DL 6

Exercice 1 Une suite d'intégrales

$\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une expression de I_n à l'aide de la formule du binôme .
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2(n+1)} I_{n+1}$.
3. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ I_n = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \frac{2n-4}{2n-3} \times \dots . \times \frac{2}{3} I_0$.
4. Ecrire alors I_n à l'aide de factorielle.
5. En concaténant les résultats 1. et 4. Donner une formule sommatoire .
6. Montrer que (I_n) est convergente.

Exercice 2 Une fonction d'expression intégrale

Soit $\varphi(t) = \frac{1}{\ln(t)}$ et $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt.$

1. Déterminer le domaine de définition et celui de continuité de φ.
2. Monter que $\forall x \in]0,1[, f(x)$ existe. Monter que $\forall x \in]1,+\infty[, f(x)$ existe. Ainsi, $D_f = D\varphi =]0,1[\cup]1,+\infty[$.
3. Justifier que φ admet une primitive G sur l'intervalle $]0,1[$ et une primitive H sur l'intervalle $]1,+\infty[$.
4. Soit $x \in]0,1[$. Exprimer $f(x)$ à l'aide de G, x et x^2. En déduire que f est de classe C^1 sur $]0,1[$ et exprimer $f'(x)$ à l'aide de φ, x et x^2. En déduire les variations de f sur $]0,1[$.
5. Faire de même sur l'intervalle $]1,+\infty[$.
6. Soit $x \in]0,1[$.Montrer que : $\frac{x^2-x}{2\ln(x)} \leq f(x) \leq \frac{x^2-x}{\ln(x)}$. En déduire les limites de f en 0.
7. Soit $x \in]1,+\infty[$.Montrer que : $\frac{x^2-x}{2\ln(x)} \leq f(x) \leq \frac{x^2-x}{\ln(x)}$. En déduire les limites de f en $+\infty$.
8. Soit $x \in]1,+\infty[$.Montrer que $\forall t \in [x,x^2], 0 < \frac{1}{t-1} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{x^2}{t-1}$. En déduire la limite de f en 1^+.
9. Faire de même en 1^- et conclure.

Sup PCSI 2024-2025 Mathématiques **A rendre le lundi 16 décembre 2024**

DL 7

Exercice

A. **Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ et telle que : $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x)f(y)$.(*)**

1) Donner un exemple d'une telle application.
2) Démontrer que $f(0) \in \{0;1\}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$.
3) Démontrer que si $f(0) = 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.
4) Démontrer que si $f(0) = 1$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.
5) En déduire, grâce à la continuité de f, que si $f(0) = 1$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$.

Dans la suite de la partie A, on suppose que $f(0) = 1$.

6) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \frac{1}{f(x)}$.
7) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f(nx) = f(x)^n$.
8) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, f(nx) = f(x)^n$.
9) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{f(1)}$.
10) Démontrer que $\forall \alpha \in \mathbb{Q}$, $f(\alpha) = f(1)^\alpha$.
11) Soit $x \in \mathbb{R}$. et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 10^{-n}\lfloor 10^n x \rfloor$.
    1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq x < u_n + 10^{-n}$
    2. En déduire que x est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de nombres rationnels .
    3. On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) = f(1)^{u_n} = e^{u_n \ln[f(1)]}$.
    4. En déduire que $f(x) = f(1)^x$.

B. **Conclure :**

12) Déterminer toutes les applications continues sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x)f(y)$.
13) Tracer les allures des courbes solutions.