CORRIGE TD Calcul intégral.

Vous pouvez télécharger MAPLE sur vos iphone ou bien utiliser, en ligne, Géogébra pour vérifier vos résultats .

Ex 1

1. $I=\int_{\ln(4)}^{\ln(2)}\left(3e^{-\frac{x}{4}}+1\right)^2dx=\int_{\ln(4)}^{\ln(2)}9e^{-\frac{x}{2}}+6e^{-\frac{x}{4}}+1dx=[-18e^{-\frac{x}{2}}-24e^{-\frac{x}{4}}+x]_{2\ln(2)}^{\ln(2)}$

$I=-18e^{-\frac{\ln(2)}{2}}-24e^{-\frac{\ln(2)}{4}}+\ln(2)-\left[-18e^{-\frac{2\ln(2)}{2}}-24e^{-\frac{2\ln(2)}{4}}+2\ln(2)\right]=-\frac{18}{\sqrt{2}}-\frac{24}{\sqrt[4]{2}}+\frac{18}{2}+\frac{24}{\sqrt{2}}-\ln(2)$

$I=9+\frac{6}{\sqrt{2}}-\frac{24}{\sqrt[4]{2}}-\ln(2)$.

2. $I=\int_1^2 \underbrace{e^u\left(\frac{1}{u}+\ln(u)\right)}_{\substack{je\ reconnais\ (\varphi(u)+\varphi'(u))e^u\\ qui\ est\ la\ dérivée\ de\ \varphi(u)e^u}} du=[\ln(u)\,e^u]_1^2=\ln(2)\,e^2$.

3. $I_\alpha=\int_e^{e^2}\underbrace{\frac{1}{x\ln^\alpha(x)}}_{\substack{je\ reconnais\\ u'(x)u(x)^{-\alpha}}}dx.$

Si $\alpha\neq 1$ alors $I_\alpha=[\frac{1}{-\alpha+1}\ln^{-\alpha+1}(x)]_e^{e^2}=\frac{1}{-\alpha+1}[2^{-\alpha+1}-1]$.

Si $\alpha=1$ alors $I_1=[\ln|\ln(x)|]_e^{e^2}=\ln(2)$.

4. $I=\int_{e^3}^{e^2}\underbrace{\frac{1}{x\ln(x)\ln(\ln(x))}}_{\frac{u'(x)}{u(x)}\ avec\ u(x)=\ln(\ln(x))}dx=[\ln|\ln(\ln(x))|]_{e^3}^{e^2}=\ln|\ln(2)|-\ln|\ln(3)|=\ln\left(\frac{|\ln(2)|}{|\ln(3)|}\right)$.

5. $I=\int_0^1(1+\frac{1}{4}x)^3dx=4\int_0^1\underbrace{\frac{1}{4}(1+\frac{1}{4}x)^3}_{u'(x)u^3(x)}dx=4\left[\frac{1}{4}(1+\frac{1}{4}x)^4\right]_0^1=\left(\frac{5}{4}\right)^4-1$

6. $F(x)=\int^x\sqrt{\theta}+\frac{1}{\sqrt{\theta}}d\theta=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+cste$.

7. $I(x)=\int_{2x}^x t^{x^2}e^xdt=e^x\int_{2x}^x t^{x^2}dt=e^x\left[\frac{1}{x^2+1}t^{x^2+1}\right]_{2x}^x=\frac{e^x}{x^2+1}\left(x^{x^2+1}-(2x)^{x^2+1}\right)$

8. $I=\int_0^1 te^{3t^2}dt=\frac{1}{6}\int_0^1\underbrace{6te^{3t^2}}_{u'(t)e^{u(t)}}dt=\frac{1}{6}[e^{3t^2}]_0^1=\frac{1}{6}(e^3-1)$

9. $I=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}Arcsin(x)}}_{\frac{u'(x)}{u(x)}\ avec\ u(x)=Arcsin(x)}dx=[\ln(|Arcsin(x)|)]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\ln\left(\frac{|Arcsin(\frac{1}{\sqrt{2}})|}{|Arcsin(\frac{1}{2})|}\right)=\ln\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{6}}\right)=\ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

10. $F(t)=\int^t\frac{5}{cos^2(3z)}dz=\frac{5}{3}\int^t\frac{3}{cos^2(3z)}dz=\frac{5}{3}\tan(3t)+cste$

11. $I=\int_0^{\frac{2\pi}{3}}(cos^5y+4cos^3y-7)\sin(y)\,dy=-\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\left(\underbrace{-\sin(y)\,cos^5(y)}_{u'(y)u^5(y)}+4\underbrace{(-\sin(y))\,cos^3(y)}_{u'(y)u^3(y)}+7\sin(y)\right)dy=-\left[\frac{cos^6(y)}{6}+4\frac{cos^4(y)}{4}-7\cos(y)\right]_0^{\frac{2\pi}{3}}=-\frac{1}{6\times 64}-\frac{1}{16}-\frac{7}{2}+\frac{1}{6}+1-7=-\frac{1203}{128}$.

12. $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\sin(t))^5dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\sin(t))^4\sin(t)\,dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(1-\cos^2(t)\right)^2\sin(t)\,dt$

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin(t)-2\sin(t)\,cos^2(t)+\sin(t)\,cos^4(t)dt=\left[-\cos(t)+\frac{2}{3}cos^3(t)-\frac{1}{5}cos^5(t)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}$$

$I=2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{20}\frac{1}{\sqrt{2}}\right]=2\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{20}\right]\frac{1}{\sqrt{2}}=2\left[\frac{60-20+3}{60}\right]\frac{1}{\sqrt{2}}=\left[\frac{43}{30}\right]\frac{1}{\sqrt{2}}$.

13. $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin(3t))^2dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos(6t)}{2}dt=\left[\frac{t}{2}-\frac{\sin(6t)}{12}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{12}$.

14. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3(2x)\,sin^6(2x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2x)\cos^2(2x)\,sin^6(2x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2x)(1-\sin^2(2x))\,sin^6(2x)dx=$

$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{2\cos(2x)\,sin^6(2x)}_{u'(x)u^6(x)}-2\cos(2x)\sin^8(2x))\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{7}sin^7(2x)-\frac{1}{9}sin^9(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=0$

15. $I=\int_0^\pi\sin(nt)\sin(mt)dt=\int_0^\pi\frac{1}{2}[\cos(nt-mt)-\cos(nt+mt)]dt$

Si $n=m\neq 0$ alors $I=\int_0^\pi\frac{1}{2}[1-\cos(2nt)]dt=\left(\frac{1}{2}\right)\left[t-\frac{1}{2n}\sin(2nt)\right]_0^\pi=\frac{\pi}{2}$.

Si $n=m=0$ alors $I=\int_0^\pi 0dt=0$.

Si $n\neq m$ alors $n+m\neq 0$ et $n-m\neq 0$ et $I=\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{n-m}\sin((n-m)t))-\frac{1}{n+m}\sin((n+m)t))\right]_0^\pi=0$.

16. $I=\int_\pi^{\frac{2\pi}{3}}\frac{sint}{\sqrt{\cos(2t)+1}}dt=\int_\pi^{\frac{2\pi}{3}}\frac{sint}{\sqrt{2cos^2(t)}}dt=\int_\pi^{\frac{2\pi}{3}}\frac{sint}{-\sqrt{2}\cos(t)}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}[\ln(|\cos(t)|)]_\pi^{\frac{2\pi}{3}}$

$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ln\left(\left|\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right|\right)-\ln(|\cos(\pi)|)\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ln\left(\frac{1}{2}\right)-\ln(1)\right]=-\frac{\ln(2)}{\sqrt{2}}$

17. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(2t)\tan(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(2\cos^2(t)-1)\sin(t)}{\cos(t)}dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\cos(t)\sin(t) - \frac{\sin(t)}{\cos(t)}dt = [sin^2(t) + \ln(|\cos(t)|]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{4} + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln(3) - \ln(2)$

18. $F(x) = \int^x ch(3t)sh(t)dt = \int^x \frac{1}{4}(e^{3t}+e^{-3t})(e^t-e^{-t})dt = \frac{1}{4}\int^x e^{4t}+e^{-2t}-e^{2t}-e^{-4t}dt = \frac{1}{4}(\frac{1}{4}e^{4x} - \frac{1}{2}e^{-2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{-4x}) + cste$

19. $I = \int_0^1 \underbrace{\frac{Arctan(t)}{1+t^2}}_{u'(t)u(t)}dt = \left[\frac{1}{2}Arctan^2(t)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{\pi^2}{32}$

20. $I = \int_0^1 e^t\sin(e^t)\,dt = -\int_0^1 \underbrace{e^t(-\sin(e^t))}_{u'(t)cos'(u(t))}dt = -[\cos(e^t)]_0^1 = cos(1) - cos(e).$

21. $J(x) = \int_0^1 \underbrace{xsh(tx)}_{u'(t)ch'(u(t))}\, dt = [ch(tx)]_{t=0}^{t=1} = ch(x) - 1$. $Et, I(x) = \int_1^x \underbrace{xsh(tx)}_{u'(t)ch'(u(t))}\, dt = [ch(tx)]_{t=1}^{t=x} = ch(x^2) - ch(x).$

22. $I = \int_0^1 e^{2t}sh(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{3t} - e^t dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}e^{3t} - e^t\right]_0^1 = \frac{1}{6}e^3 - \frac{1}{2}e - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}e^3 - \frac{1}{2}e + \frac{1}{3}$

23. $I = \int_0^1 \frac{1}{1-it}dt = \int_0^1 \frac{1+it}{1+t^2}dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt + \frac{1}{2}i\int_0^1 \frac{2t}{1+t^2}dt = [Arctan(t)]_0^1 + \frac{1}{2}i[ln(1+t^2)]_0^1 = \frac{\pi}{4} + i\frac{ln(2)}{2}$.

24. $I = \int_{-1}^1 e^{-|u|}du = \int_{-1}^0 e^{-|u|}du + \int_0^1 e^{-|u|}du = \int_{-1}^0 e^u du + \int_0^1 e^{-u}du = 1 - \frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 2 - \frac{2}{e}$ ou bien on utilise la parité de l'intégrande.

25. $I = \int_{4/e}^{2/e} \frac{|y|}{y}dy = \int_{4/e}^1 \frac{|y|}{y}dy + \int_1^{2/e}\frac{|y|}{y}dy = \int_{4/e}^1 \frac{1}{y}dy + \int_1^{2/e}\frac{0}{y}dy = [\ln(y)]_{\frac{4}{e}}^1 = -\ln\left(\frac{4}{e}\right) = 1 - 2\ln(2).$

26. $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \underbrace{\frac{e^{x^3}-e^{-x^3}}{\ln(3+\cos(\tan(x)))}}_{f(x)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{e^{x^3}-e^{-x^3}}{\ln(3+\cos(\tan(x)))}dx + \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \frac{e^{x^3}-e^{-x^3}}{\ln(3+\cos(\tan(x)))}dx$. Or, l' intégrande f est impaire. Donc

$\int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \frac{e^{x^3}-e^{-x^3}}{\ln(3+\cos(\tan(x)))}dx = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{e^{x^3}-e^{-x^3}}{\ln(3+\cos(\tan(x)))}dx$. Et par conséquent, $I = 0$.

Ex 2

1. $I = \int_0^1 \underbrace{(5u^2+3)}_{f(u)}\underbrace{ch(2u)}_{g'(u)}du \overset{IPP}{=} \left[\underbrace{\frac{(5u^2+3)sh(2u)}{2}}_{f(u)g(u)}\right]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{\frac{10ush(2u)}{2}}_{f'(u)g(u)}du = 4sh(2) - 5\int_0^1 \underbrace{u}_{f(u)}\underbrace{sh(2u)}_{g'(u)}du$

$I = 4sh(2) - 5\left\{\left[\frac{u}{2}ch(2u)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{ch(2u)}{2}du\right\} = 4sh(2) - \frac{5}{2}ch(2) + \frac{5}{2}\left[\frac{sh(2u)}{2}\right]_0^1 = 4sh(2) - 5ch(2) + \frac{5}{4}sh(2)$

$I = \frac{1}{8}(11e^2 - 31e^{-2})$

2. $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}(5t-1)sin^3(2t)dt$

Linéarisons $sin^3(2t)$ avec les complexes :

$sin^3(2t) = \left(\frac{e^{2it}-e^{-2it}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{8i}(e^{6it} - 3e^{2it} + 3e^{-2it} - e^{-6it}) = -\frac{1}{8i}(2isin(6t) - 6i\sin(2t)) = -\frac{1}{4}sin(6t) + \frac{3}{4}\sin(2t).$

Donc, $I = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\underbrace{(5t-1)}_{u(t)}\left(\underbrace{3\sin(2t) - sin(6t)}_{v'(t)}\right)dt$

$I \overset{IPP}{=} \left(\frac{1}{4}\right)\left\{\left[(5t-1)\left(\frac{1}{6}\cos(6t) - \frac{3}{2}\cos(2t)\right)\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} 5\left(\frac{1}{6}\cos(6t) - \frac{3}{2}\cos(2t)\right)dt\right\}$

$I = \left(\frac{1}{4}\right)\left\{\left(5\frac{\pi}{6} - 1\right)\left(\frac{1}{6}\cos(\pi) - \frac{3}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) - \left(-5\frac{\pi}{3} - 1\right)\left(\frac{1}{6}\cos(-2\pi) - \frac{3}{2}\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) - \left[\left(\frac{5}{36}\sin(6t) - \frac{15}{4}\sin(2t)\right)\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\right\}$

$I = \left(\frac{1}{4}\right)\left\{\left(5\frac{\pi}{6} - 1\right)\left(-\frac{1}{6} - \frac{3}{4}\right) - \left(-5\frac{\pi}{3} - 1\right)\left(\frac{1}{6} + \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{5}{36}\sin(\pi) - \frac{15}{4}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) + \left(\frac{5}{36}\sin(-2\pi) - \frac{15}{4}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)\right\}$

$I = \left(\frac{1}{4}\right)\left\{\left(5\frac{\pi}{6} - 1\right)\left(-\frac{11}{12}\right) + \left(5\frac{\pi}{3} + 1\right)\left(\frac{11}{12}\right) + \frac{15}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{15}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$

$I = \left(\frac{1}{4}\right)\left\{\frac{55}{12}\frac{\pi}{6} + \left(\frac{11}{6}\right) + \frac{15}{4}\sqrt{3}\right\} = \frac{55}{288}\pi + \frac{15}{16}\sqrt{3} + \frac{11}{24}.$

3. $I = \int_1^2 \ln^2(y)dy = \int_1^2 \underbrace{1}_{u'(y)} . \underbrace{\ln^2(y)}_{v(y)}dy \overset{IPP}{=} [yln^2(y)]_1^2 - \int_1^2 \underbrace{y}_{u(y)}\underbrace{\frac{2}{y}\ln(y)}_{v'(y)}dy$

$I = 2ln^2(2) - 2\int_1^2 \ln(y)\,dy = 2ln^2(2) - 2[yln(y) - y]_1^2 = 2ln^2(y) - 4\ln(2) + 2.$

4. $I = \int_0^\pi \cos(2t)e^{-t}dt = \int_0^\pi \mathrm{Re}(e^{2it}e^{-t})dt = Re(\int_0^\pi e^{(2i-1)t}dt) = Re\left(\left[\frac{1}{2i-1}e^{(2i-1)t}\right]_0^\pi\right) = Re\left[\frac{1}{2i-1}(e^{(2i-1)\pi} - 1)\right]$

$I = Re\left[\frac{-1-2i}{5}(e^{i2\pi}e^{-\pi} - 1)\right] = Re\left[\frac{-1-2i}{5}(e^{-\pi} - 1)\right] = \frac{1-e^{-\pi}}{5}.$

5. $I = \int_{-1}^{\sqrt{3}} 2t^3 Arctan(t)dt = \left[\frac{t^4}{2}Arctan(t)\right]_{-1}^{\sqrt{3}} - \int_{-1}^{\sqrt{3}}\frac{t^4}{2}\frac{1}{1+t^2}dt \underset{\substack{car \\ t^4=(t^2-)(t^2+1)+1}}{=} \frac{9}{2}\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{\sqrt{3}} t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}dt$

$I = \frac{3}{2}\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3} - t + Arctan(t)\right]_{-1}^{\sqrt{3}} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} - 1 - \frac{\pi}{4}\right] = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}\pi.$

6. $I = \int_2^1 t^2\ln(4t)\,dt = -\int_1^2 \underbrace{t^2}_{u'(t)}.\underbrace{\ln(4t)}_{v(t)}dt \overset{IPP}{=} -\left[\frac{t^3}{3}ln(4t)\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{t^3}{3}\frac{4}{4t}dt = -\frac{8}{3}\ln(8) + \frac{1}{3}\ln(4) + \frac{1}{3}\int_1^2 t^2dt$

$I = -\frac{22}{3}\ln(2) + \frac{1}{3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^2 = \frac{7}{9} - \frac{22}{3}\ln(2).$

7. $I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\underbrace{(3t-t^3)}_{v(t)}\underbrace{\sin(4t)}_{u'(t)}dt=\left[-\frac{(3t-t^3)\cos(4t)}{4}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{0}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}-\frac{(3-3t^2)\cos(4t)}{4}dt=\frac{3}{8}\pi-\frac{1}{32}\pi^3-\frac{3}{4}\underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(t^2-t)\cos(4t)\,dt}_{=J}$.

$J=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(t^2-t)\cos(4t)\,dt=\left[\frac{t^2-t}{4}\sin(4t)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{0}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{(2t-1)\sin(4t)}{4}dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(2t-1)\sin(4t)}{4}dt$

$J=\left[-\frac{(2t-1)}{16}\cos(4t)\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2\cos(4t)}{16}dt=-\frac{(\pi-1)}{16}-\frac{1}{16}+\frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sin(4t)\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{\pi}{16}$.

Donc, $I=\frac{3}{8}\pi-\frac{1}{32}\pi^3+\frac{3}{4}\frac{\pi}{16}=\frac{27}{64}\pi-\frac{1}{32}\pi^3$

8. $I=\int_{0}^{\pi/4}e^t(\sin(t)-\cos(t))\,dt=\int_{0}^{\pi/4}e^t\left(\mathrm{Im}(e^{it})-\mathrm{Re}(e^{it})\right)dt=\int_{0}^{\pi/4}\left(\mathrm{Im}(e^{(1+i)t})-\mathrm{Re}(e^{(1+i)t})\right)dt=Im\left[\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}e^{(1+i)t}dt\right]-Re\left[\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}e^{(1+i)t}dt\right]$. Or, $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}e^{(1+i)t}dt=\left[\frac{1}{1+i}e^{(1+i)t}\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{1+i}e^{(1+i)\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{2}e^{\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{\pi}{4}}-\frac{1-i}{2}=\frac{1-i}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)e^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1-i}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1-i}{2}$. Donc $I=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$.

9. $F(y)=\int^{y}Arccos(t)dt$? $Arccos$ est continue sur $[-1,1]$ donc admet des primitives sur cet intervalle et $G:(y\mapsto\int_{0}^{y}1.Arccos(t)dt)$ est la primitive $Arccos$ qui s'annule en 0. Soit $y\in]-1,1[$.

$F(y)=\int_{0}^{y}\underbrace{1}_{u'(t)}.\underbrace{Arccos(t)}_{v(t)}dt\underset{\substack{IPP\\ u\ et\ v\ sont\\ de\ classe\ C^1\\ sur\ ]-1,1[\ donc\\ sur\ S_{0,y}}}{=}\left[\underbrace{t}_{u(t)}\underbrace{Arccos(t)}_{v(t)}\right]_{0}^{y}-\int_{0}^{y}-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt=yArccos(y)-\frac{1}{2}\int_{0}^{y}\underbrace{\frac{-2t}{\sqrt{1-t^2}}}_{u'(t)u(t)^{-\frac{1}{2}}}dt$

$F(y)=yArccos(y)-\left[\frac{1}{2}2\sqrt{1-t^2}\right]_{0}^{y}=yArccos(y)-\sqrt{1-y^2}+1$. Comme F et $(y\mapsto yArccos(y)-\sqrt{1-y^2}+1)$ sont continues en 1 et -1, $\forall y\in[-1,1], F(y)=yArccos(y)-\sqrt{1-y^2}+1$. J'en déduis que $(y\mapsto yArccos(y)-\sqrt{1-y^2}+c)$ tel que c constante réelle est la forme de toute primitive de $Arccos$ sur $[-1,1]$.

10. $I=\int_{0}^{\pi}tsin(t)e^tdt=Im\left(\int_{0}^{\pi}te^{(1+i)t}dt\right)$.

Or, $\int_{0}^{\pi}\underbrace{t}_{v(t)}\underbrace{e^{(1+i)t}}_{u'(t)}dt\overset{IPP}{=}\left[\frac{t}{1+i}e^{(1+i)t}\right]_{0}^{\pi}-\int_{0}^{\pi}\frac{1}{1+i}e^{(1+i)t}dt=\frac{\pi}{1+i}e^{(1+i)\pi}-\left[\left(\frac{1}{1+i}\right)^2e^{(1+i)t}\right]_{0}^{\pi}$

$\underset{\substack{car\\ e^{(1+i)\pi}=e^{\pi}e^{i\pi}=-e^{\pi}}}{=}-\frac{\pi(1-i)}{2}e^{\pi}-\left(\frac{1-i}{2}\right)^2(-e^{\pi}-1)=-\frac{\pi(1-i)}{2}e^{\pi}+\frac{i}{2}(-e^{\pi}-1)=-\frac{\pi}{2}e^{\pi}+i\left(\frac{\pi}{2}e^{\pi}-\frac{1}{2}e^{\pi}-\frac{1}{2}\right)$.

Ainsi, $I=\frac{\pi}{2}e^{\pi}-\frac{1}{2}e^{\pi}-\frac{1}{2}$.

11. $I=\int_{0}^{1}a^3e^{-a^2/2}da=-\int_{0}^{1}\underbrace{a^2}_{v(a)}\underbrace{(-a)e^{-\frac{a^2}{2}}}_{u'(a)}da\overset{IPP}{=}-\left[a^2e^{-\frac{a^2}{2}}\right]_{0}^{1}+\int_{0}^{1}2ae^{-\frac{a^2}{2}}da=-\frac{1}{\sqrt{e}}+2\left[-e^{-\frac{a^2}{2}}\right]_{0}^{1}=2-\frac{3}{\sqrt{e}}$

12. $I=\int_{1}^{2}\underbrace{1}_{u'(t)}.\underbrace{\cos(\ln(t))}_{v(t)}dt\underset{IPP}{=}[t\cos(\ln(t))]_1^2-\int_{1}^{2}t\frac{1}{t}(-\sin(\ln(t)))dt=2\cos(\ln(2))-1+\int_{1}^{2}\underbrace{1}_{u'(t)}\underbrace{\sin(\ln(t))}_{v(t)}dt$

$I\underset{IPP}{=}2\cos(\ln(2))-1+[t\sin(\ln(t))]_1^2-\int_{1}^{2}t\frac{1}{t}(\cos(\ln(t)))dt$.

$I=2(\cos(\ln(2))+\sin(\ln(2)))-1-I$

Par conséquent, $I=(\cos(\ln(2))+\sin(\ln(2)))-\frac{1}{2}$.

Ex 3

1. $I=\int_{1}^{2}\frac{3}{1-4t}dt=-\frac{3}{4}\int_{1}^{2}\frac{-4}{1-4t}dt=-\frac{3}{4}[\ln|1-4t|]_1^2=-\frac{3}{4}\ln\left(\frac{7}{3}\right)$.

2. $I=\int_{-4}^{-2}\frac{1-x}{3x-2}dx=\int_{-4}^{-2}\frac{-\frac{1}{3}(3x-2)-\frac{2}{3}+1}{3x-2}dx=\int_{-4}^{-2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\frac{1}{3x-2}dx=\int_{-4}^{-2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\frac{3}{3x-2}dx=\left[-\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}\ln(|3x-2|)\right]_{-4}^{-2}=-\frac{2}{3}+\frac{1}{9}\ln\left(\frac{4}{7}\right)$.

3. $I=\int_{0}^{-1}\frac{4}{(1-2x)^7}dx=(-2)\int_{0}^{-1}\underbrace{\frac{-2}{(1-2x)^7}}_{u'(x)u(x)^{-7}}dx=(-2)\left[\frac{(1-2x)^{-6}}{-6}\right]_{0}^{-1}=\frac{1}{3^7}-\frac{1}{3}$

4. $I=\int_{0}^{1}\frac{x^6-1}{1+2x}dx\underset{\substack{division\ euclidienne\\ de\ x^6-1\ par\ 2x+1}}{=}\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{2}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8}x^3-\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{32}x-\frac{1}{64}\right)-\frac{63}{128}\left(\frac{2}{2x+1}\right)dx$

$I=\left[\frac{x^6}{12}-\frac{x^5}{20}+\frac{x^4}{32}-\frac{x^3}{48}+\frac{x^2}{64}-\frac{x}{64}-\frac{63}{128}\ln(|2x+1|)\right]_{0}^{1}$

$I=\frac{1}{12}-\frac{1}{20}+\frac{1}{32}-\frac{1}{48}+\frac{1}{64}-\frac{1}{64}-\frac{63}{32}\ln(3)=\frac{7}{160}-\frac{63}{128}\ln(3)$.

5. $I=\int_{-2}^{-3}\frac{1}{t(t^2-1)}dt=\int_{-2}^{-3}\frac{1}{t(t-1)(t+1)}dt\underset{\substack{décomposition\\ en\ éléments\\ simples}}{=}\int_{-2}^{-3}-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\frac{1}{t-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{t+1}dt$

$I=\left[-\ln(|t|)+\frac{1}{2}\ln(|t-1|)+\frac{1}{2}\ln(|t+1|)\right]_{-2}^{-3}=-\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{3}\right)+\frac{1}{2}\ln(2)$

$I=-\ln(3)+\ln(2)+\ln(2)-\frac{1}{2}\ln(3)+\frac{1}{2}\ln(2)=\frac{5}{2}\ln(2)-\frac{3}{2}\ln(3)$.

$$
\begin{array}{c|l}
x^6-1 & 2x+1 \\
\underline{x^6+\frac{1}{2}x^5} & \frac{1}{2}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8}x^3-\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{32}x-\frac{1}{64} \\
-\frac{1}{2}x^5-1 & \\
\underline{-\frac{1}{2}x^5-\frac{1}{4}x^4} & \\
\frac{1}{4}x^4-1 & \\
\underline{\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8}x^3} & \\
-\frac{1}{8}x^3-1 & \\
\underline{-\frac{1}{8}x^3 1-\frac{1}{16}x^2} & \\
\frac{1}{16}x^2-1 & \\
\underline{\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{32}x} & \\
-\frac{1}{32}x-1 & \\
\underline{-\frac{1}{32}x-\frac{1}{64}} & \\
\frac{1}{64}-1 &
\end{array}
$$

$x^6-1=\left(\frac{1}{2}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8}x^3-\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{32}x-\frac{1}{64}\right)(2x+1)-\frac{63}{64}$

Donc, $\frac{x^6-1}{2x+1}=\left(\frac{1}{2}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8}x^3-\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{32}x-\frac{1}{64}\right)-\frac{63}{64}\left(\frac{1}{2x+1}\right)$

6. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{4t-5}{(t+1)(t+2)}dt \underbrace{=}_{\substack{décomposition\\ en\ éléments\\ simples}} \int_0^1 \frac{13}{t+2} - \frac{9}{t+1}dt$

$I = [13\ln(|t+2|) - 9\ln(|t+1|)]_0^1 = 13\ln\left(\frac{3}{2}\right) - 9\ln(2) = 13\ln(3) - 22\ln(2)$

7. $I = \displaystyle\int_{-1}^0 \frac{t^3}{5+3t^2}dt = \int_{-1}^0 \frac{\frac{1}{3}t(5+3t^2)-\frac{5}{3}t}{5+3t^2}dt = \int_{-1}^0 \frac{1}{3}t - \frac{5}{18}\frac{6t}{5+3t^2}dt = \left[\frac{1}{6}t^2 - \frac{5}{18}\ln(5+3t^2)\right]_{-1}^0$

$I = -\frac{5}{18}\ln\left(\frac{5}{8}\right) - \frac{1}{6}.$

8. $I = \displaystyle\int_{-\frac{5}{\sqrt{3}}}^0 \frac{1}{25+9t^2}dt = \frac{1}{25}\int_{-\frac{5}{\sqrt{3}}}^0 \frac{1}{1+\left(\frac{3}{5}t\right)^2}dt \underbrace{=}_{\substack{CV\\ u=\frac{3}{5}t\\ dt=\frac{5}{3}du\\ t=0\Leftrightarrow u=0\\ t=-\frac{5}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow u=-\sqrt{3}}} \frac{1}{25}\int_{-\frac{5}{\sqrt{3}}}^0 \frac{1}{1+\left(\frac{3}{5}t\right)^2}dt = \frac{1}{25}\int_{-\sqrt{3}}^0 \frac{1}{1+u^2}\frac{5}{3}du = \frac{1}{15}[Arctan(u)]_{-\sqrt{3}}^0$

$I = \frac{1}{15}\left(0 - Arctan(-\sqrt{3})\right) = \frac{1}{15}\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{45}.$

9. $I = \displaystyle\int_1^0 \frac{x^3}{x^2+1}dx = \int_1^0 \frac{x(x^2+1)-x}{x^2+1}dx = \int_1^0 x - \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1}dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_1^0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(2).$

10. $I = \displaystyle\int_1^0 \frac{x}{(x^2+1)^3}dx = \frac{1}{2}\int_1^0 \frac{2x}{(x^2+1)^3}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-2}(x^2+1)^{-2}\right]_1^0 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{16} = -\frac{3}{16}$

11. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}dt = \int_0^1 \frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt = \int_0^1 1 - \frac{1}{1+t^2}dt = [t - Arctan(t)]_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}.$

12. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2}dt = \int_0^1 \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^2}dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt - \frac{1}{2}\int_0^1 \underbrace{t}_{v(t)}\underbrace{\frac{2t}{(1+t^2)^2}}_{u'(t)}dt$

$$I \overset{IPP}{=} [Arctan(t)]_0^1 - \frac{1}{2}\left[t\left(-\frac{1}{1+t^2}\right)\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 -\frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}[Arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$$

13. $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{t^2}{1+4t^2}dt = \int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{\frac{1}{4}(1+4t^2)-\frac{1}{4}}{1+4t^2}dt = \int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\frac{1}{1+4t^2}dt = \int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{4}dt - \frac{1}{4}\int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{1+(2t)^2}dt \underbrace{=}_{\substack{CV\\ u=2t\\ \frac{1}{2}du=dt\\ t=0\Leftrightarrow u=0\\ t=\frac{1}{2}\Leftrightarrow u=1}} -\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\int_1^0 \frac{1}{1+u^2}\left(\frac{1}{2}\right)du$

$I = -\frac{1}{8} - \frac{1}{8}[Arctan(u)]_1^0 = -\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{32} - \frac{1}{8}.$

14. $I = \displaystyle\int_{-\frac{1}{4}}^0 \frac{t^2+t}{1-4t^2}dt = \int_{-\frac{1}{4}}^0 \frac{-\frac{1}{4}(1-4t^2)+t+\frac{1}{4}}{1-4t^2}dt = \int_{-\frac{1}{4}}^0 -\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\frac{-8t}{1-4t^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{1-4t^2}dt$

$I \underbrace{=}_{\substack{décomposotion\\ en\ éléments\ simples\\ \frac{1}{1-4t^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{(1-2t)}+\frac{1}{2}\frac{1}{(1+2t)}}} \displaystyle\int_{-\frac{1}{4}}^0 -\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\frac{-8t}{1-4t^2} - \frac{1}{16}\frac{-2}{(1-2t)} + \frac{1}{16}\frac{2}{(1+2t)}dt = \left[-\frac{1}{4}t - \frac{1}{8}\ln|1-4t^2| + \frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+2t}{1-2t}\right|\right]_{-\frac{1}{4}}^0$

$I = -\frac{1}{16} + \frac{1}{8}\ln\frac{3}{4} - \frac{1}{16}\ln\frac{1}{3} = -\frac{1}{16} - \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{3}{16}\ln 3$

15. $I = \displaystyle\int_0^{-1} \frac{1}{2+t+t^2}dt \underbrace{=}_{\substack{2+t+t^2=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+2\\ =\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\\ =\frac{7}{4}\left[\frac{4}{7}\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+1\right]\\ =\frac{7}{4}\left[\left(\frac{2t+1}{\sqrt{7}}\right)^2+1\right]}} \int_0^{-1} \frac{1}{\frac{7}{4}\left[\left(\frac{2t+1}{\sqrt{7}}\right)^2+1\right]}dt = \frac{4}{7}\int_0^{-1} \frac{1}{\left[\left(\frac{2t+1}{\sqrt{7}}\right)^2+1\right]}dt \underbrace{=}_{\substack{CV\\ u=\frac{2t+1}{\sqrt{7}}\\ dt=\frac{\sqrt{7}}{2}du\\ t=0\Leftrightarrow u=\frac{1}{\sqrt{7}}\\ t=0\Leftrightarrow u=-\frac{1}{\sqrt{7}}}} \frac{4}{7}\int_{\frac{1}{\sqrt{7}}}^{-\frac{1}{\sqrt{7}}} \frac{1}{[u^2+1]}\frac{\sqrt{7}}{2}du = \frac{2}{\sqrt{7}}[Arctan(u)]_{\frac{1}{\sqrt{7}}}^{-\frac{1}{\sqrt{7}}}$

Ainsi, $I = -\frac{4}{\sqrt{7}}Arctan\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right).$

16. $I = \displaystyle\int_0^1 \underbrace{\frac{2t-1}{2-t+t^2}}_{\frac{u'(t)}{u(t)}}dt = [\ln|2-t+t^2|]_0^1 = 0$

17. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2-3t}{2t^2+t+1}dt = \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}(2t^2+t+1)-\frac{7}{2}t-\frac{1}{2}}{2t^2+t+1}dt = \int_0^1 \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{7t+1}{2t^2+t+1}dt = \int_0^1 \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\frac{7}{4}(4t+1)-\frac{3}{4}}{2t^2+t+1}dt = \int_0^1 \frac{1}{2} - \frac{7}{8}\underbrace{\frac{(4t+1)}{2t^2+t+1}}_{\frac{P'(t)}{P(t)}} + \frac{3}{8}\frac{1}{2t^2+t+1}dt$

$I = \left[\frac{1}{2}t - \frac{7}{8}\ln|2t^2+t+1|\right]_0^1 + \frac{3}{8}\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2t^2+t+1}dt = \frac{1}{2} - \frac{7}{8}\ln(4) + \frac{3}{8}J$

Or, $J \underbrace{=}_{\substack{2t^2+t+1=2\left(t^2+\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right)\\ =2\left[\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{16}\right]\\ =\frac{7}{8}\left[\left(\frac{4t+1}{\sqrt{7}}\right)^2+1\right]}} \frac{8}{7}\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\left[\left(\frac{4t+1}{\sqrt{7}}\right)^2+1\right]}dt = \frac{8}{7}\int_{\frac{1}{\sqrt{7}}}^{\frac{5}{\sqrt{7}}} \frac{1}{u^2+1}\frac{\sqrt{7}}{4}dt = \frac{2}{\sqrt{7}}\left[Arctan\frac{5}{\sqrt{7}} - Arctan\frac{1}{\sqrt{7}}\right].$

Donc, $I = \frac{1}{2} - \frac{7}{4}\ln(2) + \frac{3}{4\sqrt{7}}\left[Arctan\frac{5}{\sqrt{7}} - Arctan\frac{1}{\sqrt{7}}\right].$

Ex 4

1. $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^4(t)dt \underbrace{=}_{\substack{u=\tan(t)\text{ avec } t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\\ \text{donc } t=Arctan(u)\\ 1.dt=\frac{1}{1+u^2}.du\\ t=0\Leftrightarrow u=0\\ t=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow u=1}} \int_0^1 \frac{u^4}{1+u^2}du \underbrace{=}_{\substack{\text{division euclidienne}\\ u^4=(u^2+1)(u^2-1)+1\\ \text{donc} \frac{u^4}{(u^2+1)}=(u^2-1)+\frac{1}{(u^2+1)}}} \int_0^1 (u^2-1)+\frac{1}{1+u^2}du = \left[\frac{u^3}{3}-u+Arctan(u)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}$

2. $I=\int_3^4 \frac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx \underbrace{=}_{\substack{t=1+x^2\\ dt=2xdx\\ \text{donc } \frac{1}{2}dt=xdx\\ x=3\Leftrightarrow t=10\\ x=4\Leftrightarrow t=17}} \int_{10}^{17}\frac{\ln(t)}{t}\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{10}^{17}\underbrace{\frac{1}{t}}_{u'(t)}\underbrace{\ln(t)}_{u(t)}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{\ln(t)^2}{2}\right]_{10}^{17} = \frac{1}{4}[(\ln(17))^2-(\ln(10))^2]$.

3. $I=\int_{\frac{1}{2}}^0 e^{\sqrt{u}}du \underbrace{=}_{\substack{t=\sqrt{u}\\ u=t^2\\ du=2tdt\\ u=\frac{1}{2}\Leftrightarrow t=\frac{1}{\sqrt2}\\ u=0\Leftrightarrow t=0}} \int_{\frac{1}{\sqrt2}}^0 e^t 2tdt = 2\int_{\frac{1}{\sqrt2}}^0 te^t dt \underbrace{=}_{\substack{IPP\\ u(t)=t, u'(t)=1\\ v(t)=e^t, v'(t)=e^t\\ u \text{ et } v\ C^1 \text{ sur } \left[0,\frac{1}{\sqrt2}\right]}} 2\left\{[te^t]_{\frac{1}{\sqrt2}}^0-\int_{\frac{1}{\sqrt2}}^0 e^t dt\right\} = 2\left\{-\frac{1}{\sqrt2}e^{\frac{1}{\sqrt2}}-[e^t]_{\frac{1}{\sqrt2}}^0\right\} = 2\left\{-\frac{1}{\sqrt2}e^{\frac{1}{\sqrt2}}-1+e^{\frac{1}{\sqrt2}}\right\}$

   $I=(2-\sqrt2)e^{\frac{1}{\sqrt2}}-2$.

4. $I=\int_0^1 x^2 Arccos(x)dx \underbrace{=}_{\substack{x=\cos(\theta)\\ \theta=Arccos(x)\\ dx=-\sin(\theta)d\theta\\ x=0\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}\\ x=1\Leftrightarrow\theta=0}} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 cos^2(\theta)Arccos(\cos(\theta))(-\sin(\theta))d\theta$

   $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{\theta}_{v(\theta)}\underbrace{cos^2(\theta)\sin(\theta)}_{u'(\theta)}d\theta \underbrace{=}_{IPP} \left[\theta\frac{-\cos^3(\theta)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3(\theta)}{3}d\theta = 0+\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\theta)\left(1-\sin^2(\theta)\right)d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\theta)-\sin^2(\theta)\cos(\theta)\,d\theta$

   $I=\frac{1}{3}\left[\sin(\theta)-\frac{\sin^3(\theta)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}\left[1-\frac{1}{3}\right]=\frac{2}{9}$.

5. $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{sin(x)} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x)dx}{sin^2(x)} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x)dx}{1-cos^2(x)} \underbrace{=}_{\substack{CV\\ u=\cos(x)}} \int_{\frac{\sqrt2}{2}}^0\frac{-du}{1-u^2} = \int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}\frac{du}{1-u^2} \underbrace{=}_{\substack{\text{décomposition}\\ \text{en éléments simples}\\ \frac{1}{1-u^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-u}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+u}}} \int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}\frac{1}{2}\frac{1}{1-u}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+u}du = \int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}-\frac{1}{2}\frac{-1}{1-u}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+u}du$

   $I=\left[-\frac{1}{2}ln|1-u|+\frac{1}{2}ln|1+u|\right]=\frac{1}{2}ln\left|\frac{1+\frac{\sqrt2}{2}}{1-\frac{\sqrt2}{2}}\right| = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt2}{2-\sqrt2}\right)$.

6. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+sin(x)} \underbrace{=}_{\substack{\sin(x)=2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\\ \sin(x)=2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\\ \sin(x)=\frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+\frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right))dx}{(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right))+\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \underbrace{=}_{\substack{u=\tan\left(\frac{x}{2}\right)\\ du=\frac{1}{2}\left(1+tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx\\ \text{donc } \left(1+tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx=2du\\ x=0\Leftrightarrow u=0\\ x=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow u=1}} \frac{1}{2}\int_0^1\frac{2du}{1+u^2+u} \underbrace{=}_{\substack{u^2+u+1=\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\\ =\frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt3}\left(u+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1\right]\\ =\frac{3}{4}\left[\left(\left(\frac{2u+1}{\sqrt3}\right)\right)^2+1\right]}} \frac{4}{3}\int_0^1\frac{du}{\left(\left(\frac{2u+1}{\sqrt3}\right)\right)^2+1}$

   $\underbrace{=}_{\substack{t=\left(\frac{2u+1}{\sqrt3}\right)\\ \text{donc } u=\frac{\sqrt3 t-1}{2}\\ dt=\frac{2}{\sqrt3}du\\ du=\frac{\sqrt3}{2}dt\\ u=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{\sqrt3}\\ u=1\Leftrightarrow t=\sqrt3}} \frac{4}{3}\int_{\frac{1}{\sqrt3}}^{\sqrt3}\frac{\frac{\sqrt3}{2}du}{t^2+1} = \frac{2}{\sqrt3}\left[Arctan(\sqrt3)-Arctan\left(\frac{1}{\sqrt3}\right)\right] = \frac{2}{\sqrt3}\left[\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right] = \frac{1}{\sqrt3}\frac{\pi}{3} = \frac{\pi\sqrt3}{9}$

7. Attention , ici, je ne peux faire le changement de variables $u=\tan(x)$ sur $[0,\pi]$ car la fonction tan n'est pas définie sur $[0,\pi]$. je dois donc travailler

8. $I=\int_0^{\pi}\underbrace{\frac{1}{1+cos^2(x)}}_{f(x)}dx \underbrace{=}_{\substack{\text{car } l'\text{intégrande } f\\ \text{est paire}}} 2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+cos^2(x)}dx \underbrace{=}_{\substack{\text{car}\\ f \text{ est continue}\\ \text{sur } \mathbb{R} \text{ donc}\\ F:\left(y\mapsto\int_0^y f(y)dy\right)\\ \text{est dérivable donc}\\ \text{continue sur } \mathbb{R}.\\ \text{Alors } F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{y\to\frac{\pi}{2}}F(y)}} 2\lim_{y\to\frac{\pi}{2}}\int_0^y\frac{1}{1+cos^2(x)}dx.$

   Or, $\forall y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $\int_0^y\frac{1}{1+cos^2(x)}dx = \int_0^y\frac{dx}{1+\frac{1}{1+tan^2(x)}} = \int_0^y\frac{(1+tan^2(x))dx}{2+tan^2(x)} \underbrace{=}_{\substack{u=\tan(x)\\ du=(1+tan^2(x))dx\\ x=0\Leftrightarrow u=0\\ x=y\Leftrightarrow u=\tan(y)}} \int_0^{\tan(y)}\frac{du}{2+u^2} = \frac{1}{2}\int_0^{\tan(y)}\frac{du}{1+\left(\frac{u}{\sqrt2}\right)^2} \underbrace{=}_{\substack{t=\frac{u}{\sqrt2}\\ \sqrt2 dt=du\\ u=0\Leftrightarrow t=0\\ u=\tan(y)\Leftrightarrow t=\frac{\tan(y)}{\sqrt2}}} \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\tan(y)}{\sqrt2}}\frac{\sqrt2 dt}{1+t^2}$

   $\int_0^y\frac{1}{1+cos^2(x)}dx = \frac{1}{\sqrt2}[Arctan(t)]_0^{\frac{\tan(y)}{\sqrt2}} = \frac{1}{\sqrt2}Arctan\left(\frac{\tan(y)}{\sqrt2}\right)$. Alors, $\lim_{y\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan(y)}{\sqrt2}=+\infty$ *et* $\lim_{X\to+\infty}\operatorname{Arctan}(X)=\frac{\pi}{2}$, $\lim_{y\to\frac{\pi}{2}}\int_0^y\frac{1}{1+cos^2(x)}dx=\frac{1}{\sqrt2}\frac{\pi}{2}$.

   Ainsi, $I=\frac{\pi}{\sqrt2}$.

9. $I=\int_1^2 \frac{1+\sqrt{1+t}}{\sqrt{1+t}-1}dt \underbrace{=}_{\substack{u=\sqrt{1+t}\\ du=\frac{1}{2\sqrt{1+t}}dt \text{ donc } dt=2udu\\ t=1\Leftrightarrow u=\sqrt{2}\\ t=2\Leftrightarrow u=\sqrt{3}}} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{1+u}{u-1}2udu = 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\frac{u^2+u}{u-1}du \underbrace{=}_{\substack{\text{division euclidienne}\\ u^2+u \;\widehat{=}\; (u-1)(u+2)+2\\ \text{donc } \frac{u^2+u}{u-1}=u+2+\frac{2}{u-1}}} 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} u+2+\frac{2}{u-1}du$

$$I=2\left[\frac{u^2}{2}+2u+2ln|u-1|\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}=2\left(\frac{3}{2}-1+2(\sqrt{3}-\sqrt{2})+2ln|\sqrt{3}-1|-2ln|\sqrt{2}-1|\right)=1+4(\sqrt{3}-\sqrt{2})+4ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}-1}\right)$$

10. $I=\int_{\frac{1}{2}}^{0}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}dt \underbrace{=}_{\substack{\text{comme } t\in\left[0,\frac{1}{2}\right], \text{on peut poser } t=cos(x)=\varphi(x)\\ \text{avec } \varphi \text{ de classe } C^1 sur \left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right].\\ Alors, x=Arccos(t)\\ dt=-\sin(x)dx\\ t=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}\\ t=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}}} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1+cos(x)}{1-cos(x)}}(-\sin(x))dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\frac{2cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}}\sin(x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\sin(x)\,dx=$

$$=2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx=2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)dx=2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)dx=2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}(\cos(x)+1)\,dx=[sin(x)+x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}-1-\frac{\pi}{6}.$$

11. $I=\int_0^1\frac{dx}{1+ch(x)}=2\int_0^1\frac{dx}{2+e^x+e^{-x}} \underbrace{=}_{\substack{t=e^x \text{ i.e. } x=\ln(t)\\ dt=e^x dx \text{ i.e. } dx=\frac{1}{t}dt\\ x=0\Leftrightarrow t=1\\ x=1\Leftrightarrow t=e}} 2\int_1^e\frac{1}{2+t+\frac{1}{t}}\frac{dt}{t}=2\int_1^e\frac{1}{t^2+2t+1}dt=2\int_1^e\underbrace{\frac{1}{(t+1)^2}}_{u'(t)u(t)^{-2}}dt=2\left[\frac{-1}{1+t}\right]_1^e=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1+e}\right)=1-\frac{2}{1+e}.$

12. $F(y)=\int_0^y\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx \underbrace{=}_{\substack{x=sh(t)\\ dx=ch(t)dt\\ x=0\Leftrightarrow t=0\\ x=y\Leftrightarrow t=\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=sh^{-1}(y)}} \int_0^{sh^{-1}(y)}\frac{sh^3(t)}{\sqrt{1+sh^2(t)}}ch(t)dt=\int_0^{sh^{-1}(y)}\frac{sh^3(t)}{\sqrt{ch^2(t)}}ch(t)dt=\int_0^{sh^{-1}(y)}sh^3(t)dt=$

$$\int_0^{sh^{-1}(y)}sh(t)(ch^2(t)-1)dt=\int_0^{sh^{-1}(y)}-sh(t)+\underbrace{sh(t)ch^2(t)}_{u'(t)u(t)^2}dt=\left[-ch(t)+\frac{ch^3(t)}{3}\right]_0^{sh^{-1}(y)}.$$

Or $ch\left(sh^{-1}(y)\right)=\sqrt{1+sh^2(sh^{-1}(y))}=\sqrt{1+y^2}$.

Donc, $I=-\sqrt{1+y^2}+\frac{\left(\sqrt{1+y^2}\right)^3}{3}+1-\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{1+y^2}}{3}\left((1+y^2)-3\right)+\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{1+y^2}}{3}(y^2-2)-\frac{2}{3}$.

13. Le changement de variable $u=tan\left(\frac{x}{2}\right)$ ne peut se faire pour $x\in[0,\pi]$ car $tan\left(\frac{x}{2}\right)$ n'existe pas pour $x=\pi$. Mais l'intégrande $f:\left(x\mapsto\frac{1}{1+sinx}\right)$ vérifie $\forall x\in[0,\pi], f(\pi-x)=f(x)$. Donc, la courbe de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x=\frac{\pi}{2}$. Par conséquent, $\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+sinx}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{1+sinx}dx$ et par suite, $I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+sinx}dx$. On maintenant faire le CV : $u=tan\left(\frac{x}{2}\right)$ pour $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

$I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+sinx}dx \underbrace{=}_{\sin(x)=\frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx \underbrace{=}_{\substack{u=\tan\left(\frac{x}{2}\right)\\ du=\frac{1}{2}\left(1+tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx\\ \text{donc } \left(1+tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx=2du\\ x=0\Leftrightarrow u=0\\ x=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow u=1}} 2\int_0^1\frac{1}{1+u^2+2u}2du=$

$$4\int_0^1\frac{1}{(1+u)^2}du=\left[-\frac{4}{1+u}\right]_0^1=-2+4=2$$

Ex 5 Calculer à l'aide de changements de variables ou pas les intégrales ou primitives suivantes :

1. $I=\int_0^1 \underbrace{\frac{2t+1}{\sqrt[5]{t^2+t+1}}}_{\substack{u'(t)(u(t))^{-\frac15} \\ avec\ u(t)=t^2+t+1}} dt = \left[\frac{u(t)^{-\frac15+1}}{-\frac15+1}\right]_0^1 = \frac54\left[3^{\frac45}-1\right]$

2. $I=\int_{-2}^{-1}\frac{1}{\sqrt{2-3x}}dx = -\frac13\int_{-2}^{-1}\underbrace{\frac{-3}{\sqrt{2-3x}}}_{\substack{u'(x)u(x)^{-\frac12} \\ avec\ u(x)=2-3x}}dx = -\frac13\left[\frac{u(x)^{-\frac12+1}}{-\frac12+1}\right]_{-2}^{-1} = -\frac23\left[\sqrt5-\sqrt8\right]$

3. $I=\int_0^{-1}(1-2\alpha)^{\frac47}d\alpha = -\frac12\int_0^{-1}\underbrace{(-2)(1-2\alpha)^{\frac47}}_{u'(\alpha)u(\alpha)^{\frac47}}d\alpha = -\frac12\left[\frac{(1-2\alpha)^{\frac47+1}}{\frac47+1}\right]_0^{-1} = -\frac12\left[\frac{(1-2\alpha)^{\frac47+1}}{\frac47+1}\right]_0^{-1} = -\frac{7}{22}\left[3^{\frac{11}{7}}-1\right]$

4. $I=\int_0^{1/2}\frac{t-3}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_0^{1/2} -\frac12\underbrace{\frac{-2t}{\sqrt{1-t^2}}}_{\substack{u'(t)u(t)^{-\frac12} \\ avec\ u(t)=1-t^2}} - 3\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}_{Arcsin'(t)} dt = \left[-\frac12\frac{(1-t^2)^{\frac12}}{\frac12} - 3Arcsin(t)\right]_0^{\frac12} = -\sqrt{\frac34}-3\frac{\pi}{6}+1 = 1-\frac{\sqrt3}{2}-\frac{\pi}{2}.$

5. $I=\int_2^3\frac{t}{\sqrt{t-1}}dt = \int_2^3\frac{(t-1)+1}{\sqrt{t-1}}dt = \int_2^3 \underbrace{\sqrt{t-1}}_{\substack{u'(t)(u(t))^{\frac12} \\ avec\ u(t)=t-1}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{t-1}}}_{u'(t)(u(t))^{-\frac12}} dt = \left[\frac{(t-1)^{\frac32}}{\frac32}+\frac{(t-1)^{\frac12}}{\frac12}\right]_2^3$

$I=\left[\frac23\left(2^{\frac32}-1\right)+2\left(2^{\frac12}-1\right)\right] = \left(\frac43+2\right)\sqrt2-\left(2+\frac23\right) = \frac{10}{3}\sqrt2-\frac83.$

6. $I=\int_1^2\frac{1-5x}{\sqrt{2x-1}}dx = \int_1^2\frac{-\frac52(2x-1)-\frac52+1}{\sqrt{2x-1}}dx = \int_1^2 -\frac52\sqrt{2x-1}-\frac32\frac{1}{\sqrt{2x-1}}dx = \int_1^2\left(-\frac54\right)\times\underbrace{2\sqrt{2x-1}}_{\substack{u'(x)(u(x))^{\frac12} \\ avec\ u(x)=2x-1}} - \frac34\times\underbrace{\frac{2}{\sqrt{2x-1}}}_{u'(x)(u(x))^{-\frac12}}dx$

$I=\left[-\frac54\frac{(2x-1)^{\frac32}}{\frac32}-\frac34\frac{(2x-1)^{\frac12}}{\frac12}\right]_1^2 = \left[-\frac56(2x-1)^{\frac32}-\frac32(2x-1)^{\frac12}\right]_1^2 = -\frac56\left(3^{\frac32}-1\right)-\frac32\left(3^{\frac12}-1\right) = -4\sqrt3+\frac73.$

7. $I=\int_1^0 t\sqrt{1-t}\,dt = \int_1^0(1-(1-t))\sqrt{1-t}\,dt = \int_1^0 -\left(\underbrace{-(1-t)^{\frac12}}_{u'(t)u(t)^{\frac12}}\right) + \left(\underbrace{-(1-t)^{\frac32}}_{u'(t)u(t)^{\frac32}}\right)dt = \left[-\frac23(1-t)^{\frac32}+\frac25(1-t)^{\frac52}\right]_1^0 = -\frac23+\frac25 = -\frac{4}{15}$

8. $I=\int_0^1(1+3t)\sqrt[8]{3-2t}\,dt \underbrace{=}_{\substack{(1+3t)=\left(-\frac32\right)(3-2t)+1+\frac92 \\ =\left(-\frac32\right)(3-2t)+\frac{11}{2}}} \int_0^1\left[\left(-\frac32\right)(3-2t)+\frac{11}{2}\right](3-2t)^{\frac18}dt = \int_0^1\left(-\frac32\right)(3-2t)^{\frac98}+\frac{11}{2}(3-2t)^{\frac18}dt$

$I=\int_0^1\left(\frac34\right)\underbrace{(-2)(3-2t)^{\frac98}}_{u'(t)(u(t))^{\frac98}} - \frac{11}{4}\underbrace{(-2)(3-2t)^{\frac18}}_{u'(t)(u(t))^{\frac18}}dt = \left[\frac34.\frac{8}{17}(3-2t)^{\frac{17}{8}}-\frac{11}{4}.\frac89(3-2t)^{\frac98}\right]_0^1 = \left(\frac{6}{17}-\frac{22}{9}\right)+\frac{6}{17}3^{\frac{17}{8}}-\frac{22}{9}3^{\frac98}$

$I=\left(\frac{6}{17}-\frac{22}{9}\right)+\left(\frac{6}{17}9-\frac{22}{3}\right)3^{\frac18} = \frac{212}{51}3^{\frac18}-\frac{320}{153}.$

9. $I=\int_1^0 t\sqrt{1-t^2}\,dt = \left(-\frac12\right)\int_1^0\underbrace{(-2)t\sqrt{1-t^2}}_{u'(t)(u(t))^{\frac12}}d\,t = \left[-\frac12\frac{(1-t^2)^{\frac32}}{\frac32}\right]_1^0 = -\frac13$

10. $I=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2-t^2}}dt$

11. $I=\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt \underbrace{=}_{\substack{cv \\ t\in[0,1] \\ donc\ on\ peut\ poser \\ t=\sin(\theta) \\ et\ \ \theta=Arcsin(t)\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \\ dt=\cos(\theta)d\theta \\ t=0\Leftrightarrow\theta=0 \\ t=1\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{2}}} \int_0^{\frac\pi2}\sqrt{1-\sin(\theta)^2}\cos(\theta)\,d\theta = \int_0^{\frac\pi2}\sqrt{\cos(\theta)^2}\cos(\theta)\,d\theta$

$I=\int_0^{\frac\pi2}(\cos(\theta))^2d\theta \underbrace{=}_{\substack{on\ linéarise \\ avec\ \cos(2a)=2cos^2(a)-1}} \int_0^{\frac\pi2}\frac12(\cos(2\theta)+1)\,d\theta = \left[\frac14\sin(2\theta)+\frac12\theta\right]_0^{\frac\pi2} = \frac\pi4.$

Ex 7 A vous de jouer, de tenter ! 0) Calculer $I=\int_0^1 e^{Arccos(x)}dx$.

1) Soit $I=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{dx}{sinx+\sin(2x)}$. Montrer que $I=\int_0^{1/2}\frac{du}{(1-u)(1+u)(1+2u)}$. En déduire la valeur de I.

2) Montrer que $\int_0^{\frac\pi4}\ln(cosx)\,dx = \int_0^{\frac\pi4}\ln\left(\cos\left(\frac\pi4-x\right)\right)dx$). En déduire la valeur de $J=\int_0^{\frac\pi4}\ln(1+\tan(x))\,dx$

3) Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et telle que : $\forall x\in[a,b], f(a+b-x)=f(x)$. Calculer $I=\int_a^b xf(x)dx$ en fonction de $J=\int_a^b f(x)dx$. Application : Calculer $I_2=\int_0^\pi\frac{xsinx}{1+cos^2x}dx$ $\left(\text{CV: } u=??\text{ ou forme connue}\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}\right)$.

4) Déterminer une primitive de $f: (x \mapsto \cos(x)\ln(1+\cos(x)))$ sur $]-\pi,\pi[$. On pourra faire une IPP.

5) Soit $I = \int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)Arctan(x)dx$. Montrer, en effectuant le CV $u=\frac{1}{x}$, que : $I = \frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1+u^2}{u^2}du - I$. En déduire I.

6) Déterminer toutes les primitives de $f : \left(x \mapsto \frac{1}{2+sin^2(x)}\right)$. On pourra effectuer le CV : $u = tan(x)$.

7) Soit $I = \int_{-1}^{-2}\frac{\sqrt{1+r^2}}{r}dr$. Montrer que $I = \int_{\ln(\sqrt{2}-1)}^{\ln(\sqrt{5}-2)}\frac{ch^2(t)}{sh(t)}dt = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{5}-2} 1-\frac{1}{u^2}+\frac{2}{u-1}-\frac{2}{u+1}du$. En déduire I .

8) Soit f :$[5,7] \to \mathbb{R}$ continue . Calculer $I = \int_{2}^{4}\frac{f(9-x)}{f(9-x)+f(3+x)}dx$.

9) Montrer que $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(t)}{\cos(t)+\sin(t)}dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(u)}{\sin(u)+\cos(u)}du = \frac{\pi}{4}$.

10) Soit a un réel strictement positif. Calculer $I(a) = \int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{\ln(x)}{1+x^2}dx$ en effectuant le CV : $x=\frac{1}{u}$.

$$2.\ I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{sinx+\sin(2x)} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{sinx+2sin(x)\cos(x)} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{sinx(1+2\cos(x))} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x)\,dx}{sin^2x(1+2\cos(x))}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x)\,dx}{(1-cos^2x)(1+2\cos(x))} \underset{\substack{u=\cos(x)\\ du=-\sin(x)dx\\ x=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow u=0\\ x=\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow u=\frac{1}{2}}}{\underbrace{=}} \int_{0}^{1/2}\frac{-du}{(1-u^2)(1+2u)} = \int_{0}^{1/2}\frac{du}{(1-u)(1+u)(1+2u)}.$$

Décomposons $F(u) = \frac{1}{(1-u)(1+u)(1+2u)}$ en éléments simples. Il existe trois réels A, B et C tels que : $\forall u \in \mathbb{R}\backslash\left\{1,-1,-\frac{1}{2}\right\}$,

$F(u) = \frac{1}{(1-u)(1+u)(1+2u)} = \frac{A}{(1-u)} + \frac{B}{(1+u)} + \frac{C}{(1+2u)}$.

Alors, $A = \lim_{u\to 1}(1-u)F(u) = \frac{1}{2\times 3} = \frac{1}{6}$; $B = \lim_{u\to -1}(1+u)F(u) = \frac{1}{2\times(-1)} = -\frac{1}{2}$ et $C = \lim_{u\to -\frac{1}{2}}(1+2u)F(u) = \frac{1}{\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$.

Donc,

$$I = \int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{6}\frac{1}{(1-u)} - \frac{1}{2}\frac{1}{(1+u)} + \frac{4}{3}\frac{1}{(1+2u)}du = \int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{(-1)}{6}\frac{-1}{(1-u)} - \frac{1}{2}\frac{1}{(1+u)} + \frac{2}{3}\frac{2}{(1+2u)}du$$

$$= \left[-\frac{1}{6}ln|1-u| - \frac{1}{2}ln|1+u| + \frac{2}{3}ln|1+2u|\right]_{0}^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{6}\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{2}{3}\ln(2) = \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(3)$$

$$I = \frac{4}{3}\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(3).$$

Montrer que $I = \int_{0}^{1/2}\frac{du}{(1-u)(1+u)(1+2u)}$. En déduire la valeur de I

8. Soit f :$[5,7] \to \mathbb{R}$ continue . $\forall x \in [2,4], 9-x \in [5,7]\ et\ 3+x \in [5,7]$. Comme f est continue sur $[5,7]$ et $(x \mapsto 9-x)$ est continue sur $[5,7]\ et\ (x \mapsto 3+x)$ est continue sur $[5,7]$, $(x \mapsto f(9-x))$ est continue sur $[5,7]\ et\ (x \mapsto f(3+x))$ est continue sur $[5,7]$ donc I existe.

$I = \int_{2}^{4}\frac{f(9-x)}{f(9-x)+f(3+x)}dx \underset{\substack{9-x=3+t\\ i.e. t=6-x\\ dx=-dt\\ x=2\Leftrightarrow t=4\\ x=4\Leftrightarrow t=2}}{\underbrace{=}} \int_{4}^{2}\frac{f(3+t)}{f(3+t)+f(9-t)}(-dt) = \int_{2}^{4}\frac{f(3+t)}{f(3+t)+f(9-t)}dt = I.$

Donc, $2I = \int_{2}^{4}\frac{f(9-x)}{f(9-x)+f(3+x)}dx + \int_{2}^{4}\frac{f(3+x)}{f(9-x)+f(3+x)}dx = \int_{2}^{4}\frac{f(9-x)+f(3+x)}{f(9-x)+f(3+x)}dx = \int_{2}^{4}1dx = 2$. Ainsi, $I = 1$.

9. $1+2\sin(t)\cos(t) = 1+\sin(2t)$.Or, $\forall t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(2t) \geq 0$ donc $1+\sin(2t) \geq 1$ $donc\ f(t) = \frac{\sin(t)}{\sqrt{1+2\sin(t)\cos(t)}}$ $et\ g(t) = \frac{\cos(t)}{\sqrt{1+2\sin(t)\cos(t)}}$ $existent.$ Alors f et g sont continues sur le segment $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ puisqu'elles sont constituées de fonctions continues sur leur propre domaine de définition. Ainsi, I et J existent.

$I+J = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(t)}{\sqrt{1+2\sin(t)\cos(t)}}dt + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(t)}{\sqrt{1+2\sin(t)\cos(t)}}dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(t)}{\sqrt{1+2\sin(t)\cos(t)}} + \frac{\cos(t)}{\sqrt{1+2\sin(t)\cos(t)}}dt$

$I+J = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(t)+\cos(t)}{\sqrt{cos^2(t)+sin^2(t)+2\sin(t)\cos(t)}}dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(t)+\cos(t)}{\sqrt{(\cos(t)+\sin(t))^2}}dt \underset{\substack{car\ \forall t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\\ \cos(t)+\sin(t)\geq 0}}{\underbrace{=}} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}1dt = \frac{\pi}{2}.$

Or, $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(t)}{\sqrt{1+2\sin(t)\cos(t)}}dt \underset{u=\frac{\pi}{2}-t}{\underbrace{=}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}{\sqrt{1+2\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}}(-du) = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(u)}{\sqrt{1+2\cos(u)\sin(u)}}du = J.$

Ainsi, $2I = \frac{\pi}{2}$. Et finalement, $I = J = \frac{\pi}{4}$.

10. Soit $a > 0$. Alors $\frac{1}{a} > 0$ donc $f: \left(x \mapsto \frac{\ln(x)}{1+x^2}\right)$, étant continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, est continue sur le segment d'extrémités $\frac{1}{a}$ *et* a.

Calculer $I(a) = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx \underbrace{=}_{\substack{u=\frac{1}{x} \\ x=\frac{1}{u} \\ dx=-\frac{1}{u^2}du \\ x=a \Leftrightarrow u=\frac{1}{a} \\ x=\frac{1}{a} \Leftrightarrow u=a}} \int_{a}^{\frac{1}{a}} \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{1+\left(\frac{1}{u}\right)^2}\left(-\frac{1}{u^2}\right) du = \int_{a}^{\frac{1}{a}} \frac{-\ln(u)}{u^2+1}(-1)du = -\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln(u)}{u^2+1} du = -I(a)$. Donc $I(a) = 0$.

Etude d'une suite d'intégrales

Pour tout entier naturel n , on pose $J_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n , J_n existe.
2. Calculer J_0 et J_1.
3. Montrer que la suite (J_n) est convergente.
4. Démontrer, par encadrement, que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$.
5. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, J_{n+2} = \frac{n+1}{n+4}J_n$.
6. En déduire une expression de J_{2p} *et* J_{2p+1} en fonction de p ($p \in \mathbb{N}$) et à l'aide de factorielles .

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f_n: (x \mapsto x^n\sqrt{1-x^2})$. f_n est continue sur $[0,1]$ donc J_n existe.

2. $J_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \underbrace{=}_{\substack{t=Arcsin(x) \\ x=\sin(t) \\ dx=\cos(t)dt \\ x=0\Leftrightarrow t=0 \\ x=1\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{2}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-sin^2(t)}(\cos(t))dt \underbrace{=}_{\substack{\forall t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\cos(t)\geq 0 \\ donc \\ cos(t)=\sqrt{cos^2(t)} \\ =\sqrt{1-sin^2(t)}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2t)}{2}dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.

$J_1 = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1(-2x)\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. $J_{n+1} - J_n = \int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x^2}dx - \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx = \int_0^1 (x^{n+1}-x^n)\sqrt{1-x^2}dx = \int_0^1 (x-1)x^n\sqrt{1-x^2}dx$

Or, $\forall x \in [0,1], (x-1)x^n\sqrt{1-x^2} \leq 0$. Donc, par positivité de l'opérateur intégral, $\int_0^1 (x-1)x^n\sqrt{1-x^2}dx \leq 0$ et par conséquent, la suite (J_n) est décroissante. De plus, $\forall x \in [0,1], x^n\sqrt{1-x^2} \geq 0$.Donc, par positivité de l'opérateur intégral, $\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx \geq 0$. La suite (J_n) est donc minorée par 0.J'en déduis que la suite (J_n) est convergente.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall x \in [0,1], 0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1$ donc $0 \leq x^n\sqrt{1-x^2} \leq \underbrace{x^n}_{g_n(x)}$ et par croissance de l'intégrale (f_n *et* g_n étant continues sur $[0,1]$), $0 \leq \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx \leq \int_0^1 x^n dx$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$. Comme les deux suites qui encadrent J_n tendent vers 0 , la suite (J_n) converge vers 0.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$J_{n+2} = \int_0^1 x^{n+2}\sqrt{1-x^2}dx = \int_0^1 x^{n+1}\left(x\sqrt{1-x^2}\right)dx$

$$= \int_0^1 \underbrace{x^{n+1}}_{v(x)}\left(\underbrace{x\sqrt{1-x^2}}_{u'(x)}\right)dx \underbrace{\overset{IPP}{=}}_{\begin{cases} u(x)=-\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3} \\ v(x)=x^{n+1}\end{cases}} \left[-x^{n+1}\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3}\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n\left[-\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3}\right]dx$$

$$= \frac{n+1}{3}\int_0^1 x^n(1-x^2)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{n+1}{3}\int_0^1 x^n(1-x^2)^{\frac{1}{2}} - x^{n+2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{n+1}{3}\left[\, J_n - \; J_{n+2}\right].$$

Donc, $\left(1+\frac{n+1}{3}\right)\; J_{n+2} = \frac{n+1}{3}\; J_n$. J'en conclus que : $J_{n+2} = \frac{n+1}{n+4}\; J_n$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1er cas n pair i.e. $n = 2p$.

$$J_{2p} = \frac{2p-1}{2p+2}\, J_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p+2}\,\frac{2p-3}{2p}\, J_{2p-4} = \frac{2p-1}{2p+2}\,\frac{2p-3}{2p}\,\frac{2p-5}{2p-2}\, J_{2p-6} = \cdots = \frac{2p-1}{2p+2}\,\frac{2p-3}{2p}\,\frac{2p-5}{2p-2}\cdots\frac{1}{4}\, J_0$$

$$J_{2p} = \frac{(2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3)\ldots 4.3.2.1}{(2p+2)(2p)^2(2p-2)^2\ldots 4^2 2}\,\frac{\pi}{4} = \frac{(2p)!}{(p+1)(2^2)^p(p(p-1)\ldots 4.2)^2}\,\frac{\pi}{4} = \frac{(2p)!}{(p+1)(4)^p(p!)^2}\,\frac{\pi}{4}.$$

1er cas n impair i.e. $n = 2p+1$.

$$J_{2p+1} = \frac{2p}{2p+3}\, J_{2p-1} = \frac{2p}{2p+3}\,\frac{2p-2}{2p+1}\, J_{2p-3} = \cdots = \frac{2p}{2p+3}\,\frac{2p-2}{2p+1}\,\frac{2p-4}{2p-1}\cdots\frac{2}{5}\, J_1 = \frac{2p(2p-2)(2p-4)\ldots 2}{(2p+3)(2p+1)(2p-1)\ldots 5.3} = \frac{4^p(p!)^2}{(2p+3)(2p+1)!}.$$

Ex 8 Justifier que :

1. Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et impaire alors pour tout réel a, $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$
2. Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et paire alors pour tout réel a, $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$
3. Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique alors pour tous réels $a\ et\ b$,$\int_{a}^{b} f(t)dt = \int_{a+T}^{b+T} f(t)dt$ et $\int_{0}^{T} f(t)dt = \int_{a}^{a+T} f(t)dt$

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$

1. Supposons f impaire.

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{-a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt \underbrace{=}_{\substack{CV\\x=-u}} \int_{a}^{0} f(-u)(-du) + \int_{0}^{a} f(t)dt \underbrace{=}_{\substack{car\\f\ est\\impaire}} \int_{a}^{0} -f(u)(-du) + \int_{0}^{a} f(t)dt$$

$$= \int_{a}^{0} f(u)du + \int_{0}^{a} f(t)dt = -\int_{0}^{a} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt = 0.$$

2. Supposons f paire.

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{-a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt \underbrace{=}_{\substack{CV\\x=-u}} \int_{a}^{0} f(-u)(-du) + \int_{0}^{a} f(t)dt \underbrace{=}_{\substack{car\\f\ est\\paire}} \int_{a}^{0} f(u)(-du) + \int_{0}^{a} f(t)dt$$

$$= \int_{0}^{a} f(u)du + \int_{0}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt.$$

3. Supposons f T-périodique. Soit deux réels $a\ et\ b$.

$$\int_{a}^{b} f(t)dt \underbrace{=}_{\substack{CV\\u=t+T\\du=dt}} \int_{a+T}^{b+T} f(u-T)dt \underbrace{=}_{\substack{car\ f\\est\ T-périodique}} \int_{a+T}^{b+T} f(u)du$$

et $\int_{0}^{T} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(t)dt + \int_{a}^{a+T} f(t)dt + \int_{a+T}^{T} f(t)dt = \underbrace{\int_{0}^{a} f(t)dt - \int_{T}^{a+T} f(t)dt}_{=0\ d'aprèsce\ qui\ précède} + \int_{a}^{a+T} f(t)dt = \int_{a}^{a+T} f(t)dt$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, On pose $I_n = \int_{1}^{e} x(lnx)^n dx.$
   a. Calculer $I_0, I_1\ et\ I_2$.
   b. Etablir une relation de récurrence entre $I_n\ et\ \ I_{n+1}$.
   c. Montrer que la suite $(I_n\ )$ est convergente.
   d. Déterminer la limite de I_n.

Ex 9 Trouver des relations de récurrence en appliquant le théorème d'intégration par parties :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_{0}^{1} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ .Etablir une relation entre $I_n\ et\ I_{n+1}$. En déduire $I = \int_{0}^{1} \frac{t^2}{(1+t^2)^3} dt$ et $J = \int_{0}^{1} \frac{1}{(1+t^2)^4} dt.$

$$I_1 = \int_{0}^{1} \frac{1}{1+t^2} dt = Arctan(1) - Arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $I_{n+1} = \int_{0}^{1} \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} dt = \int_{0}^{1} \frac{t^2+1-t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt = \int_{0}^{1} \frac{1}{(1+t^2)^n} + \frac{-t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt = \int_{0}^{1} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt - \frac{1}{2}\int_{0}^{1} \underbrace{t}_{v(t)} \underbrace{\frac{2t}{(1+t^2)^{n+1}}}_{u'(t)} dt$

$$\underbrace{=}_{\substack{IPP\\Comme\ n>0\ ,on\ pose\\u(t)=\frac{(1+t^2)^{-n}}{-n}\\v(t)=t\\u\ et\ v\ sont\ C^1\\sur\ [0,1]}} I_n - \frac{1}{2}\left\{\left[\underbrace{t}_{v(t)} \underbrace{\frac{(1+t^2)^{-n}}{-n}}_{u(t)}\right]_0^1 - \int_{0}^{1} \underbrace{1}_{v'(t)} \underbrace{\frac{(1+t^2)^{-n}}{-n}}_{u(t)} dt\right\} = I_n - \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{n2^n} + \frac{1}{n} I_n\right\} = \frac{2n-1}{2n} I_n + \frac{1}{n2^{n+1}}.$$

$$Ainsi, I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n + \frac{1}{n2^{n+1}}.$$

Application : $I_2 = \frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$

et $I_3 = \frac{3}{4} I_2 + \frac{1}{16} = \frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{16} = \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}$

et $J = I_4 = \frac{5}{6} I_3 + \frac{1}{3\times 16} = \frac{5}{6}\left(\frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3\times 16} = \frac{5\pi}{64} + \frac{11}{48}.$

$I = \int_{0}^{1} \frac{t^2}{(1+t^2)^3} dt = \int_{0}^{1} \frac{1+t^2-1}{(1+t^2)^3} dt = \int_{0}^{1} \frac{1}{(1+t^2)^2} - \frac{1}{(1+t^2)^3} dt = I_2 - I_3 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} - \left(\frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{32}.$

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos^n t dt$. **INTEGRALE DE WALLIS**
   a. Montrer que: $(n+2)J_{n+2} = (n+1)J_n$. En déduire une expression de J_n à l' aide de factorielles.

b. Montrer que (J_n) est convergente.

$a. \forall n \in \mathbb{N}, J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(\cos(t))^n}_{f_n(t)} dt$. Comme f_n est continue sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $J_n$existe.

$$J_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{n+2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n (\cos(t))^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n \left(1 - \sin^2(\mathrm{t})\right) dt$$

$$\underbrace{=}_{\substack{car\ f_n\ et\ (t \mapsto (\cos(t))^n \sin^2(t)) \\ sont\ continues\ sur\ \mathbb{R}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n \sin^2(\mathrm{t}) dt = J_n + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(\cos(t))^n (-\sin(\mathrm{t}))}_{u'(t)} \underbrace{\sin(t)}_{v(t)} dt$$

$$\underbrace{=}_{\substack{IPP \\ u(t) = \frac{(\cos(t))^{n+1}}{n+1} \\ v(t) = \sin(t)}} J_n + \left[\underbrace{\frac{(\cos(t))^{n+1}}{n+1}}_{u(t)} \underbrace{\sin(t)}_{v(t)}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{(\cos(t))^{n+1}}{n+1}}_{u(t)} \underbrace{\cos(t)}_{v'(t)} dt$$

$$J_{n+2} = J_n + 0 - \frac{1}{n+1} J_{n+2}$$

Donc, $J_{n+2} + \frac{1}{n+1} J_{n+2} = J_n$. Et ainsi, $(n+2) J_{n+2} = (n+1) J_n$.

Alors, $\forall N \geq 2, J_N = \frac{N-1}{N} J_{N-2}\ (**)$.

1er cas : N *pair*. Posons $N = 2p$.

$$J_{2p} \underbrace{=}_{\substack{(**) \\ avac\ N=2p}} \frac{2p-1}{2p} J_{2p-2} \underbrace{=}_{\substack{(**) \\ avac\ N=2p-2}} \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} J_{2p-4} \underbrace{=}_{\substack{(**) \\ avac\ N=2p-4}} \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \frac{2p-5}{2p-4} J_{2p-6} = \cdots$$

$$J_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \frac{2p-5}{2p-4} \times \ldots \times \frac{1}{2} J_0\ et\ J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = [t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$J_{2p} = \frac{(2p-1) \times (2p-3) \times (2p-5) \times \ldots \times 1}{(2p) \times (2p-2) \times (2p-4) \times \ldots \times 2} \times \frac{\pi}{2}$$

$$J_{2p} = \frac{(2p) \times (2p-1) \times (2p-2) \times (2p-3) \times (2p-4) \times (2p-5) \times \ldots \times 2 \times 1}{(2p)^2 \times (2p-2)^2 \times (2p-4)^2 \times \ldots \times 2^2} \times \frac{\pi}{2}$$

$$J_{2p} = \frac{(2p)!}{2^2 p^2 \times 2^2 (p-1)^2 \times 2^2 (p-2)^2 \times \ldots \times 2^2 1^2} \times \frac{\pi}{2}$$

$$J_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^2)^p [p^2 \times (p-1)^2 \times (p-2)^2 \times \ldots \times 1^2]} \times \frac{\pi}{2}$$

$J_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \times \frac{\pi}{2}$.

2ème cas : N *impair*. Posons $N = 2p+1$.

$$J_{2p+1} \underbrace{=}_{\substack{(**) \\ avac\ N=2p+1}} \frac{2p}{2p+1} J_{2p-1} \underbrace{=}_{\substack{(**) \\ avac\ N=2p-1}} \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} J_{2p-3} = \cdots = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \ldots \times \frac{2}{3} J_1\ avec$$

$$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$Donc, J_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \ldots \times \frac{2}{3} = \frac{(2p)(2p-2)(2p-4) \ldots 2}{(2p+1)(2p-1) \ldots 3} = \frac{(2p)^2 (2p-2)^2 (2p-4)^2 \ldots 2^2}{(2p+1)(2p)(2p-1)(2p-2) \ldots 3 \times 2}$$

$$J_{2p+1} = \frac{2^{2p} (2p)!}{(2p+1)!}$$

$b. \forall n, J_{n+1} - J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{n+1} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{n+1} - (\cos(t))^n dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n (\cos(t) - 1) dt.$

Or, $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], (\cos(t))^n \geq 0\ et\ \cos(t) - 1 \leq 0\ donc\ (\cos(t))^n (\cos(t) - 1) \leq 0$. J'en déduis que $\forall n, J_{n+1} - J_n \leq 0$.

La suite (J_n) est décroissante.

De plus, $\forall n, \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], (\cos(t))^n \geq 0$. J'en déduis que $\forall n, J_n \geq 0$. La suite (J_n) est minorée par 0. Ainsi, la suite (J_n) est convergente.

3. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 (1 - t^2)^n dt$.

   a. Déterminer une expression de I_n à l'aide de la formule du binôme .

   b. Exprimer I_n en fonction de I_{n-1} . En déduire une autre expression de I_n.

c. Donner alors une formule sommatoire .
d. Montrer que (I_n) est convergente .

3.a.$Soit\ n \in \mathbb{N}$ et $I_n = \int_0^1 \underbrace{(1-t^2)^n}_{f_n(t)} dt$. f_n est continue sur le segment [0,1] donc $I_n$existe.

$$(1-t^2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-t^2)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k t^{2k}$$

Donc, $I_n = \int_0^1 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-t^2)^k\, dt \underbrace{=}_{\substack{car\ toute\ fonction\\ (t\mapsto t^{2k}) est\ continue\\ sur\ [0,1].}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \int_0^1 t^{2k}\, dt = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

b.$Soit\ n \in \mathbb{N}^*$.

$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt = \int_0^1 (1-t^2)^{n-1}(1-t^2)dt$

$= \int_0^1 (1-t^2)^{n-1} - t^2(1-t^2)^{n-1} dt \underbrace{=}_{\substack{car\ f_{n-1}\ et\ (t\mapsto t^2(1-t^2)^{n-1})\\ sont\ continues\ sur\ le\ segment [0,1]}} I_{n-1} - \int_0^1 t^2(1-t^2)^{n-1} dt$

$= I_{n-1} + \frac{1}{2}\int_0^1 \underbrace{t}_{v(t)} \times \underbrace{(-2t)(1-t^2)^{n-1}}_{u'(t)} dt \underbrace{=}_{\substack{IPP\\ u(t)=\frac{(1-t^2)^n}{n}\\ v(t)=t\\ u\ et\ v\ sont\ C^1\\ sur\ [0,1]}} I_{n-1} + \frac{1}{2}\left\{\left[\underbrace{t}_{v(t)} \underbrace{\frac{(1-t^2)^n}{n}}_{u(t)}\right]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{1}_{v'(t)} \times \underbrace{\frac{(1-t^2)^n}{n}}_{u(t)} dt\right\}$

$= I_{n-1} + \frac{1}{2}\left\{\underbrace{0}_{\substack{car\ n>0\ donc\\ 0^n=0}} - \frac{1}{n} I_{n-1}\right\}$

Donc, $I_n = I_{n-1} - \frac{1}{2n} I_n$ et ainsi, $\forall n \geq 1, \left(1+\frac{1}{2n}\right) I_n = I_{n-1}$.$Conclusion$: $\forall N \geq 1, I_N = \frac{2N}{2N+1} I_{N-1}\ (**)$.

Alors, $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1} \underbrace{=}_{\substack{(**)\\ avec\\ N=n-1}} \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2(n-1)}{2(n-1)+1} I_{n-2} \underbrace{=}_{\substack{(**)\\ avec\\ N=n-2}} \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2(n-1)}{2(n-1)+1} \times \frac{2(n-2)}{2(n-2)+1} I_{n-3} = \cdots = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2(n-1)}{2(n-1)+1} \times \frac{2(n-2)}{2(n-2)+1} \times \ldots \times \frac{2}{3} \times I_0$.

$$I_n = \frac{(2n)(2n-2)(2n-4)\ldots..2}{(2n+1)(2b-1)(2n-3)\ldots.3}\ car\ I_0 = 1.$$

$$I_n = \frac{(2n)^2(2n-2)^2(2n-4)^2\ldots..2^2}{(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)\ldots.3 \times 2}.$$

$$I_n = \frac{(2^2n^2)(2^2(n-1)^2)(2^2(n-2)^2)\ldots..2^2}{(2n+1)!}$$

$$I_n = \frac{(2^{2n})[n(n-1)(n-2)\ldots.2]^2}{(2n+1)!} = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

c. J'en déduis que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$

d.$\forall t \in [0,1], (1-t^2)^n \geq 0\ donc\ I_n \geq 0.$ La suite (I_n) est donc minorée par 0.

De plus, $I_n - I_{n-1} = I_n - \left(1+\frac{1}{2n}\right) I_n = -\frac{1}{2n}\ I_n \leq 0.$ La suite (I_n) est décroissante.

J'en conclus que la suite (I_n) est convergente.

Ex 10 1. Calculer, par taux d'accroissement, $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}\int_1^x e^{-t^2} dt$ puis, par encadrement, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1}\int_1^x e^{-t^2} dt$.

2. F: $\left(x \mapsto \int_1^x \frac{e^t}{1+5t^2} - \frac{x^2}{1+t^9} dt\right)$ est une primitive de quelle fonction ?

3. F: $\left(x \mapsto x \int_{\frac{1}{x}}^x e^{-t^2} dt\right)$ est une primitive de quelle fonction ?

1. Posons $f(t) = e^{-t^2}$. f est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Donc le TFI assure que F: $\left(x \mapsto \int_1^x f(t)dt\right)$ est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1. Donc F est dérivable en 1 et $F'(1) = f(1) = \frac{1}{e}$.

Comme $\forall x \neq 1$, $\frac{1}{x-1}\int_1^x e^{-t^2} dt = \frac{1}{x-1}\big(F(x) - F(1)\big)$ est le taux d'accroissement de F en 1 et que F est dérivable en 1, je peux conclure que :

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}\int_1^x e^{-t^2} dt = F'(1) = \frac{1}{e}.$$

$Soit\ x > 1.\ \forall t \in [1,x], 0 < e^{-t^2} \leq e^{-t}$ donc $0 \leq \int_1^x e^{-t^2} dt \leq \int_1^x e^{-t} dt = 1 - e^{-x}$.

Donc, $\forall x>1,\ 0 \leq \frac{1}{x-1}\int_1^x e^{-t^2}dt \leq \frac{1-e^{-x}}{x-1}$. Comme les deux fonctions qui encadrent $\frac{1}{x-1}\int_1^x e^{-t^2}dt$, tendent vers 0 quand $x \to +\infty$, je peux conclure que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}\int_1^x e^{-t^2}dt = 0.$$

2. $F\colon\left(x \mapsto \int_1^x \frac{e^t}{1+5t^2} - \frac{x^2}{1+t^9}dt\right)$ est une primitive de quelle fonction ?

$F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{1+5t^2} - x^2\frac{1}{1+t^9}dt.$

Posons $h(t) = \frac{e^t}{1+5t^2}$ et $g(t) = \frac{1}{1+t^9}$.

h et g sont continues sur l'intervalle $\mathbb{R}$ donc le TFI assure que $H\colon\left(x \mapsto \int_1^x h(t)dt\right)$ est la primitive de h sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1 et que $G\colon\left(x \mapsto \int_1^x g(t)dt\right)$ est la primitive de g sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1.

Alors $F(x) = \int_1^x h(t) - x^2 g(t)dt \underbrace{=}_{\substack{car\ h\ et\ g\\ sont\ continues\\ sur\ le\ segment\\ d'extrémités\\ 1\ et\ x.}} \int_1^x h(t) - x^2\int_1^x g(t)dt = H(x) - x^2G(x).$

Comme H, G et $(x \mapsto x^2)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, F est dérivable sur $\mathbb{R}$

$et\ \forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = H'(x) - 2xG(x) + x^2G'(x) = h(x) - 2x\int_1^x \frac{1}{1+t^9}dt + x^2g(x) = \frac{e^x}{1+5x^2} - 2x\int_1^x \frac{1}{1+t^9}dt + x^2\frac{1}{1+x^9}.$

Ainsi, F est la primitive de $\left(x \mapsto \frac{e^x}{1+5x^2} + x^2\frac{1}{1+x^9} - 2x\int_1^x \frac{1}{1+t^9}dt\right)$.

3. $F\colon\left(x \mapsto x\int_{\frac{1}{x}}^x e^{-t^2}dt\right)$ est une primitive de quelle fonction ?

Posons $h(t) = e^{-t^2}$.

h est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$ donc le TFI assure que h admet au moins une primitive H sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}. Alors\ \frac{1}{x} > 0\ et\ x > 0$ donc le segment d' extrémités $\frac{1}{x}$ et x est inclus dans l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$et par conséquent, $\int_{\frac{1}{x}}^x e^{-t^2}dt$ existe et le $TFCI$ assure que $\int_{\frac{1}{x}}^x e^{-t^2}dt = H(x) - H\left(\frac{1}{x}\right)$. Donc, $F(x) = x\left[H(x) - H\left(\frac{1}{x}\right)\right]$.

De même sur $\mathbb{R}^{-*}$.

Ainsi, $\forall x \neq 0, F(x) = x\left[H(x) - H\left(\frac{1}{x}\right)\right]$.

Comme H, $\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)$ et $(x \mapsto x)$ sont dérivable sur leur propre domaine de définition, donc F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$\forall x \neq 0, F'(x) = H(x) - H\left(\frac{1}{x}\right) + x\left[H'(x) - \left(-\frac{1}{x^2}\right)H'\left(\frac{1}{x}\right)\right] = \int_{\frac{1}{x}}^x e^{-t^2}dt + x\left[h(x) + \frac{1}{x^2}h\left(\frac{1}{x}\right)\right]$

$F'(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x e^{-t^2}dt + x\left[e^{-x^2} + \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}\right]$. Ainsi, F est la primitive de $\left(x \mapsto \int_{\frac{1}{x}}^x e^{-t^2}dt + x\left[e^{-x^2} + \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}\right]\right)$.

Ex 11 Fonction définie par une intégrale Soit $\varphi(t) = \frac{1}{\ln(t)}\ et\ f(x) = \int_x^{x^2}\frac{1}{\ln(t)}dt.$

1. Déterminer le domaine de définition et celui de continuité de φ.
2. Monter que $\forall x \in]0,1[, f(x)$ existe. Monter que $\forall x \in]1,+\infty[, f(x)$ existe. Ainsi, $D_f = D\varphi =]0,1[\cup]1,+\infty[$.
3. Justifier que φ admet une primitive G sur l'intervalle $]0,1[$ et une primitive H sur l'intervalle $]1,+\infty[$.
4. Soit $x \in]0,1[$. Exprimer $f(x)$ à l'aide de $G, x\ et\ x^2$. En déduire que f est de classe C^1 sur $]0,1[$ et exprimer $f'(x)$ à l'aide de $\varphi, x\ et\ x^2$. En déduire les variations de f sur $]0,1[$.
5. Faire de même sur l'intervalle $]1,+\infty[$.
6. Soit $x \in]0,1[$.Montrer que : $\frac{x^2-x}{2\ln(x)} \leq f(x) \leq \frac{x^2-x}{\ln(x)}$. En déduire les limites de f en 0.
7. Soit $x \in]1,+\infty[$.Montrer que : $\frac{x^2-x}{2\ln(x)} \leq f(x) \leq \frac{x^2-x}{\ln(x)}$. En déduire les limites de f en $+\infty$.
8. Soit $x \in]1,+\infty[$.Montrer que $\forall t \in [x,x^2], 0 < \frac{1}{t-1} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{x^2}{t-1}$. En déduire la limite de f en 1^+.
   Faire de même en 1^- et conclure.

1. Domaine de définition : $Soit\ \varphi : \left(t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}\right). D\varphi =]0,1[\cup]1,+\infty[$ et φ est continue sur $D\varphi$.

2. $Soit\ x \in]0,1[$. Alors $x^2 \in]0,1[$ $et\ x^2 < x\ donc$, $[x^2,x] \subset]0,1[$. Ainsi, φ est continue sur $[x^2,x]$ et $f(x)$ existe .

$Soit\ x \in]1,+\infty[$. Alors $x^2 \in]1,+\infty[$ $et\ x < x^2\ donc$, $[x,x^2] \subset]1,+\infty[$. Ainsi, φ est continue sur $[x^2,x]$ et $f(x)$ existe. Ainsi, $Df = D\varphi$.

3. φ est continue sur l'intervalle $]0,1[$. Donc, φ admet une primitive G sur $]0,1[$.De même φ admet une primitive H sur l'intervalle $]1,+\infty[$.

4et 5. $\forall x \in]0,1[, x^2 \in]0,1[$ donc le $TFCI$ assure que $f(x) = \int_x^{x^2} G'(t)dt = G(x^2) - G(x)$.

De même, $\forall x \in]1,+\infty[, x^2 \in]1,+\infty[$ donc le $TFCI$ assure que $f(x) = \int_x^{x^2} H'(t)dt = H(x^2) - H(x)$.

Comme G et $(x \mapsto x^2)$sont dérivable sur $]0,1[$ et $\forall x \in]0,1[, x^2 \in]0,1[$, $(x \mapsto G(x^2))$ est dérivable sur $]0,1[$ et par suite, f est dérivable sur $]0,1[$ et $\forall x \in]0,1[, f'(x) = 2xG'(x^2) - G'(x) = 2x\varphi(x^2) - \varphi(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x-1}{\ln(x)}$.

De même, f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $\forall x \in]1,+\infty[, f'(x) = 2xH'(x^2) - H'(x) = 2x\varphi(x^2) - \varphi(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}$.

5.$x-1$ et $ln(x)$ ont le mêmel signe donc f' est toujours strictement positive et par conséquent, f est strictement croissante sur chaque intervalle $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.

<u>Limites aux bords de son domaine de définition.</u>

<u>6.En 0 ?</u> Soit $x \in]0,1[$. Alors$\forall t \in [x^2, x], \ln(x^2) \leq \ln(t) \leq \ln(x) < 0$ $donc, \frac{1}{\ln(x)} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(x^2)} < 0$ et par croissance de l'opérateur intégral $\int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(x)} dt \leq \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(t)} dt \leq \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(x^2)} dt < 0$.

Ainsi, $\forall x \in]0,1[$, $\frac{x-x^2}{\ln(x)} \leq -f(x) \leq \frac{x-x^2}{2\ln(x)} < 0$. Or, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-x^2}{\ln(x)} = 0$. Donc par encadrement, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Mais, $\frac{x-x^2}{\ln(x)} = x\frac{(1-x)}{\ln(x)} = \frac{-x}{\frac{\ln(x)}{x-1}}$. $Donc$, $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-x^2}{\ln(x)} = -1$ $et\ alors$ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-x^2}{2\ln(x)} = -\frac{1}{2}$. Donc cet encadrement ne permet pas de conclure sur la limite de f en 1^-.

<u>7.En $+\infty$?</u> Soit $x \in]1,+\infty[$. Alors$\forall t \in [x, x^2], 0 < \ln(x) \leq \ln(t) \leq \ln(x^2)$ $donc, \frac{1}{\ln(x)} \geq \frac{1}{\ln(t)} \geq \frac{1}{\ln(x^2)} > 0$ et par croissance de l'opérateur intégral $\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(x)} dt \geq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt \geq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(x^2)} dt > 0$. Ainsi, $\forall x \in]1,+\infty[$, $\frac{x^2-x}{\ln(x)} \geq f(x) \geq \frac{x^2-x}{2\ln(x)} > 0$. Or, $\frac{x^2-x}{2\ln(x)} = \frac{x^2}{\ln(x)}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2x}\right)$. Et grâce aux croissances comparées , $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-x}{2\ln(x)} = +\infty$. Donc par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Mais ce deuxième encadrement ne permet toujours pas de conclure sur la limite de f en 1^-.

<u>8.En 1 ?</u> Soit $x \in]1,+\infty[$ et $t \in [x, x^2]$.la fonction ln est continue et dérivable sur $[1, t]$.

Alors d'après l' $\underbrace{EAF}_{\text{théorème vu dans un chap. ultérieur}}$, $\exists c_{(t)} \in]1, t[$ tel que : $\frac{\ln(t) - ln(1)}{t-1} = ln'(c) = \frac{1}{c}$.

Or , $c \in]1, x^2[$ $donc$, $\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{c} \leq 1$ $et\ alors, 0 < \frac{1}{x^2} \leq \frac{\ln(t)-\ln(1)}{t-1} = \frac{\ln(t)}{t-1} \leq 1$.

Alors, $\forall t \in [x, x^2], 0 < \frac{1}{t-1} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{x^2}{t-1}$. Donc par croissance de l'opérateur intégral, $\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1} dt \leq f(x) \leq \int_x^{x^2} \frac{x^2}{t-1} dt$

i.e. $[ln|t-1|]_x^{x^2} \leq f(x) \leq x^2[ln|t-1|]_x^{x^2}$ i.e. $ln\left|\frac{x^2-1}{x-1}\right| \leq f(x) \leq x^2 ln\left|\frac{x^2-1}{x-1}\right|$. Alors $\forall x \in]1,+\infty[, ln|x+1| \leq f(x) \leq x^2 ln|x+1|$. Or , $\lim\limits_{x\to 1^+} ln|x+1| = \ln(2) = \lim\limits_{x\to 1^+} x^2 ln|x+1|$.Ainsi, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \ln(2)$. Idem en 1^- : il faut travailler avec $x \in]0,1[$ $et\ t \in [x^2, x] \subset [x^2, 1]$ et intégrer entre x^2et x ,on obtient $\int_{x^2}^{x} \frac{1}{t-1} dt \leq -f(x) \leq \int_{x^2}^{x} \frac{x^2}{t-1} dt$ et finalement $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \ln(2)$.

Ex 2 Soit $f: (x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt)$.

1) <u>Domaine de définition</u> : $Soit\ \varphi : \left(t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}\right)$. $D\varphi =]0,1[\cup]1,+\infty[$ et φ est continue sur $D\varphi$.

φ doit être continue sur tout le segment d'intégration pour que notre intégrale existe.

$Soit\ x \in]0,1[$. Alors $x^2 \in]0,1[$ $et\ x^2 < x\ donc$, $[x^2, x] \subset]0,1[$. Ainsi, φ est continue sur $[x^2, x]$ et $f(x)$ existe .

$Soit\ x \in]1,+\infty[$. Alors $x^2 \in]1,+\infty[$ $et\ x < x^2\ donc$, $[x, x^2] \subset]1,+\infty[$. Ainsi, φ est continue sur $[x^2, x]$ et $f(x)$ existe.

Ainsi, $Df = D\varphi$.

2) <u>Dérivabilité et monotonie</u> : Sur l'intervalle $]0,1[$, φ est continue et admet donc une primitive G. Alors,

$\forall x \in]0,1[, f(x) = G(x^2) - G(x)$.

G et $(x \mapsto x^2)$ sont de classe C^1 sur $]0,1[$ et $\forall x \in]0,1[, x^2 \in]0,1[$, alors par composition, $(x \mapsto G(x^2))$ est de classe C^1 sur $]0,1[$. Il en découle que f est de classe C^1 sur $]0,1[$ comme somme de fonctions de classe C^1 sur $]0,1[$. De plus,

$\forall x \in]0,1[, f'(x) = 2xG'(x^2) - G'(x) = 2x\varphi(x^2) - \varphi(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x}{\ln(x)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x-1}{\ln(x)} > 0$. J'en déduis que f est strictement croissante sur l'intervalle $]0,1[$.Idem sur $]1,+\infty[$: f est strictement croissante sur l'intervalle $]1,+\infty[$.

3) <u>Limites aux bords de son domaine de définition.</u>

<u>En 0 ?</u> Soit $x \in]0,1[$. Alors$\forall t \in [x^2, x], \ln(x^2) \leq \ln(t) \leq \ln(x) < 0$ $donc, \frac{1}{\ln(x)} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(x^2)} < 0$ et par croissance de l'opérateur intégral $\int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(x)} dt \leq \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(t)} dt \leq \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(x^2)} dt < 0$.

Ainsi, $\forall x \in]0,1[$, $\frac{x-x^2}{\ln(x)} \leq -f(x) \leq \frac{x-x^2}{2\ln(x)} < 0$. Or, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-x^2}{\ln(x)} = 0$. Donc par encadrement, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Mais, $\frac{x-x^2}{\ln(x)} = x\frac{(1-x)}{\ln(x)} = \frac{-x}{\frac{\ln(x)}{x-1}}$. $Donc$, $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-x^2}{\ln(x)} = -1$ $et\ alors$ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-x^2}{2\ln(x)} = -\frac{1}{2}$. Donc cet encadrement ne permet pas de conclure sur la limite de f en 1^-.

En $+\infty$? Soit $x \in]1,+\infty[$. Alors $\forall t \in [x,x^2], 0 < \ln(x) \leq \ln(t) \leq \ln(x^2)$ $donc,$ $\frac{1}{\ln(x)} \geq \frac{1}{\ln(t)} \geq \frac{1}{\ln(x^2)} > 0$ et par croissance de l'opérateur intégral $\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(x)}dt \geq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}dt \geq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(x^2)}dt > 0$. Ainsi, $\forall x \in]1,+\infty[, \frac{x^2-x}{\ln(x)} \geq f(x) \geq \frac{x^2-x}{2\ln(x)} > 0$. Or, $\frac{x^2-x}{2\ln(x)} = \frac{x^2}{\ln(x)}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2x}\right)$. Et grâce aux croissances comparées , $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-x}{2\ln(x)} = +\infty$. Donc par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Mais ce deuxième encadrement ne permet toujours pas de conclure sur la limite de f en 1^+.

En 1^+ ? Soit $x \in]1,+\infty[$. Alors $[x,x^2] \subset]1,+\infty[$.

Alors, $\forall t \in [x,x^2], t > 1$ $donc, t-1 > 0$ et $\ln(t) > 0$ $et\ par\ conséquent,$ $\frac{1}{t-1} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{x^2}{t-1} \Leftrightarrow \frac{t-1}{x^2} \leq \ln(t) \leq t-1$.

- Posons $g: (t \mapsto \frac{t-1}{x^2} - \ln(t))$. g est dérivable sur $[x,x^2]$, et $\forall t \in [x,x^2], [, g'(t) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{t} < 0$. Donc g est strictement décroissante sur l'intervalle $[x,x^2]$. Or , $g(x) = \frac{x-1}{x^2} - \ln(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \ln(x)$.
- Posons $h: (x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \ln(x))$. h est dérivable sur $[1,+\infty[$ et $\forall x \in [1,+\infty[, h'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x} = \frac{2-x-x^2}{x^3} = \frac{(2+x)(1-x)}{x^3} < 0$. Donc, h est strictement décroissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$. Or , $h(1) = 0$. Donc, $\forall x \in]1,+\infty[, h(x) < 0$.

Il en découle que $g(x) < 0$. Comme g est strictement décroissante sur l'intervalle $[x,x^2]$, je peux conclure que : $\forall t \in [x,x^2]$, $g(t) < 0$ et ainsi, $\frac{t-1}{x^2} \leq \ln(t)$.

- Pour prouver l'autre inégalité : $\ln(t) \leq t-1$, on étudie $m: (t \mapsto (t-1) - \ln(t))$.

Alors, $\forall t \in [x,x^2], 0 < \frac{1}{t-1} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{x^2}{t-1}$. Donc par croissance de l'opérateur intégral, $\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}dt \leq f(x) \leq \int_x^{x^2} \frac{x^2}{t-1}dt$

i.e., $[ln|t-1|]_x^{x^2} \leq f(x) \leq x^2[ln|t-1|]_x^{x^2}$ i.e. $ln\left|\frac{x^2-1}{x-1}\right| \leq f(x) \leq x^2 ln\left|\frac{x^2-1}{x-1}\right|$. Alors $\forall x \in]1,+\infty[, ln|x+1| \leq f(x) \leq x^2 ln|x+1|$. Or , $\lim\limits_{x\to1^+} ln|x+1| = \ln(2) = \lim\limits_{x\to1^+} x^2 ln|x+1|$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \ln(2)$.

En 1^- ? Soit $x \in]0,1[$. Alors $[x^2,x] \subset]0,1[$.

Alors, $\forall t \in [x^2,x], t < 1$ $donc, t-1 < 0$ et $\ln(t) < 0$ $et\ par\ conséquent,$ $\frac{1}{t-1} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{x^2}{t-1} \Leftrightarrow \frac{t-1}{x^2} \leq \ln(t) \leq t-1$.

- Posons $g: (t \mapsto \frac{t-1}{x^2} - \ln(t))$. g est dérivable sur $[x^2,x]$, et $\forall t \in [x^2,x], [, g'(t) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{t} > 0$. Donc g est strictement croissante sur l'intervalle $[x^2,x]$. Or , $g(x^2) = \frac{x^2-1}{x^2} - \ln(x^2) = 1 - \frac{1}{x^2} - 2\ln(x)$.
- Posons $h: (x \mapsto 1 - \frac{1}{x^2} - 2\ln(x)$. h est dérivable sur $]0,1]$ et $\forall x \in]0,1], h'(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{2}{x} = \frac{2(1-x^2)}{x^3} = \frac{2(1+x)(1-x)}{x^3} > 0$. Donc, h est strictement croissante sur l'intervalle $]0,1]$. Or , $h(1) = 0$. Donc, $\forall x \in]0,1[, h(x) < 0$.

Il en découle que $g(x^2) < 0$. Comme g est strictement décroissante sur l'intervalle $[x^2,x]$, $\forall t \in [x^2,x], g(t) < 0$ et ainsi, $\frac{t-1}{x^2} \leq \ln(t)$. Pour prouver l'autre inégalité : $\ln(t) \leq t-1$, on étudie $m: (t \mapsto (t-1) - \ln(t))$.

Alors, $\forall t \in [x^2,x], 0 < \frac{1}{t-1} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{x^2}{t-1}$. Donc par croissance de l'opérateur intégral, $\int_{x^2}^{x} \frac{1}{t-1}dt \leq -f(x) \leq \int_{x^2}^{x} \frac{x^2}{t-1}dt$

Attention ! les bornes de l'intégrale doivent être croissante pour appliquer la propriété de croissance.

i.e., $[ln|t-1|]_{x^2}^{x} \leq -f(x) \leq x^2[ln|t-1|]_{x^2}^{x}$ i.e. $ln\left|\frac{x-1}{x^2-1}\right| \leq -f(x) \leq x^2 ln\left|\frac{x-1}{x^2-1}\right|$.

Alors, $\forall x \in]0,1[, ln\left|\frac{1}{x+1}\right| \leq -f(x) \leq x^2 ln\left|\frac{1}{x+1}\right|$. Or , $\lim\limits_{x\to1^+} ln\left|\frac{1}{x+1}\right| = -\ln(2) = \lim\limits_{x\to1^+} x^2 ln\left|\frac{1}{x+1}\right|$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to1^-} -f(x) = -\ln(2)$ $i.e.$ $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \ln(2)$. Et finalement $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \ln(2)$.