Corrigé du DL 5

Ex 1 <u>Des composées d'applications</u>

A. Deux résultats de cours

Soit $f: I \to J$ et $g: J \to K$ des applications.

1. Quelle information sur f et/ou g permet de justifier l'existence de $g \circ f$ sur I ? Que signifie cette information ?
2. Montrer que si $g \circ f$ est injective sur I alors f est injective sur I. On utilisera la définition de l'injectivité suivante : φ est injective sur A lorsque $\forall (a,a') \in A^2, [\varphi(a) = \varphi(a') \Longrightarrow a = a']$.
3. Montrer que si $g \circ f$ est surjective de I sur K alors g est surjective de J sur K.

1. Les deux informations permettant de justifier le fait que $g \circ f$ est définie sur I sont "f est à valeurs dans J" et "g est définie sur J" . f est à valeurs dans J signifie que "$\forall x \in I, f(x) \in J$" et "$g$ est définie sur J" signifie que "$\forall t \in I, g(t)\ existe$".
2. Supposons $g \circ f$ injective sur I .

Montrons qu'alors f est injective sur I en prouvant que : $\forall (a,a') \in I^2, [f(a) = f(a') \Longrightarrow a = a']$.
Je considère donc deux éléments $a\ et\ a'$ de I tels que $f(a) = f(a')$. Alors, $f(a)\ et\ f(a')$ sont un même élément de J . Donc, $g\big(f(a)\big) = g\big(f(a')\big)$ i.e. $g \circ f(a) = g \circ f(a')$. Comme $g \circ f$ est injective et que a et a' ont la même image par $g \circ f$, je peux affirmer que $a = a'$. Ainsi, tous éléments de I ayant la même image par f, sont nécessairement égaux. Je peux ainsi conclure que f est injective.

3. Supposons ici que $g \circ f$ est surjective de I sur K . Montrons qu'alors g est surjective de J sur Ken prouvant que tout élément de K admet au moins un antécédente par g.

Je considère donc un élément z de K. Comme $g \circ f$ est surjective de I sur K, z a au moins un antécédent x dans I.
Alors $x \in I\ et\ g \circ f(x) = z$. Donc $z = g\big(f(x)\big)\ et\ f(x) \in J$. Donc $f(x)$ est un antécédent de z par g. J'en déduis que tout élément de K admet au moins un antécédent dans J par g. Ainsi, g est surjective de J sur K.

B. APPLICATION :

Soit $f: I \to J$, $g: J \to K$ et $h: K \to L$ des applications telles que : $h \circ g$ bijective de J sur L et $g \circ f$ bijective de I sur K. BUT : prouver que f, g et h sont bijectives.

1. Montrer, en utilisant A, que g est bijective de J sur K. Nous en déduisons que g^{-1} existe et g^{-1} est une bijection de .... sur ....
2. Ecrire f à l'aide de $g \circ f$ et g^{-1}. En déduire, par un résultat de cours, que f est bijective de I sur J.
3. Faire de même pour h.

1. $h \circ g$ est bijective de J sur L donc $h \circ g$ est injective sur J. Alors d'après $A.$, g bijective sur J.

$g \circ f$ est bijective de J sur L donc $g \circ f$ est surjective de J sur L. Alors d'après $A.$, g surjective sur de J sur K.
J'en déduis que g est bijective de de J sur K et par suite, que g^{-1} existe et g^{-1} est une bijection de K sur J.

2. Alors, $f = id_F \circ f \underbrace{=}_{\substack{car \\ g^{-1}\circ g = id_F}} (g^{-1} \circ g) \circ f \underbrace{=}_{\substack{car\ la\ composition \\ est\ associative}} g^{-1} \circ (g \circ f)$. Comme $g \circ f$ est une bijection de I sur K et g^{-1} est une bijection de K sur J et que la composée de bijections est une bijection, j'en déduis que f est bijective de I sur J.
3. Alors, $h = h \circ id_K = h \circ (g \circ g^{-1}) = (h \circ g) \circ g^{-1}$. Comme $h \circ g$ est une bijection de J sur L et g^{-1} est une bijection de K sur J et que la composée de bijections est une bijection, j'en déduis que h est bijective de K sur L.

Ex 2 . Soit $a \in \mathbb{C}\ et\ T_a$ l'application définie sur $\mathbb{C}\backslash\{a+3i\}$ et à valeurs complexes par : $T_a(z) = \frac{(1-a)z+2(1-i)}{z-a-3i}$.

1. Montrer que T_a est constante si et seulement si $a \in \{1-2i, -i\}$. Déterminer le cas échéant, la valeur de cette constante.

Désormais , on suppose que le complexe a est distinct de $1-2i$ et de$-i$. Autrement dit, T_a n'est pas constante.

2. Montrer que T_a réalise une bijection de $\mathbb{C}\backslash\{a+3i\}$ sur $\mathbb{C}\backslash\{d\}$, où d est un nombre complexe à préciser et décrire ${T_a}^{-1}$.
3. Montrer qu'il existe un complexe b tel que : ${T_a}^{-1} = T_b$. Vous exprimerez b en fonction de a.
4. On prend ici $a = 2$. U est l'ensemble des complexes de module 1.

Décrire géométriquement $D = \left\{\frac{M(z)}{z} \in {T_a}^{-1}\langle U\rangle\right\} et\ K = \left\{\frac{M(z)}{z} \in {T_a}^{-1}\langle i\mathbb{R}\rangle\right\}$

5. On prend ici $a = i$. Décrire géométriquement $L = \{M(z)/z \in T_a(\mathbb{R})\}$.

1. T_a est constante $\Longrightarrow T_a(0) = T_a(3i) \Longrightarrow \frac{2(1-i)}{-a-3i} = \frac{(1-a)3i+2(1-i)}{3i-a-3i} \Longrightarrow (2-2i)(-a) = (-a-3i)(-3ia+2+i)$
$\Longrightarrow 3ia^2 - (9+3i)a + 3 - 6i = 0 \Longrightarrow ia^2 - (3+i)a + 1 - 2i = 0 \underbrace{\Longrightarrow}_{\substack{\Delta = 2i = (1+i)^2 \\ a_1 = \frac{3+i-(1+i)}{2i} = \frac{2}{2i} = -i \\ a_2 = \frac{3+i+(1+i)}{2i} = \frac{2+i}{i} = (-i)(2+i) = 1-2i}} a = a_1\ ou\ a = a_2.$

Réciproquement,

si $a = a_1$ alors $\forall z, T_{a_1}(z) = \frac{(1+i)z+2(1-i)}{z+i-3i} = \frac{(1+i)\left[z+\frac{2(1-i)}{1+i}\right]}{z+i-3i} \underbrace{=}_{car\ \frac{2(1-i)}{1+i} = \frac{2(1-i)^2}{|1+i|^2} = -\frac{4i}{2} = -2i} (1+i)\frac{[z-2i]}{z-2i} = (1+i)$.Donc T_{a_1}est constante.

Si $a = a_2$ alors $\forall z, T_{a_2}(z) = \frac{(2i)z+2(1-i)}{z-1-i} = \frac{(2i)\left[z+\frac{(1-i)}{i}\right]}{z-1-i} \underbrace{=}_{car\ \frac{(1-i)}{i} = -i(1-i) = -1-i} (2i)\frac{z-1-i}{z-1-i} = 2i$.Donc T_{a_2}est constante.

J'en conclus que T_a est constante si et seulement si $a \in \{1-2i, -i\}$.

2. Désormais $a \notin \{1-2i, -i\}$ et T_an' est pas constante.
Soit $\omega \in \mathbb{C}$. Cherchons tous les antécédents de ω par T_a en résolvant l'équation $T_a(z) = \omega$ d'inconnue z complexe.
Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{a+3i\}$.

$$z \text{ est un antécédent de } \omega \text{ par } T_a \Leftrightarrow T_a(z) = \omega \Leftrightarrow \frac{(1-a)z + 2(1-i)}{z-a-3i} = \omega \Leftrightarrow (1-a)z + 2(1-i) = \omega(z-a-3i)$$

$$\Leftrightarrow (1-a)z - \omega z = -2(1-i) - \omega(a+3i) \quad \Leftrightarrow [1-a-\omega]z = -2(1-i) - \omega(a+3i)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{-2(1-i) - \omega(a+3i)}{[1-a-\omega]} \text{ si } \omega \neq 1-a \\ 0 = -2(1-i) - (1-a)(a+3i) \text{ si } \omega = 1-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{-2(1-i) - \omega(a+2i)}{1-a-\omega} \text{ si } \omega \neq 1-a \\ a^2 + (3i-1)a - 2 - i = 0 \text{ si } \omega = 1-a \end{cases}$$

$$\underset{\substack{\text{en multipliant} \\ \text{la 2ème ligne} \\ \text{par } i}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} z = \dfrac{-2(1-i) - \omega(a+3i)}{1-a-\omega} \text{ si } \omega \neq 1-a \\ ia^2 + (-i-3)a - 2i + 1 = 0 \text{ si } \omega = 1-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{-2(1-i) - \omega(a+3i)}{1-a-\omega} \text{ si } \omega \neq 1-a \\ \underbrace{a = a_1 \text{ ou } a = a_2}_{\text{impossible}} \text{ si } \omega = 1-a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{-2(1-i) - \omega(a+3i)}{1-a-\omega} \text{ si } \omega \neq 1-a \\ \text{impossible si } \omega = 1-a \end{cases}$$

Donc tout complexe $\omega \neq 1-a$ admet un et un seul antécédent $\frac{-2(1-i)-\omega(a+3i)}{1-a-\omega}$par T_a. Mais $\omega = 1-a$ n'a pas d'antécédent par T_a. J'en conclus que T_a est bijective de $\mathbb{C}\backslash\{a+3i\}$ sur $\mathbb{C}\backslash\{1-a\}$. Et $\forall \omega \in \mathbb{C}\backslash\{1-a\}, T_a{}^{-1}(\omega) = \frac{-2(1-i)-\omega(a+3i)}{1-a-\omega}$.

3. $b + 3i = 1 - a \Leftrightarrow b = 1 - 3i - a$. Posons $b = 1 - 3i - a$.
Alors, $a = 1 - 3i - b$ et $\forall \omega \in \mathbb{C}\backslash\{b+3i\}, \omega \in \mathbb{C}\backslash\{1-a\}$ *et*
$T_a{}^{-1}(\omega) = \frac{-2(1-i)-\omega(a+3i)}{1-a-\omega} = \frac{-2(1-i)-\omega(1-3i-b+3i)}{b+3i-\omega} = \frac{-2(1-i)-\omega(1-b)}{b+3i-\omega} = \frac{\omega(1-b)+2(1-i)}{\omega-(b+3i)} = T_b(\omega)$. Ainsi, $T_a{}^{-1} = T_b$.

4. $D = \{M(z)/z \in T_a{}^{-1}\langle U\rangle\} = \{M(z)/T_a(z) \in U\} = \{M(z)/|T_a(z)| = 1\}$.
Or, $|T_a(z)| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{-z+2(1-i)}{z-2-3i}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|-z+2(1-i)|}{|z-2-3i|} = 1 \Leftrightarrow \frac{|z-2(1-i)|}{|z-(2+3i)|} = 1 \underset{\substack{Aff(A)=2(1-i) \\ Aff(B)=2+3i}}{\underbrace{\Leftrightarrow}} \frac{MA}{MB} = 1 \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow M \in med[A,B]$. Donc, $D = med[A,B]$

$K = \{M(z)/z \in T_a{}^{-1}\langle i\mathbb{R}\rangle\} = \{M(z)/T_a(z) \in i\mathbb{R}\}$.
Or, $T_a(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{-z+2(1-i)}{z-2-3i} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -z + 2(1-i) = 0 \text{ ou } arg\left(\frac{-z+2(1-i)}{z-2-3i}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow M = A \text{ ou } (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BM}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$
$\underset{\substack{\text{en notant} \\ C \text{ le cercle de diamètre } [A,B]}}{\underbrace{\Leftrightarrow}} M = A \text{ ou } M \in C$. Donc, $K = C \cup \{A\}$.

$L = \{M(z)/z \in T_a(\mathbb{R})\} = \{M(z)/z \in T_a(\mathbb{R})\} \underset{\text{car } T_a \text{est biejctive}}{\underbrace{=}} \{M(z)/T_a{}^{-1}(z) \in \mathbb{R}\} = \{M(z)/T_a{}^{-1}(z) \in \mathbb{R}\} \underset{\substack{b=1-3i-a \\ b=-1-3i}}{\underbrace{=}} \{M(z)/T_b\ \ (z) \in \mathbb{R}\}$.

Or, $T_b\ \ (z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{(2+3i)z+2(1-i)}{z+1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{(2+3i)z+2(1-i)}{z+1} = \overline{\left(\frac{(2+3i)z+2(1-i)}{z+1}\right)} \Leftrightarrow \frac{(2+3i)z+2(1-i)}{z+1} = \frac{(2-3i)\bar{z}+2(1+i)}{\bar{z}+1}$
$\Leftrightarrow [(2+3i)z + 2(1-i)][\bar{z}+1] = [(2-3i)\bar{z} + 2(1+i)][z+1]$

$T_b\ \ (z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 6iz\bar{z} + iz + i\bar{z} - 4i = 0 \Leftrightarrow 6|z|^2 + 2Re(z) - 4 = 0 \underset{\substack{\text{en posant} \\ z=x+iy}}{\underbrace{\Leftrightarrow}} 3x^2 + 3y^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow 3\left(x^2 + \frac{1}{3}x\right) + 3y^2 - 2 = 0$

$T_b\ \ (z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{12} + 3y^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{36} \Leftrightarrow \Omega M^2 = \frac{25}{36} \Leftrightarrow \Omega M = \frac{5}{6} \Leftrightarrow M \in C\left(\Omega, \frac{5}{6}\right)$.
Ainsi, $L = C\left(\Omega, \frac{5}{6}\right)$.

Ex 3 <u>Des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.</u>

1. Soit $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$. Montrer que $\forall x \in [0,1], f \circ f(x) = x$. Qu'en déduit-on sur f ?
2. Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que: $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.
   4. Montrer que f n'est pas injective. On utilisera encore la définition : φ est injective sur A lorsque $\forall (a,a') \in A^2, [\varphi(a) = \varphi(a') \Longrightarrow a = a']$.
   1) Montrer, sans étudier les variations de f, que $f(\mathbb{R}) = [-1;1]$. f est-elle surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$?
   2) Montrer que f induit une bijection $f_|$ de $[-1,1]$ sur $[-1,1]$ et déterminer une expression de $f_|{}^{-1}$.

1.Soit $x \in [0,1]$. $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} - 1)^2 \in [0,1]$ donc $f(f(x))$ existe et

$$f(f(x)) = (\sqrt{x}-1)^2 - 2\sqrt{(\sqrt{x}-1)^2} + 1 = (\sqrt{x}-1)^2 - 2|\sqrt{x}-1| + 1 \underset{\text{car } 1-\sqrt{x} \geq 0}{\underbrace{=}} x - 2\sqrt{x} + 1 - 2(1-\sqrt{x}) + 1 = x.$$

Ainsi, $\forall x \in [0,1], f \circ f(x) = x$. Il existe donc une application $g(= f)$ de $[0,1]$ sur $[0,1]$ telle que : $f \circ g = id_{[0,1]}$ *et* $g \circ f = id_{[0,1]}$. J'en conclus que f est bijective de $[0,1]$ sur $[0,1]$ et $f^{-1} = g = f$.

3. Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que: $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$. $Df = \mathbb{R}$.
   5. Montrer que f n'est pas injective i.e. $\exists (a,a') \in \mathbb{R}^2 / [f(a) = f(a') \text{ et } a \neq a']$. Soit $(a,a') \in \mathbb{R}^2$.

$f(a) = f(a') \Leftrightarrow \frac{2a}{1+a^2} = \frac{2a'}{1+a'^2} \Leftrightarrow \frac{a}{1+a^2} = \frac{a'}{1+a'^2} \Leftrightarrow a + aa'^2 = a' + a'a^2 \Leftrightarrow a - a' + aa'(a' - a) = 0$
$\Leftrightarrow (a - a')[1 - aa'] = 0 \Leftrightarrow a = a' \; ou \; a' = \frac{1}{a}$.

Ainsi, pour tout réel a non nul, $f(a) = f\left(\frac{1}{a}\right)$. En particulier $f(2) = f\left(\frac{1}{2}\right) \; et \; 2 \neq \frac{1}{2}$. Donc f n'est pas injective sur $\mathbb{R}$.

2) f est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$ donc le TVI assure que $f(\mathbb{R})$ est un intervalle. Montrons que 1=max$f(\mathbb{R})$ et -1=min$f(\mathbb{R})$.
Tout d'abord, f est impaire donc s'ils existent min$f(\mathbb{R}) = -$max$f(\mathbb{R})$.
$\forall x \in \mathbb{R}, 1 - f(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2x}{1+x^2} = \frac{(1-x)^2}{1+x^2} \geq 0 \; et \; 1 - f(1) = 0$. Donc 1 majore $f(\mathbb{R})$ et $1 = f(1) \in f(\mathbb{R})$. J'en conclus que $1 = maxf(\mathbb{R})$. Alors $-1 = minf(\mathbb{R})$ et $f(\mathbb{R}) = [-1\,;1]$. Donc tout réel n' appartenant pas à $[-1\,;1]$, n' a pas d' antécédent par f qui n'est donc pas surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

3) f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ car son expression n'est constituée que de fonctions dérivables sur leur propre domaind e définition. Et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$. Ainsi, $\forall x \in [-1;1], f'(x) \geq 0 \; et \; f'$ne s' annule qu' aux points isolés $1 \; et \; -1$. f est donc strictement croissante sur $[-1\,;1]$. Comme f est continue sur ce même intervalle, le TBCSM assure que $f([-1\,;1]) = \left[\lim_{-1} f \;;\lim_{1} f\right] = [-1\,;1]$ et f induit une bijection $f_|$ de $[-1\,;1]$ sur $[-1\,;1]$ telle que $f_| : \begin{array}{l}[-1\,;1] \to [-1\,;1] \\ x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}\end{array}$ et $f_|^{-1}$ est continue et strictement croissante sur $[-1{,}1]$, bijective de $[-1{,}1]$ sur $[-1{,}1]$, Comme $f_|$ est impaire sur $[-1{,}1]$, $f_|^{-1}$ l' est aussi. Cherchons l'expression de $f_|^{-1}$: fixons $y \in [-1;1]$ et considérons x l'unique antécédent de y par $f_|$.
Alors $x \in [-1;1] \; et \; \frac{2x}{1+x^2} = y$.
Si $y = 0$ alors $x = 0$, si $y = 1$ alors $x = 1$ et si $y = -1$ alors $x = -1$.
Si $y \notin \{0,1,-1\}$ alors $yx^2 - 2x + y = 0$ et en posant $\Delta = 4 - 4y^2 = \left(2\sqrt{1-y^2}\right)^2$, nous obtenons $x = \frac{2\pm2\sqrt{1-y^2}}{2y} = \frac{1\pm\sqrt{1-y^2}}{y}$.
Or, $-1 \leq \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -y \leq 1 + \sqrt{1-y^2} \leq y \; si \; y \geq 0 \\ y \leq 1 + \sqrt{1-y^2} \leq -y \; si \; y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - y \leq \sqrt{1-y^2} \leq y - 1 < 0 \; si \; y \geq 0 \\ y - 1 \leq \sqrt{1-y^2} \leq -y - 1 < 0 \; si \; y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow impossible$.
Donc, nécessairement, $x = \frac{1-1\sqrt{1-y^2}}{y}$. Et ainsi, $f_|^{-1}(y) = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$.

Vérification : $f\left(\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}\right) = \frac{2\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}}{1+\left(\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}\right)^2} = \frac{2}{y}\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{\frac{y^2+1+1-y^2-2\sqrt{1-y^2}}{y^2}} = \frac{2y^2}{y}\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{2-2\sqrt{1-y^2}} = y \; OK$!!!