Sup PCSI 2024-2025 Mathématiques.

TD 9

Dérivées nièmes. Comparaison des fonctions et développements limités.

I Dérivées d'ordre supérieur.

Ex 1 Soit $a, b, c\ et\ d$ constantes réelles et a non nulle. Justifier l'existence et calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de chacune des fonctions suivantes sur un domaine à préciser :

1) $f : \left(x \mapsto \frac{cx+d}{ax+b}\right)$.
2) $f : \left(x \mapsto \frac{x^4}{x^3+2x^2-x-2}\right)$.
3) $f(x) = (3x^2 - x + 5)\sin(x\sqrt{3})e^x$

2) $f : \left(x \mapsto \frac{1}{x^2-b^2}\right)$

5) $f : (x \mapsto (4x^2 - 3x + 1)\sin^2(x))$ (expression sous la forme $H(x) + P(x)sin(2x) + Q(x)cos(2x)$ où $H, P\ et\ Q$ polynomiales)

6) $(x \mapsto x^n e^{3x})$ puis calculer $f^{(n)}(0)$.

Ex 2 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer de deux manières la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f : (x \mapsto x^{2n})$. En déduire $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Ex 3 Soit $f \in D^\infty(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on définit g_n par : $\forall x > 0$, $g_n(x) = x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Justifier que $g_n \in D^n(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ et montrer ,par récurrence sur n , que :$\forall x > 0$, $g_n^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Application : déterminer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $(x \to x^{n-1}ln(x))$

Ex 4 Soit $f : (x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}})$.

a) Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f peut se mettre sous la forme :

$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$, où P_n est une fonction polynomiale. Donner une relation entre $P_n{}'$, $P_n\ et\ P_{n+1}$?

c) Déterminer et démontrer (conjecture puis récurrence) le degré et le coefficient du terme de plus haut degré de P_n .

Ex 5 Soit $f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}\backslash\{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{1-x} e^{\frac{1}{1-x}} \end{pmatrix}$.

a) Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f peut se mettre sous la forme :

$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}}$, où P_n est une fonction polynomiale. Donner une relation entre $P_n'(t), P_n(t) et\ P_{n+1}(t)$.

c) Déterminer , par conjecture puis récurrence , le degré et le coefficient dominant de P_n .

d) Montrer que f est solution de : $(1-x)^2 y' = (2-x)y$.

e) En déduire que :$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $P_{n+1}(t) = [(2n+1)t + t^2]P_n(t) - n^2t^2P_{n-1}(t)$.

Ex 6 Soit $(E) : x^2y'' + 4xy' + 2y = \sin(x)$ Soit g une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ de classe C^∞.

1) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 g^{(n+2)}(x) + (2n+4)xg^{(n+1)}(x) + (n^2 + 3n + 2)g^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.
2) En déduire le polynôme de Taylor de g en 0 de rang n tq $n \in \mathbb{N}$.
3) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ en posant $\theta(x) = x^2y(x)$. Faites de même sur $\mathbb{R}^{-*}$.
4) En déduire g et retrouver la valeur de $g'(0)$.

Ex 7 Trouver une relation entre $Arctan^{(n+2)}, Arctan^{(n+1)} et\ \ Arctan^{(n)}$.

Ex 8 Soit $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$.

1. Calculer le plus efficacement possible $f^{(n)}(0)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $f^{(n)}(x)$ pour $|x| \neq 1$.

Ex 9

A) Montrer que la fonction :$f : \left(x \mapsto \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{2} & si\ x < 0 \\ \frac{2+x^2}{2(1+x^2)} & si\ x \geq 0 \end{cases}\right)$ est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas de 4 fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

B) Soit n un entier naturel non nul . Soit $f : \left(x \mapsto \begin{cases} x^n \ln(x)\ si\ x > 0 \\ 0\ si\ x = 0 \end{cases}\right)$. Montrer que f est de classe C^{n-1} mais pas n-fois dérivable sur $\mathbb{R}^+$et $\forall k \in [\![0, n-1]\!], f^{(k)}(0) = 0$. Que peut-on en conclure sur les ensembles $D^n(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $C^{n-1}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

II Comparaison des fonctions et développements limités

VRAI ou FAUX

1. $\left(x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ admet un $DL_0(0)$.
2. $\left(x \mapsto \sqrt{x+1}\right)$ admet -elle un $DL_1(-1)$.
3. La fonction $\left(x \mapsto \sqrt{x^5}\right)$ admet un $DL_2(0)$.
4. La fonction $\left(x \mapsto \sqrt{x^5}\right)$ admet un $DL_3(0)$.
5. $f \sim_a g \text{ et } f \text{ et } g \text{ dérivables au voisinage de } a \Rightarrow f' \sim_a g'$.
6. $f(x) = o_a(x) \Rightarrow f(x)^2 = o_a(x^2)$
7. $f(x) \sim_0 h(x) \Rightarrow xf(x) \sim_0 (x+1)h(x)$
8. $ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{x}$
9. $e^{x^2-4x+1} \sim_{+\infty} e^{x^2}$
10. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \sim_{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$.
11. $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x} = e^{\frac{2}{3}}$
12. $\frac{e^{3x}}{e^{2x-1}} \sim_0 e^x$
13. $\sin\left(\frac{1}{n+2}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$.
14. Il existe un réel α strictement positif tq : $xln(x) = o_0(x^\alpha)$.
15. Pour tout réel α positif, $e^{\frac{1}{x-1}} = o_{1^-}((1-x)^\alpha)$.
16. Il existe un réel α strictement positif tq : $e^{\sqrt[3]{x}} = o_{+\infty}(\ln^\alpha(x))$.
17. $x^2\ln(x) \ll_0 \frac{x}{\ln(x)} \ll_0 x\ln(x) \ll_0 x \ll_0 1 \ll_0 \frac{ln^3(x)}{x} \ll_0 \frac{\ln(x)}{x^3}$

Ex 10 EQUIVALENTS

A. Déterminer un équivalent simple au voisinage de 0 de $f(x)$. Que peut-on en déduire sur f ?

1. $f(x) = \frac{x^4 - \tan^2(x)\sqrt[3]{\sqrt[5]{1-x}-1}}{\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \ln(x)}$
2. $f(x) = e^x - \sqrt{1+2x} - x^2$
3. $f(x) = \frac{e^{2x} - \ln(e+x)}{x^3 + \sin(x)\cos(x)}$
4. $f(x) = \ln(3e^x + e^{-x}) - 2\ln(2)$
5. $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x}} - \sqrt{2}$
6. $f(x) = Arcsin(\pi\sin(x))$
7. $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$
8. $f(x) = \ln(2 - x^3 + e^x)$
9. $f(x) = (1-2x^2)^{\frac{1}{x^3}}$
10. $f(x) = \ln(\ln(e+x))$
11. $f(x) = \ln(sinx)$
12. $f(x) = \frac{2}{sin^2x} - \frac{1}{1-\cos(x)}$
13. $f(x) = \sqrt[p]{1+px} - \sqrt[q]{1+qx} + \left(\frac{p-q}{2}\right)x^2$
14. $f(x) = \text{sh}(x)^{\frac{1}{\ln(x)}}$
15. $f(x) = x^x - (sinx)^{sinx}$

B. **Déterminer un équivalent simple pour x au voisinage de +∞ de $f(x)$. Que peut-on en déduire sur f?**

16. $f(x) = e^{2-x^2+\frac{1}{x}+\ln(x)}$
17. $f(x) = \ln(2 - x^3 + e^x)$
18. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2+x+1}{x^2-2}}$
19. $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$
20. $f(x) = \sqrt{x^2+ax+b} - x$
21. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x - sinx \times lnx}}$
22. $f(x) = \text{Arctan}(x) - \frac{\pi}{2}$
23. $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$
24. $f(x) = (lnx)^2\left(\sin\left(\frac{1}{lnx}\right) - \sin\left(\frac{1}{\ln(x+1)}\right)\right)$

C. **Déterminer un équivalent simple au voisinage de a de f:**

25. $f(x) = tanx \quad , a = \frac{\pi^-}{2}$
26. $f(x) = (x^2 - 3x + 2)\ln\left(sin\frac{\pi x}{2}\right) \; , a = 1$
27. $f(x) = Arccos(x) \quad , a = 1$
28. $f(x) = x^x - 4 \; , a = 2$
29. $f(x) = Arctan(x) - \frac{\pi}{4} \; , a = 1$
30. $f(x) = x^x - x \; , a = 1$

Ex 11 TECHNIQUES DE CALCUL DES DL : Déterminer le développement limité à l'ordre demandé au voisinage du point indiqué de chacune des fonctions f suivantes et en déduire dans les cas($**$)une propriété sur f :

1. $f(x) = \sqrt{4+e^x}$ $(ordre\ 3\ en\ 0)$
2. $f(x) = ln(1+\sqrt[3]{8+x})$ $(ordre\ 3\ en\ 0)$
3. $f(x) = \frac{\sin(x)}{1-x^2+x^3}$ $(ordre\ 6\ en\ 0)$
4. $f(x) = e^{Arccos(x)}$ $(ordre\ 6\ en\ 0)$
5. $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^2+x^3}$ $(ordre\ 3\ en\ 1)$
6. $f(x) = \frac{\sin(x)Arctan(x)}{\text{sh}(x)}$ $(ordre\ 6\ en\ 0).(**)$
7. $f(x) = \tan(x)$ $(ordre\ 7\ en\ 0)$
8. $f(x) = \tan(x)$ $\left(ordre\ 3\ en\ \frac{\pi}{4}\right)$
9. $f(x) = x^2Arctan\left(\frac{1}{x+1}\right)$ $(ordre\ 6\ en\ (-1)^+ et\ en\ (-1)^-)$
10. $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ $(ordre\ 3\ en\ 0).(**)$
11. $f(x) = ln\left(\frac{x^2+1}{x+3}\right)$ $(ordre\ 5\ en\ 0)$
12. $f(x) = \cos(x)^{\frac{1}{\sin^2(x)}}$ $(ordre\ 6\ en\ 0)$
13. $f(x) = Arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)$ $(ordre\ 13\ en\ 0).(**)$
14. $f(x) = \exp(\cos(\ln(\cos(x))))$ $(ordre\ 3\ en\ 0)$
15. $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(Arcsin(x))^2}$ $(ordre\ 5\ en\ 0).(**)$
16. $f(x) = tan\left(\sqrt[3]{4(\pi^3+x^3)}\right)$ $(ordre\ 3\ en\ \pi)$
17. $f(x) = \frac{sh(x)}{\ln(1+\sin(x))}$ $(ordre\ 6\ en\ 0).(**)$
18. $f(x) = Arctan(\cos(x))$ $(ordre\ 5\ en\ 0)$
19. $f(x) = Arccos\sqrt{\frac{x}{\tan(x)}}$ $(ordre\ 1\ puis\ 3\ en\ 0^+)$
20. $f(x) = \sqrt{x(sinx + shx - 2x)}$ $(ordre\ 9\ en\ 0^+, en\ 0^-)$
21. $f(x) = sh^{-1}(x)(ordre\ 5\ en\ 0)$
22. $f(x) = Arctan\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)$ $(ordre\ 2\ en\ 1)$

Ex 12 Soit $f(x) = \ln\left(\sum_{k=0}^{99}\frac{x^k}{k!}\right)$. Déterminer le DL à l'ordre 99 en 0 de f . Puis déterminer le DL à l'ordre 100 en 0 de f.

Ex 13 Opérations sur les développements limités

Soit $f(x)=x^2+2x^3+x^4+o_0(x^4)$ et $g(x)=-x^3+3x^4+o_0(x^4)$. Trouver le plus grand ordre possible que l'on obtenir pour le développement limité en 0 de $f\times g$ $puis\ de$ $\frac{g}{f}$ $et\ enfin\ de$ $f\circ g.$

Ex 14 Développement limité d'une fonction définie par une intégrale et d'une bijection réciproque

1. Soit $f(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt$. Déterminer son DL en 0 à l' ordre 10 . Qu'en déduit-on sur f?
2. Déterminer son DL en 0 à l' ordre 5 de φ^{-1} où $\varphi:(x\mapsto xe^{x^2})$

Ex 15 DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

1. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)$.
   Trouver trois réels A , B et C tels que : $f(x)=A+\frac{B}{x}+\frac{C}{x^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
2. Soit $f(x)=\sqrt{\frac{3-x^2}{2-4x}}$. Montrer que $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{4\sqrt{x}}-\frac{21}{16x\sqrt{x}}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$ .Que peut – on en conclure sur Cf ?
3. Trouver un développement asymptotique de tan au voisinage de $\frac{\pi}{2}^-$ à 3 termes significatifs.
4. Montrer que $\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\ln(x)}=1+\frac{\ln(x)}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2+\frac{\ln(x)}{x^2}+\frac{(\ln(x))^3}{6x^3}+\frac{(\ln(x))^2}{x^3}+\frac{\ln(x)}{x^3}+o_{+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x^3}\right)$.

Ex 16 Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^+,\ \frac{1}{(x+1)^2+1}\le Arctan(x+1)-Arctan(x)\le\frac{1}{x^2+1}$.

<u>Deux applications :</u>

1. Montrer que la suite u , telle que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+k^2}$, est convergente.
2. a. Montrer que : $Arctan(x+1)-Arctan(x)\sim_{+\infty}\frac{1}{x^2}$.
   b. En déduire que : $\frac{Arctan(x+1)}{Arctan(x)}=1+\frac{2}{\pi x^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
   c. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{Arctan(x+1)}{Arctan(x)}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Ex 17 TANGENTES –DEMI-TANGENTES – PROLONGEMENT PAR CONTINUTE–DERIVABILITE et EXTREMUM LOCAL

1. Soit $f:(x\mapsto(1-2\sin(x))\tan(3x)$. Montrer que f est prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{6}$ et que son prolongement est dérivable en $\frac{\pi}{6}$ et étudier la position de sa courbe par rapport à sa tangente .
2. Déterminer l'équation des deux demi-tangentes en 0 de Cf $où$ $f:\left(x\mapsto\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}\right)$ et la position de Cf par rapport à ces demi-tangentes .
3. Montrer que f définie par et $g(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} & si\ x\neq 0\\ 1\ si\ x=0\end{cases}$ est de classe C^1 sur $]-1,1[$ et admet un extremum local en 0.

Ex 18 ASYMPTOTES

Déterminer une équation de l'asymptote oblique de la courbe représentative de f et la position de la courbe par rapport à cette asymptote dans les cas suivants :

a. $f(x)=x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

b. $f(x)=\frac{1-x+4x^2}{2x-3}e^{\frac{1}{x-3}}$

c. $f(x)=(x+1)Arctan\left(\frac{2+x}{x}\right)$

d. $f(x)=(x^2-1)\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

Ex 19 LIMITES. Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos(x)e^{\frac{1}{1-\sin(x)}}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(Arctan(x)-\frac{\pi}{2})$

c) $\lim\limits_{x\to0}(1+x^\alpha)^{\frac{1}{x^{\alpha+\beta}}}$

d) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^x-x}{1-x+ln(x)}$

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{cos^2x}+\frac{1}{\ln(sin(x))}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{\ln(x)}{x}}-x}{x^2\ln(x)}$

g) $\lim\limits_{x\to0}\frac{sin^nx-x^n}{x^{n+2}}$

h) $\lim\limits_{x\to1}\frac{e}{e^x-e}-\frac{1}{x-1}$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-ex^3\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

j) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{xln(x)}$

l) $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{2^x+3^x}{2^{x+1}+5^{\frac{x}{2}}}\right)^{\frac{1}{2-x}}$

m) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{sinx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

n) $\lim\limits_{x\to0}\frac{cos^nx-ncos(x)+n-1}{sin^4x}$

o) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{Arctan(2sinx)-\frac{\pi}{4}}{cos\ \ (3x)}$

p) $\lim\limits_{x\to2}(2^x+3^x-12)^{tan\frac{\pi x}{4}}$

q) $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x^x-a^a}$ où $a\in\mathbb{R}^{+*}$

Ex 20 Une fonction à paramètre Soit a un réel et $f_a : \left(x \mapsto \frac{1-ax+x^2}{\sqrt{1+x^2}} e^{Arctan(x)}\right)$.

1. a. Déterminer un équivalent simple de f_a au voisinage de 0 .
   b. Donner l'équation de la tangente à C_{f_a} en 0 et la position, au voisinage de 0, de la courbe C_{f_a} par rapport à cette tangente (suivant les valeurs de a).
2. a. Déterminer un équivalent simple de f_a au voisinage de$+\infty$.
   b. Montrer que C_{f_a}a deux asymptotes obliques et étudier la position, au voisinage de$\pm\infty$, de C_{f_a} par rapport à ses asymptotes (suivant les valeurs de a).
   c. Vérifier que ces deux asymptotes se coupent orthogonalement sur (Ox).

Ex 21 Etudes de fonctions

1. Etude complète et tracé de la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-2)}$.

2. Etude complète et tracé de la fonction $f(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+x}$

3. Soit $0 < a < b$. Etude complète de la fonction $f(x) = \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Ex 22 Raccordement dans une équation différentielle Résoudre $x^2(1+x)y' + y = x$ sur $\mathbb{R}$.