorsque le second membre de la forme polynôme $\times ch^k$ (ou sh^k).

48 **Exemple** :

1. Résolvons $(E) : y'' - 3y' + 2y = (2x - 1)\exp(x)$.

• Résolution de $(EH) : y'' - 3y' + 2y = 0$. Posons $(e.c) : r^2 - 3r + 2 = 0$. Les solutions de $(e.c)$ sont 1 et 2. distinctes et réelles. Donc les solutions réelles de (EH) sont toutes les applications de la forme $(x \mapsto (Ue^x + Ve^{2x}))$ telles que U et V constantes réelles.

• Solution particulière de (E) : le second membre $d(x) = (2x - 1)e^x = P(x)e^{Mx}$. $P(x \mapsto 2x - 1)$ est polynomiale de degré 1 et $M = 1$ est racine simple de $(e.c)$. Je cherche donc une solution particulière de (E) sous la forme $f(x) = Q(x)e^x$ avec Q polynomiale de degré 2 i.e. $f(x) = (ux^2 + vx + w)e^x$ où u, v et w sont des constantes réelles à déterminer pour que f soit solution de (E) . Alors f est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f(x) = (ux^2 + vx + w)e^x \\ f'(x) = (ux^2 + vx + w + 2ux + v)e^x \\ f''(x) = (ux^2 + vx + w + 4ux + 2v + 2u)e^x \end{cases}$$

Alors, f solution de (E)

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = (2x - 1)e^x$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, ((-2u)x - v + 2u)e^x = (2x - 1)e^x$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, ((-2u + 2v)x - v + 2u) = (2x - 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2u = 2 \\ -v + 2u = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -1 \\ v = -1 \end{cases} \text{ et } w \text{ quelconque.}$$

Donc, $f : (x \mapsto (x^2 - x)e^x)$ est une solution particulière de (E) .

• Conclusion : les solutions réelles de (E) sont toutes les applications de la forme $(x \mapsto (x^2 - x)e^x + (Ue^x + Ve^{2x}))$ telles que U et V constantes réelles.

c. **$d(x) = P(x) \cos(px) e^{mx} = \operatorname{Re}(P(x)e^{(m+iq)x})$ ou $d(x) = P(x) \sin(px) e^{mx} = \operatorname{Im}(P(x)e^{(m+iq)x})$**
où P polynomiale à coefficients réels et q et m constantes réelles.

49 **Méthode** :

1. On introduit $(E_c) : ay'' + by' + cy = P(x)e^{(m+iq)x}$. On pose $M = m + iq$.

2. On cherche une solution particulière f_c de (E_c) avec la méthode précédente.

3. Alors $\operatorname{Re}(f_c)$ est une solution particulière de $ay'' + by' + cy = P(x) \cos(px) e^{mx}$
et $\operatorname{Im}(f_c)$ est une solution particulière de $ay'' + by' + cy = P(x) \sin(px) e^{mx}$

50 **Exemple** : Résolvons $(E) : y'' - 2y' + 5y = x \cos(2x)e^x$

• Résolution de $(EH) : y'' - 2y' + 5y = 0$. Posons $(e.c) : r^2 - 2r + 5 = 0$ et $\Delta = -16 = (4i)^2$. Les solutions de $(e.c)$ sont $1 - 2i$ et $1 + 2i$.

Donc les solutions réelles de (EH) sont toutes les applications de la forme $(x \mapsto (U(\cos(2x) + V\sin(2x))e^x))$ où U et V constantes réelles.

• Solution particulière de (E) : le second membre $d(x) = x \cos(2x) e^x = \operatorname{Re}(xe^{(1+2i)x}) = \operatorname{Re}(P(x)e^{Mx})$. Passons en complexe :

Posons $(E_c) : y'' - 2y' + 5y = xe^{(1+2i)x}$

$P(x \mapsto x)$ est polynomiale de degré 1 et $M = 1 + 2i$ est racine simple de $(e.c)$. Je cherche donc une solution particulière de (E_c) sous la forme $f(x) = Q(x)e^x$ avec Q polynomiale de degré 2 i.e. $f(x) = (ux^2 + vx + w)e^{(1+2i)x}$ où u, v et w sont des constantes **complexes** à déterminer pour que f soit solution de (E_c) . Alors f est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = (ux^2 + vx + w)e^{(1+2i)x}$$

$$f'(x) = ((1 + 2i)ux^2 + (1 + 2i)vx + (1 + 2i)w + 2ux + v)e^{(1+2i)x}$$

$$f''(x) = ((-3 + 4i)ux^2 + (-3 + 4i)vx + (-3 + 4i)w + (4(1 + 2i)u)x + 2(1 + 2i)v + 2u)e^{(1+2i)x}$$

$$\text{Alors, } f \text{ solution de } (E) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) - 2f'(x) + 5f(x) = xe^{(1+2i)x}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (4(1 + 2i) - 4)ux + 4iv + 2u)e^{(1+2i)x} = xe^{(1+2i)x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (8i)ux + 4iv + 2u = x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (8i)u = 1 \\ 4iv + 2u = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{8i} = -\frac{1}{8}i \\ v = \frac{1}{16} \end{cases} \text{ et } w \text{ quelconque.}$$

Ainsi, $f_c : (x \mapsto (-\frac{1}{8}ix^2 + \frac{1}{16}x)e^{(1+2i)x})$ est une solution particulière de (E_c) . Donc $f_0 = \operatorname{Re}(f_c)$ est une solution particulière de (E) .

$$\text{Or, } (-\frac{1}{8}ix^2 + \frac{1}{16}x)e^{(1+2i)x} = (-\frac{1}{8}ix^2 + \frac{1}{16}x)(\cos(2x) + i\sin(2x))e^x = \left[\frac{\sin(2x)x^2}{8} + \frac{\cos(2x)x}{16} + i \left(-\frac{\cos(2x)x^2}{8} + \frac{\sin(2x)x}{16} \right) \right] e^x$$

Donc, $f_0 : (x \mapsto (\frac{\sin(2x)x^2}{8} + \frac{\cos(2x)x}{16})e^x)$ est une solution particulière de (E) .

• Conclusion : les solutions réelles de (E) sont toutes les applications de la forme

$$\left(x \mapsto \left(\frac{\sin(2x)x^2}{8} + \frac{\cos(2x)x}{16} \right) e^x + (U \cos(2x) + V \sin(2x)) e^x \right) \text{ telles que } U \text{ et } V \text{ constantes réelles.}$$

Théorème (cas particulier) Soit (E): $ay'' + by' + cy = a \sin(qx) + b \cos(qx)$ où a, b, c, q réels et $a \neq 0$. (E) aura une solution particulière de la forme $f(x) = (Ax + B) \cos(qx) + (Cx + D) \sin(qx)$ avec A, B, C et D réels à déterminer

Exemple : Résolvons (E) : $y'' + y = \cos(x)$.

Les solutions réelles de (EH) sont toutes les fonctions de la forme $(x \mapsto U \cos(x) + B \sin(x))$ où U et V constantes réelles.

Comme i est racine simple de (e.c), (E) admet une SP de la forme $f_0(x) = (Ax + B) \cos(x) + (Cx + D) \sin(x)$ où A, B, C, D constantes réelles

$$\text{à déterminer. } f_0 \text{ est deux fois dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f_0(x) = (Ax + B) \cos(x) + (Cx + D) \sin(x) \\ f_0'(x) = (A + Cx + D) \cos(x) + (C - Ax - B) \sin(x) \\ f_0''(x) = (2C - Ax - B) \cos(x) + (-2A - Cx - D) \sin(x) \end{cases}$$

Donc, f_0 est solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 2C \cos(x) - 2A \sin(x) = \cos(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 2C = 1 \\ -2A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = \frac{1}{2} \\ A = 0 \end{cases}$ et B et D quelconques. Donc,

$f_0(x) = \frac{1}{2} x \sin(x)$ est une SP de (E) et ainsi, les solutions réelles de (E) sont toutes les fonctions de la forme $(x \mapsto U \cos(x) + B \sin(x) + \frac{1}{2} x \sin(x))$ où U et V constantes réelles.

d. $d(x) = d_1(x) + d_2(x) + d_3(x)$ où d_1, d_2, d_3 fonctions continues sur \mathbb{R} ayant chacune l'une des formes précédentes

On utilise le principe de superposition : Une SP de (E) $ay'' + by' + cy = d_1(x) + d_2(x)$ est la somme d'une SP de $(E_1): ay'' + by' + cy = d_1(x)$ et d'une SP de $(E_2) ay'' + by' + cy = d_2(x)$

Exemple : Résolvons (E) : $y'' + 4y = x \sin^2(x)$

• Résolution de (EH): $y'' - 4y = 0$. Posons (e.c): $r^2 + 4 = 0$. Les solutions de (e.c) sont $-2i$ et $2i$. distinctes et conjuguées, complexes. Donc

les solutions réelles de (EH) sont toutes les applications de la forme $\left(x \mapsto (U \cos(2x) + V \sin(2x)) \right)$ telles que U et V constantes réelles.

• Solution particulière de (E) : le second membre est $d(x) = \frac{x}{4} e^{2x} + \frac{x}{4} e^{-2x} - \frac{x}{2}$. Appliquons la méthode de superposition.

On pose $(E_1): y'' + 4y = \frac{x}{4} e^{2x}$, $(E_2): y'' + 4y = \frac{x}{4} e^{-2x}$, et $(E_3): y'' + 4y = -\frac{x}{2}$

• **Solution particulière de (E_1) :** $d_1(x) = P_1(x) e^{M_1 x}$. $P(x \mapsto \frac{x}{4})$ est polynomiale de degré 1 et $M_1 = 2$ n'est pas racine de (e.c). Je cherche donc une solution particulière de (E_1) sous la forme $f(x) = Q(x) e^{2x}$ avec Q polynomiale de degré 1 i.e. $f(x) = (ux + v) e^{2x}$ où u, v sont

des constantes réelles à déterminer pour que f soit solution de (E). Alors f est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f(x) = (ux + v) e^{2x} \\ f'(x) = (2ux + 2v + u) e^{2x} \\ f''(x) = (4ux + 4v + 4u) e^{2x} \end{cases}$

Alors, f solution de $(E_1) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) + 4f''(x) = \frac{x}{4} e^{2x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, ((8u)x + 8v + 4u) e^{2x} = \frac{x}{4} e^{2x}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (8u)x + 8v + 4u = \frac{x}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} 8u = \frac{1}{4} \\ 8v + 4u = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{32} \\ v = -\frac{1}{64} \end{cases}$. Ainsi, $f_1: (x \mapsto (\frac{1}{32}x - \frac{1}{64}) e^{2x})$ est une solution particulière de (E_1) .

• **Solution particulière de (E_2) :** idem on cherche une solution particulière de (E_2) sous la forme $f(x) = Q(x) e^{-2x}$ avec Q polynomiale de degré 1 i.e. $f(x) = (ux + v) e^{-2x}$ où u, v sont des constantes réelles à déterminer pour que f soit solution de (E). Alors f est dérivable sur

\mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f(x) = (ux + v) e^{-2x} \\ f'(x) = (-2ux - 2v + u) e^{-2x} \\ f''(x) = (4ux + 4v - 4u) e^{-2x} \end{cases}$

Alors, f solution de $(E_2) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) + 4f''(x) = \frac{x}{4} e^{-2x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, ((8u)x + 8v - 4u) e^{-2x} = \frac{x}{4} e^{-2x} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{32} \\ v = \frac{1}{64} \end{cases}$

Ainsi, $f_2: (x \mapsto (\frac{1}{32}x + \frac{1}{64}) e^{-2x})$ est une solution particulière de (E_2) .

• **Solution particulière de (E_3) :** Ainsi, $f_3: (x \mapsto (-\frac{x}{4}))$ est une solution particulière de (E_3) .

Par le théorème de superposition, $f = f_1 + f_2 + f_3$ est une solution particulière de (E).

• Conclusion : les solutions réelles de (E) sont toutes les applications de la forme

$$\left(x \mapsto \left(\frac{1}{32}x - \frac{1}{64} \right) e^{2x} + \left(\frac{1}{32}x + \frac{1}{64} \right) e^{-2x} - \frac{x}{4} + (U \cos(2x) + V \sin(2x)) \right) \text{ telles que } U \text{ et } V \text{ constantes réelles.}$$

4. Problème de Cauchy relatif à (E).

Théorème : Soit a, b, c des constantes, a non nulle, d une fonction de la forme précédente et $(x_0, u_0, v_0) \in \mathbb{R}^3$.

Alors il existe une et une seule fonction y deux fois dérivable sur \mathbb{R} et vérifiant :

$$(C): \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x) \\ y(x_0) = u_0 \\ y'(x_0) = v_0 \end{cases}$$