TD 8

Equations différentielles linéaires

Ex 0 Navigation entre ordre 1 et ordre 2

Vous devez donner toutes les solutions réelles des équations différentielles suivantes très très très rapidement

1. $y' + 2y = 5$
2. $y'' - y' = 10$
3. $y'' - 9y = 1 + e^{-x}$
4. $2y' - y = e^{3x}$
5. $ch(x)y' - sh(x)y = 1$
6. $y'' + 2y' + y = e^{2x}$
7. $2xy' - y = x$
8. $xy' - y = 1 - \ln(x)$
9. $y'' + y = \cos(x)$

I Equations différentielles d'ordre 1

Ex 1 Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle I proposé **.**

1. $y' + 4y = 1 - 2\cos(x)$, $I = \mathbb{R}$
2. $(1-2i)y'(t) + (3+i)y(t) = 2(1 - e^{it})$, $I = \mathbb{R}$
3. $(x^2+1)y'(x) + xy(x) = 1$, $I = \mathbb{R}$.
4. $(e^x - 1)y' + e^x y = 1$, $I = \mathbb{R}^{-*}$
5. $x\big(1 + ln^2(x)\big)y' + 2\ln(x)\, y = 1$, $I = \mathbb{R}^{+*}$
6. $\sqrt{1-x^2}y' - y = 1$, $I =]-1,1[$
7. $tx'(t) - x(t) = t\sqrt{1+\ln(t)}$, $I = [\frac{1}{e}, +\infty[$
8. $(1-r^2)u'(r) - ru(r) = 1$, $I =]-1,1[$
9. $x'sin(t) - x\cos(t) = e^t sin^4 t$, $I =]0,\pi[$
10. $xy'(x) + \alpha y(x) = x^\beta$, $I = \mathbb{R}^{+*}$ où $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$
11. $sh(x)y' - ch(x)y = 1$, $I = \mathbb{R}^{-*}$.
12. $(1 + cos^2 x)y' - sin(2x)y = cosx$, $I = \mathbb{R}$
13. $y' - \tan(x)\, y = cos^2(x)$, $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
14. $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$, $I = \mathbb{R}$
15. $2xy'(x) + y(x) = x^n$, $I = \mathbb{R}^{+*}$ où $n \in \mathbb{N}$.
16. $e^{x^2}y' + xy = 1$, $I = \mathbb{R}$ ⚠
17. $x\ln(x)y' - y = \ln(x)$, $I =]0,1[$

Ex 2 Résoudre les problèmes de Cauchy suivants sur l'intervalle I proposé

$$(C_1)\begin{cases} I =]0,+\infty[\\ (2x+1)y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = \frac{-(2x+1)^2}{x} \\ y(2) = 1 \end{cases} \qquad (C_2)\begin{cases} t \in \mathbb{R} \\ y'(t) + 2ty(t) = te^{t^2} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Ex 3 Des raccords Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$

1. $|x|y' + (x-1)y = x^3$
2. $xy' + y = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$
3. $x^2(1+x)y' + y = x$
4. $(1-x)y' + y = \frac{x-1}{x}$ $sur\ \mathbb{R}^{+*}$
5. $(x+1)y' + (x+2)y = 2x + 4$
6. $(1-x^2)y' - xy = 1$

Ex 4 Le but de cet exercice est de trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x f(t)(2x-t)dt = \frac{x^2}{2}$.

A. Analyse : On suppose ici qu'il existe une fonction f solution de notre problème.
   1. Montrer que la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0 est solution d' une $edl1$.
   2. Déterminer les fonctions candidates solutions de notre problème.
B. Synthèse : Etudier les candidatures.

Ex 5 Soit l'$edl1$ (E) : $y'(x) + a(x)y(x) = d(x)$ où a et d $sont\ continues\ sur\ \mathbb{R}$. Démontrer que les **courbes intégrales** i.e. les courbes des solutions de (E) se s'interceptent jamais et que, toutes réunies , elles recouvrent entièrement le plan .

Ex 6 Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et $A \in \mathbb{R}^+$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x) \leq A + \int_0^x f(t)g(t)dt .$$

On note $\varphi(x) = A + \int_0^x f(t)g(t)dt$.

1) Justifier que φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall x \in \mathbb{R}^+, \varphi'(x) - \varphi(x)g(x) \leq 0$.
2) En utilisant l'idée de la MVC, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \varphi(x) \leq Ae^{\int_0^x g(t)dt}$.
3) Conclure que $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \leq Ae^{\int_0^x g(t)dt}$.

Ex 7 Soit $\omega > 0$. Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme dirigé selon l'axe (Oz) vérifie le système différentiel suivant : $\begin{cases} x''(t) = \omega y'(t) \\ y''(t) = -\omega x'(t) \\ z''(t) = 0 \end{cases}$. A l'instant $t = 0$, la particule se trouve en position à l'origine du repère. En considérant la fonction auxiliaire $u = x' + iy'$, trouver les expressions de x , y, et z en fonction de t .

II Equations différentielles linéaires d'ordre 2

Ex 8 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles ou problèmes de Cauchy suivants

1. $y'' - 2y' = 3x^2 + 2x + 1$
2. $y'' + y = \cos(x) + \sin(x)$
3. $y'' + y' + y = e^{-x}$
4. $4y'' - 4y' + y = (3x-1)sh\left(\frac{x}{2}\right)$
5. $y'' + 4y' + 5y = 2 - (x+1)sin(x)e^{-2x}$
6. $y'' + (3-i)y' + (i+8)y = 2 - ix$
7. $my'' + (m+2)y' + 2y = 1 + x + e^{-x} + e^{3x}$
8. $y'' + 2y = |x| + 1$
9. $\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = (3x-1)e^{-2x} \\ y(1) = 0 \text{ et } y'(1) = -1 \end{cases}$
10. $\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = 6x + sin^2(x) + ch(x) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$
11. $(1 + tan^2\frac{\alpha}{2})y'' + 4itan\frac{\alpha}{2}y' - 4y = i + 2$
où α paramètre réel tq $tan\frac{\alpha}{2}$ existe
12. $y'' + \omega y = x^2e^x$ *où* ω *cste réelle .*
13. $y'' + (2m+1)y' + 2my = e^{-x}$ où m paramètre réel
14. $my'' - (m^2+1)y' + my = xe^{-x}$où m paramètre rée

Ex 9 On donne l'équation différentielle $(E) : y'' + 2y' + y = f$ où y est la fonction inconnue et f est définie par : $f(x) = 0 \text{ si } x \le 0 \text{ et } f(x) = 1 - e^{-x} \text{ si } x > 0$

1) Intégrer (E) sur chacun des intervalles $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$.
2) Soit $m \in \mathbb{R}$. Montrer que (E) a une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée y_m, telle que : $y_m(0) = 0 \text{ et } y_m'(0) = m$ On déterminera y_m .

Ex 9bis Changement de fonctions pour se ramener à une edl2 à coefficients constants : ces edl2 ne sont pas à coefficients constants donc le cours ne s'applique pas !!!! on va changer de de fonctions pour que la nouvelle fonction vérifie une edl2 à coefficients constants.

1. On va résoudre $(E): x^2y'' + 4xy' + 2y = \frac{2}{(1+x^2)^2}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ en posant $\theta(x) = x^2y(x)$.
- Montre que : y est solution de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$sietssi θ est solution d'une EDL2 à coefficients constants à déterminer.
- En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. Résoudre $(E): x^2y'' - 2xy' + (2-x^2)y = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^{+*}$ en posant $y(x) = xz(x)$.
3. Résoudre$(E): x^3y'' = y - xy' \text{ sur } \mathbb{R}^{+*}$ en posant $z(x) = y(x) - xy'(x)$.

Ex 10 Méthode de variation de la constante (changement de fonctions particulier)

1. Soit $(E) : x(x+1)y'' + (x-2)y' - y = 0$. Vérifier que (E) admet une solution polynomiale φ puis résoudre (E) sur $]2;+\infty[$ en cherchant les solutions sous la forme $f(x) = k(x)\varphi(x)$ $(Cf\ MVC)$.
2. Résoudre $(E) : xy'' + 2y' + xy = 0 \text{ sur } I =]0,\pi[$ *en remarquant que* $\varphi: \left(x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}\right)$ est solution et en cherchant les autres solutions sous la forme $y(x) = \varphi(x)z(x)$.
3. Résoudre $(E) : y'' - 4y' + 4y = x^{2013}e^{2x}$ *en appliquant la même méthode que précédemment.*

Ex 11 Changement de variables (et le changement de fonctions associé) pour se ramener à une edl2 à coefficients constants.

On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre suivante :

$$(E): (1+x^2)^2y'' + 2x(1+x^2)y' + y = 0 .$$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont définies de la même façon que pour les équations différentielles linéaires rencontrées en cours .
Cette edl2 n'est pas a coefficients constants donc le cours ne s'applique pas ! On va effectuer un changement de variables et le changement de fonctions associé dans le but de se ramener à une edl2 a coefficients constants pour pouvoir appliquer le cours .

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On effectue le changement de variable: $t = \text{Arctan}(x)$ ie. $x = \tan(t)$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $t \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et le changement de fonction associé : on définit g telle que : $f(x) = g(t)$ ie .

$$\forall t \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\ g(t) = f(\tan(t)) \qquad ie.\quad \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(Arctan(x)) .$$

1. Déterminer les expressions de $g'(t) et\ g''(t)$ en fonction de f , f' , f'' *et* $\tan(t)$. .
2. Montrer que : f est solution de (E) **<u>si et seulement</u>** si g est solution de $(E_1): z'' + z = 0$
3. En déduire les solutions (E) .

Ex 12 D'autres équations avec d'autres changements de variables

1. Résoudre (E):$t^2y''(t) + ty'(t) - y(t) = t^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. On effectuera le changement de variable $s = \ln(t)$.
2. Résoudre $(E): (1+x^2)^2y'' + 2x(1+x^2)y' + y = 0$ *sur* $\mathbb{R}$ *et en posant* $x = \tan(t)$.
3. Résoudre $(E): x^4y'' + 2x^3y' - y = e^{\frac{1}{x}}$ *sur* $\mathbb{R}^{+*}$ *et en posant* $t = \frac{1}{x}$.

Ex 13

1. Soit $I = \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et $(E_1) : cos(t)z''(t) - 2sin(t)z'(t) - cos(t)z(t) = 0$. Résoudre (E_1)sur I en effectuant le changement de fonction $\varphi(t) = cos(t)z(t)$.
2. Soit $J =]-1,1[$ et $(E_2): (1-x^2)y''(x) - 3xy'(x) - y(x) = 0$. Résoudre (E_2)sur J en effectuant le changement de variable $x = sin(t)$.

Ex 14 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que : pour tout $x \in \mathbb{R}$,$f(x) = 1 - \int_0^x (x-t)f(t)dt$.
Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie une edl à coefficients constants. En déduire que $f = cos$.

Ex 15 Trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel x , $f'(x) - f(x) = e^x \int_0^1 f(t)dt$.

Ex 16 Trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que : $f'(x) = f(\pi - x)$.

Ex 17 Trouver toutes les fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que : pour tous réels $x\ et\ y$,
$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$.

Ex 18 Trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x f(t)dt = f'(x) + 1$.

Ex 19 1) Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$, (E): $4x^2y'' + y = 0$ en effectuant le changement de variable $t = \ln(x)$.
2) Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$ et telles que $\forall x > 0, f'(x) = f\left(\frac{1}{4x}\right)$.

Ex 20 Trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$.

Ex 21 1) Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$, l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$.
2) Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle : $y''' + y'' + y' + y = 1$.