Corrigé du TD Equations différentielles linéaires

Ex 0 Navigation entre ordre 1 et ordre 2

Vous devez donner toutes les solutions réelles des équations différentielles suivantes très très très rapidement

1. $y' + 2y = 5$
2. $y'' - y' = 10$
3. $y'' - 9y = 1 + e^{-x}$
4. $2y' - y = e^{3x}$
5. $ch(x)y' - sh(x)y = 1$
6. $y'' + 2y' + y = e^{2x}$
7. $2xy' - y = x$ tel que $x > 0$
8. $xy' - y = 1 - \ln(x)$
9. $y'' + y = \cos(x)$

1. $Sol = \left\{\left(\begin{array}{c}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{5}{2} + ke^{-2x}\end{array}\right)/k \in \mathbb{R}\right\}$
2. $Sol = \left\{\left(\begin{array}{c}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -10x + u + ve^{x}\end{array}\right)/u, v \in \mathbb{R}\right\}$
3. $Sol = \left\{\left(\begin{array}{c}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\frac{1}{9} - \frac{1}{8}e^{-x} + ue^{-3x} + ve^{3x}\end{array}\right)/u, v \in \mathbb{R}\right\}$
4. $Sol = \left\{\left(\begin{array}{c}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{5}e^{3x} + ke^{\frac{x}{2}}\end{array}\right)/k \in \mathbb{R}\right\}$
5. $Sol = \left\{\left(\begin{array}{c}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto sh(x) + kch(x)\end{array}\right)/k \in \mathbb{R}\right\}$
6. $Sol = \left\{\left(\begin{array}{c}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{9}e^{2x} + (ux + v)e^{-x}\end{array}\right)/u, v \in \mathbb{R}\right\}$
7. $Sol = \left\{\left(\begin{array}{c}\mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x + k\sqrt{x}\end{array}\right)/k \in \mathbb{R}\right\}$
8. $Sol = \left\{\left(\begin{array}{c}\mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x) - 1 + kx\end{array}\right)/k \in \mathbb{R}\right\}$
9. $Sol = \left\{\left(\begin{array}{c}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{2}\sin(x) + u\cos(x) + v\sin(x)\end{array}\right)/u, v \in \mathbb{R}\right\}$

COURS* : *Soit m une constante réelle non nulle

$$y' + my = 0 \xrightarrow[\text{réelle}]{\text{sol°}} (x \mapsto ke^{-mx})\ tq\ k\ cste\ réelle$$

$$y' = 0 \xrightarrow[\text{réelle}]{\text{sol°}} (x \mapsto k)\ tq\ k\ cste\ réelle$$

$$y'' + m^2y = 0 \xrightarrow[\text{réelle}]{\text{sol°}} (x \mapsto u\cos(mx) + v\sin(mx))\ tq\ u, v\ cstes\ réelles$$

$$y'' + |m|y = 0 \xrightarrow[\text{réelle}]{\text{sol°}} \left(x \mapsto u\cos\left(\sqrt{|m|}x\right) + v\sin\left(\sqrt{|m|}x\right)\right)\ tq\ u, v\ cstes\ réelles$$

$$y''=0 \xrightarrow[\text{réelle}]{\text{sol°}} (x \mapsto u + vx)\ tq\ u, v\ cstes\ réelles$$

$$y'' - m^2y = 0 \xrightarrow[\text{réelle}]{\text{sol°}} (x \mapsto ue^{mx} + ve^{-mx})\ tq\ u, v\ cstes\ réelles$$

$$y'' - |m|y = 0 \xrightarrow[\text{réelle}]{\text{sol°}} \left(x \mapsto ue^{\sqrt{|m|}x} + ve^{-\sqrt{|m|}x}\right)\ tq\ u, v\ cstes\ réelles$$

Ex 1 Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle I proposé .

1. $y' + 4y = 1 - 2\cos(x)$, $I = \mathbb{R}$
2. $(1 - 2i)y'(t) + (3 + i)y(t) = 2(1 - e^{it})$, $I = \mathbb{R}$
3. $(x^2 + 1)y'(x) + xy(x) = 1$, $I = \mathbb{R}$.
4. $(e^x - 1)y' + e^x y = 1$, $I = \mathbb{R}^{-*}$
5. $x(1 + ln^2(x))y' + 2\ln(x)\,y = 1$, $I = \mathbb{R}^{+*}$
6. $\sqrt{1 - x^2}y' - y = 1$, $I =]-1,1[$
7. $tx'(t) - x(t) = t\sqrt{1 + \ln(t)}$, $I = [\frac{1}{e}, +\infty[$
8. $(1 - r^2)u'(r) - ru(r) = 1$, $I =]-1,1[$
9. $x'sin(t) - x\cos(t) = e^t sin^4 t$, $I =]0, \pi[$
10. $xy'(x) + \alpha y(x) = x^\beta$, $I = \mathbb{R}^{+*}$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
11. $sh(x)y' - ch(x)y = 1$, $I = \mathbb{R}^{-*}$.
12. $(1 + cos^2 x)y' - sin(2x)y = cosx$, $I = \mathbb{R}$
13. $y' - \tan(x)\,y = cos^2(x)$, $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
14. $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$, $I = \mathbb{R}$
15. $2xy'(x) + y(x) = x^n$, $I = \mathbb{R}^{+*}$ où $n \in \mathbb{N}$.
16. $e^{x^2}y' + xy = 1$, $I = \mathbb{R}$ ⚠
17. $x\ln(x)y' - y = \ln(x)$, $I =]0,1[$

Dans cet exercice, toutes les équations différentielles sont linéaires et d'ordre 1. Les fonctions coefficients et le second membre sont continues sur I et la fonction coefficient de y' ne s'annule pas sur I. Donc le théorème de résolution de (EH) et la méthode de variation de la constante s'appliquent sur I.

1. $(E): y' + 4y = 1 - 2\cos(x)$, $I = \mathbb{R}$. $Sol(EH) = \left\{\left(\begin{array}{c}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ke^{-4x}\end{array}\right)/k \in \mathbb{R}\right\}$ et $\left(x \mapsto \frac{1}{4}\right)$ est une $\overset{sol°\ particulière}{\widehat{SP}}$ de $y' + 4y = 1$.

Cherchons une SP de $(E_2): y' + 4y = -2\cos(x)$ sous la forme $f(x) = A\sin(x) + B\cos(x)$ où A, B cstes réelles à déterminer.

$f\ sol\ de\ (E_2) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, A\cos(x) - B\sin(x) + 4(A\sin(x) + B\cos(x)) = -2\cos(x) \Longleftarrow \begin{cases} A + 4B = -2 \\ 4A - B = 0 \end{cases} \Longleftarrow \begin{cases} 17A = -2 \\ B = 4A \end{cases} \Longleftarrow \begin{cases} A = -\frac{2}{17} \\ B = -\frac{8}{17} \end{cases}.$

Donc, $\left(x \mapsto -\frac{2}{17}\sin(x) - \frac{8}{17}\cos(x)\right)$ est solution de $y' + 4y = -2\cos(x)$. Et par superposition, $\left(x \mapsto -\frac{2}{17}\sin(x) - \frac{8}{17}\cos(x) + \frac{1}{4}\right)$ est une solution particulière de (E). Ainsi, $Sol(E) = \left\{\left(\begin{array}{c}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\frac{2}{17}\sin(x) - \frac{8}{17}\cos(x) + \frac{1}{4} + ke^{-4x}\end{array}\right)/k \in \mathbb{R}\right\}$.

2. $(E): (1 - 2i)y'(t) + (3 + i)y(t) = 2(1 - e^{it})$, $I = \mathbb{R}$. $Sol(EH) = \left\{\left(\begin{array}{c}\mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto ke^{\left(\frac{3+i}{1-2i}\right)t}\end{array}\right)/k \in \mathbb{C}\right\}$ et $\left(t \mapsto \frac{2}{3+i}\right)$ est une $\overset{sol°\ particulière}{\widehat{SP}}$ de $(1 - 2i)y' + (3 + i)y = 2$.

Alors, $f\ sol\ de\ (E) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, A\cos(x) - B\sin(x) + 4(A\sin(x) + B\cos(x)) = -2\cos(x) \Longleftarrow \begin{cases} A + 4B = -2 \\ 4A - B = 0 \end{cases} \Longleftarrow \begin{cases} 17A = -2 \\ B = 4A \end{cases} \Longleftarrow \begin{cases} A = -\frac{2}{17} \\ B = -\frac{8}{17} \end{cases}.$

Donc, cherchons une SP de $(E_2): (1 - 2i)y' + (3 + i)y = -2e^{it}$ sous la forme $f(t) = Ae^{it}$ où A cste réelle à déterminer.

$f\ sol\ de\ (E_2) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, (1 - 2i)Aie^{it} + (3 + i)Ae^{it} = -2e^{it} \Longleftarrow (i + 2 + 3 + i)A = -2 \Longleftarrow A = -\frac{2}{(5+2i)} = -2\frac{(5-2i)}{|5-2i|^2} = \frac{2}{29}(-5 + 2i).$

Donc, $\left(t \mapsto \frac{2}{29}(-5 + 2i)e^{it}\right)$ est solution de (E_2). Et par superposition, $\left(t \mapsto \frac{2}{29}(-5 + 2i)e^{it} + \frac{2}{3+i}\right)$ est une solution particulière de (E). Ainsi, $Sol(E) = \left\{\left(\begin{array}{c}\mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \frac{2}{29}(-5 + 2i)e^{it} + \frac{2}{10}(3 - i) + \frac{1}{4} + ke^{\frac{1}{5}(1+7i)t}\end{array}\right)/k \in \mathbb{R}\right\}$ car $\left(\frac{3+i}{1-2i}\right) = (3 + i)\frac{(1+2i)}{5} = \frac{1}{5}(1 + 7i)$ et $\frac{2}{3+i} = 2\frac{(3-i)}{|3+i|^2} = \frac{2}{10}(3 - i)$.

3. $(x^2 + 1)y'(x) + xy(x) = 1$, $I = \mathbb{R}$. Fait en cours.
4. $(E): (e^x - 1)y' + e^x y = 1$, $I = \mathbb{R}^{-*}$.

Résolution sur I de (EH) : $y' + \frac{e^x}{e^x-1}y = 0$. Posons $a : \left(x \mapsto \frac{e^x}{e^x-1}\right)$. Alors, $A : (x \mapsto ln|e^x - 1|)$ est une primitive de a sur I et $\forall x < 0$,
$e^{-A(x)} = e^{-\ln(1-e^x)} = e^{\ln[(1-e^x)^{-1}]} = (1-e^x)^{-1} = \frac{1}{1-e^x}$. Ainsi, les solutions de (EH) sur I sont toutes les fonctions de la forme $\begin{pmatrix} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{k}{1-e^x} \end{pmatrix}$
tel que $k \in \mathbb{R}$.

Recherche d'une SP de (E) sur I : Appliquons la MVC. Cherchons une solution particulière de (E) sous la forme $f(x) = \frac{k(x)}{1-e^x}$ telle que k dérivable sur I. Alors f est dérivable sur I et $\forall x \in I, f'(x) = k'(x)(1-e^x)^{-1} - k(x)(-e^x)(1-e^x)^{-2}$. Par suite,
f est solution de (E) sur I
$\Leftrightarrow \forall x < 0, (e^x - 1)[k'(x)(1-e^x)^{-1} - k(x)(-e^x)(1-e^x)^{-2}] + e^x\, k(x)(1-e^x)^{-1} = 1$
$\Leftrightarrow \forall x < 0, -k'(x) = 1$
$\Leftrightarrow \forall x < 0, k'(x) = -1$
$\Leftrightarrow k$ est une primitive de $g: (x \mapsto -1)$ sur $\mathbb{R}^{-*}$. .
Prenons $k_0: (x \mapsto -x)$ une primitive particulière de g. Alors $f_0: (x \mapsto \underbrace{\frac{-x}{1-e^x}}_{\frac{k_0(x)}{1-e^x}})$ est une solution particulière de (E) sur I.

Conclusion : les solutions de (E) sur I sont toutes les fonctions de la forme $\begin{pmatrix} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{-x}{1-e^x} + \frac{k}{1-e^x} \end{pmatrix}$ tel que $k \in \mathbb{R}$.

5. $x(1 + ln^2(x))y' + 2\ln(x)\, y = 1$, $I = \mathbb{R}^{+*}$.

Résolution sur I de (EH) : $y' + \frac{2\ln(x)}{x(1+ln^2(x))}y = 0$. Posons $a : \left(x \mapsto \frac{2\ln(x)}{x(1+ln^2(x))}\right)$. a est continue sur I donc admet des primitives sur cet intervalle I. $\forall x > 0, \int^x a(t)dt = \int^x \frac{2\ln(t)}{(1+ln^2(t))}\frac{dt}{t} \underset{\substack{u=\ln(t)\\ du=\frac{1}{t}dt\\ t=x\Leftrightarrow u=\ln(x)}}{\underbrace{=}} \int^{\ln(x)} \frac{2u}{(1+u^2)}du = [\ln(1+u^2)]^{\ln(x)} = \ln(1+(\ln(x))^2) + cste$. Alors,
$A : (x \mapsto \ln(1+(\ln(x))^2))$ est une primitive de a sur I et $\forall x > 0$,
$e^{-A(x)} = e^{-\ln(1+(\ln(x))^2)} = e^{\ln[(1+\ln^2(x))^{-1}]} = (1 + ln^2(x)^x)^{-1} = \frac{1}{1+ln^2(x)}$. Ainsi, les solutions de (EH) sur I sont toutes les fonctions de la forme $\begin{pmatrix} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{k}{1+ln^2(x)} \end{pmatrix}$ tel que $k \in \mathbb{R}$.

Recherche d'une SP de (E) sur I : Appliquons la MVC. Cherchons une solution particulière de (E) sous la forme $f(x) = \frac{k(x)}{1+ln^2(x)}$ telle que k dérivable sur I. Alors f est dérivable sur I et $\forall x \in I, f'(x) = k'(x)(1+ln^2(x))^{-1} - k(x)\frac{2\ln(x)}{x}(1+ln^2(x)^{-2}$. Par suite,
f est solution de (E) sur I
$\Leftrightarrow \forall x > 0, x(1+ln^2(x))[k'(x)(1+ln^2(x))^{-1} - k(x)\frac{2\ln(x)}{x}(1+ln^2(x))^{-2}] + 2\ln(x)\,k(x)\big(1+ln^2(x)\big)^{-1} = 1$
$\Leftrightarrow \forall x > 0, xk'(x) = 1$
$\Leftrightarrow k$ est une primitive de $g: \left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)$ sur I.
Prenons $k_0: (x \mapsto \ln(x))$ une primitive particulière de g. Alors $f_0: (x \mapsto \underbrace{\frac{\ln(x)}{1+ln^2(x)}}_{\frac{k_0(x)}{1-e^x}})$ est une solution particulière de (E) sur I.

Conclusion : les solutions de (E) sur I sont toutes les fonctions de la forme $\begin{pmatrix} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\ln(x)}{1+ln^2(x)} + \frac{k}{1+ln^2(x)} \end{pmatrix}$ tel que $k \in \mathbb{R}$.

18. $\sqrt{1-x^2}y' - y = 1$, $I =]-1{,}1[$

19. $tx'(t) - x(t) = t\sqrt{1+\ln(t)}$, $I = [\frac{1}{e}, +\infty[$

20. $(1-r^2)u'(r) - ru(r) = 1$, $I =]-1{,}1[$

Résolution de (EH) : $u'(r) - \frac{r}{1-r^2}u(r) = 0$.

Posons $a(r) = -\frac{r}{1-r^2} = \frac{1}{2}\frac{-2r}{1-r^2}$. Donc, $A: \left(r \mapsto \frac{1}{2}ln|1-r^2|\right)$ est une primitive de a sur I *et* $\forall r \in I, e^{-A(r)} = e^{-\frac{1}{2}ln|1-r^2|} = e^{\ln\left[|1-r^2|^{-\frac{1}{2}}\right]} = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}$.
Les solutions de (EH) sur I sont toutes les fonctions de la forme $\begin{pmatrix} I \to \mathbb{R} \\ r \mapsto k\frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \end{pmatrix}$ $tq\ k \in \mathbb{R}$.

Recherche d'une SP de (E) sur I : Je cherche une solution particulière de (E) sous la forme : $f(r) = \frac{k(r)}{\sqrt{1-r^2}}$ où $k: I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I.

f est solution de (E) sur $I \Leftrightarrow \forall r \in I, (1-r^2)\left[\frac{k'(r)}{\sqrt{1-r^2}} + k(r)(-2r)\left(-\frac{1}{2}\right)(1-r^2)^{-\frac{3}{2}}\right] - r\frac{k(r)}{\sqrt{1-r^2}} = 1$

$$\Leftrightarrow \forall r \in I, \sqrt{1-r^2}k'(r) = 1$$
$$\Leftrightarrow \forall r \in I, k'(r) = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}.$$

Prenons $k_0(r) = Arcsin(r)$. Alors, $f_0: \left(r \mapsto \frac{Arcsin(r)}{\sqrt{1-r^2}}\right)$ est une solution particulière de (E) sur I.

Conclusion : les solutions de (E) sur I sont toutes les fonctions de la forme $\begin{pmatrix} I \to \mathbb{R} \\ r \mapsto \frac{Arcsin(r)}{\sqrt{1-r^2}} + k\frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \end{pmatrix}$ tel que $k \in \mathbb{R}$.

21. $x'sin(t) - x\cos(t) = e^t sin^4 t$, $I =]0, \pi[$

22. $xy'(x)+\alpha y(x)=x^{\beta}$, $I=\mathbb{R}^{+*}$ où $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

Posons $a(x)=\frac{\alpha}{x}$. Alors $A\colon (x\mapsto \alpha\ln(x))$ est une primitive de a sur l'intervalle $I=\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x>0, e^{-A(x)}=e^{-\alpha\ln(x)}=e^{\ln(x^{-\alpha})}=x^{-\alpha}$.

Les solutions de (EH) sur I sont toutes les fonctions de la forme $\begin{pmatrix} I\to\mathbb{R}\\ x\mapsto kx^{-\alpha}\end{pmatrix}$ $tq\ k\in\mathbb{R}$.

<u>Recherche d'une SP de (E) sur I</u> : Je cherche une solution particulière de (E) sous la forme : $f(x)=k(x)x^{-\alpha}$ où $k\colon I\to\mathbb{R}$ dérivable sur I.

f est solution de (E) sur $I \Leftrightarrow \forall x\in I, x[\,k'(x)x^{-\alpha}-\alpha k(x)x^{-\alpha-1}\,]+\alpha k(x)x^{-\alpha}=x^{\beta}$

$\Leftrightarrow \forall x\in I, k'(x)x^{-\alpha}=1$

$\Leftrightarrow \forall x\in I, k'(r)=x^{\alpha+\beta}$

1^er cas $\alpha+\beta\neq-1$. Prenons $k_0(x)=\frac{x^{\alpha+\beta+1}}{\alpha+\beta+1}$. Alors, $f_0\colon\left(x\mapsto\frac{x^{\alpha+\beta+1}}{\alpha+\beta+1}x^{-\alpha}\right)$ est une solution particulière de (E) sur I. Par conséquent, les solutions de (E) sur I sont toutes les fonctions de la forme $\begin{pmatrix} I\to\mathbb{R}\\ x\mapsto kx^{-\alpha}+\frac{x^{\beta+1}}{\alpha+\beta+1}\end{pmatrix}$ tel que $k\in\mathbb{R}$.

2^ème cas $\alpha+\beta=-1$. Prenons $k_0(x)=\ln(x)$. Alors, $f_0\colon(x\mapsto\ln(x)\,x^{-\alpha})$ est une solution particulière de (E) sur I. Par conséquent, les solutions de (E) sur I sont toutes les fonctions de la forme $\begin{pmatrix} I\to\mathbb{R}\\ x\mapsto kx^{-\alpha}+\ln(x)\,x^{-\alpha}\end{pmatrix}$ tel que $k\in\mathbb{R}$.

23. $sh(x)y'-ch(x)y=1$, $I=\mathbb{R}^{-*}$.

24. $(1+cos^2x)y'-sin(2x)y=cosx$, $I=\mathbb{R}$

25. $y'-\tan(x)\,y=cos^2(x)$, $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

26. $y'+y=\frac{1}{1+e^x}$, $I=\mathbb{R}$

27. $2xy'(x)+y(x)=x^n$, $I=\mathbb{R}^{+*}$ où $n\in\mathbb{N}$.

28. $e^{x^2}y'+xy=1$, $I=\mathbb{R}$

29. $x\ln(x)y'-y=\ln(x)$, $I=]0,1[$.

Ex 2 Résoudre les problèmes de Cauchy suivants sur l'intervalle I proposé

$(C_1)\begin{cases} I=]0,+\infty[\\ (2x+1)y'(x)+\frac{1}{x}y(x)=\frac{-(2x+1)^2}{x}\\ y(2)=1\end{cases}$ $\qquad$ $(C_2)\begin{cases} t\in\mathbb{R}\\ y'(t)+2ty(t)=te^{t^2}\\ y(0)=2\end{cases}$

$$(C_2)\colon\begin{cases} t\in\mathbb{R}\\ y'(t)+2ty(t)=te^{t^2}\ (E)\\ y(0)=2\end{cases}$$

<u>Résolution de (EH): $y'(t)+2ty(t)=0$</u>

Posons $a(t)=2t$. Alors $A\colon(t\mapsto t^2)$ est une primitive de a sur $\mathbb{R}$. Les solutions de (EH) sur I sont toutes les fonctions de la forme $\begin{pmatrix} I\to\mathbb{R}\\ t\mapsto ke^{-t^2}\end{pmatrix}$ $tq\ k\in\mathbb{R}$.

<u>Recherche d'une SP de (E) sur $\mathbb{R}$</u>: Je cherche une solution particulière de (E) sous la forme : $f(t)=k(t)e^{-t^2}$ où $k\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

f est solution de (E) sur $I \Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R}, [\,k'(t)e^{-t^2}-2tk(t)e^{-t^2}\,]+2tk(t)e^{-t^2}=te^{t^2} \Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R}, k'(t)=te^{2t^2}=\left(\frac{1}{4}\right)4te^{2t^2}$.

Prenons $k_0(x)=\frac{1}{4}e^{2t^2}$. Alors, $f_0\colon\left(x\mapsto\frac{1}{4}e^{t^2}.\right)$ est une solution particulière de (E) sur I. Par conséquent, les solutions de (E) sur I sont toutes les fonctions de la forme $\begin{pmatrix} \mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ t\mapsto ke^{-t^2}+\frac{1}{4}e^{t^2}\end{pmatrix}$ tel que $k\in\mathbb{R}$.

<u>Recherche de la solution du problème de Cauchy :</u> $ke^{-0^2}+\frac{1}{4}e^{0^2}=2\Leftrightarrow k=2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$. Donc $\begin{pmatrix} \mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ t\mapsto\frac{7}{4}e^{-t^2}+\frac{1}{4}e^{t^2}\end{pmatrix}$ est la solution de (C_2).

Ex 3 Des raccords Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$

1. $|x|y'+(x-1)y=x^3$
2. $xy'+y=\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$
3. $x^2(1+x)y'+y=x$
4. $(1-x)y'+y=\frac{x-1}{x}$ $sur\ \mathbb{R}^{+*}$
5. $(x+1)y'+(x+2)y=2x+4$
6. $(1-x^2)y'-xy=1$

Ex 4 Le but de cet exercice est de trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x\in\mathbb{R}, \int_0^x f(t)(2x-t)dt=\frac{x^2}{2}$.

A. Analyse : On suppose ici qu'il existe une fonction f solution de notre problème.
   1. Montrer que la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0 est solution d' une $edl1$.
   2. Déterminer les fonctions candidates solutions de notre problème.

B. Synthèse : Etudier les candidatures.

Ex 5 Soit l'$edl1$ $(E) : y'(x) + a(x)y(x) = d(x)$ où a et d sont continues sur $\mathbb{R}$. Démontrer que les **courbes intégrales** i.e. les courbes des solutions de (E) se s'interceptent jamais et que, toutes réunies , elles recouvrent entièrement le plan .

Ex 6 Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et $A \in \mathbb{R}^+$ tels que :$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(x) \leq A + \int_0^x f(t)g(t)dt$.
On note $\varphi(x) = A + \int_0^x f(t)g(t)dt$.

1) Justifier que φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall x \in \mathbb{R}^+, \varphi'(x) - \varphi(x)g(x) \leq 0$.
2) En utilisant l'idée de la MVC, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \varphi(x) \leq Ae^{\int_0^x g(t)dt}$.
3) Conclure que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) \leq Ae^{\int_0^x g(t)dt}$.

Ex 7 Soit $\omega > 0$. Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme dirigé selon l'axe (Oz) vérifie le système différentiel suivant : $\begin{cases} x''(t) = \omega y'(t) \\ y''(t) = -\omega x'(t) \\ z''(t) = 0 \end{cases}$. A l'instant $t = 0$, la particule se trouve en position à l'origine du repère. En considérant la fonction auxiliaire $u = x' + iy'$, trouver les expressions de x , y, et z en fonction de t .

II Equations différentielles linéaires d'ordre 2

Ex 8 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles ou problèmes de Cauchy suivants

1. $y'' - 2y' = 3x^2 + 2x + 1$
2. $y'' + y = \cos(x) + \sin(x)$
3. $y'' + y' + y = e^{-x}$
4. $4y'' - 4y' + y = (3x - 1)sh\left(\frac{x}{2}\right)$
5. $y'' + 4y' + 5y = 2 - (x + 1)sin(x)e^{-2x}$
6. $y'' + (3 - i)y' + (i + 8)y = 2 - ix$
7. $my'' + (m + 2)y' + 2y = 1 + x + e^{-x} + e^{3x}$
8. $y'' + 2y = |x| + 1$
9. $\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = (3x - 1)e^{-2x} \\ y(1) = 0 \text{ et } y'(1) = -1 \end{cases}$
10. $\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = 6x + sin^2(x) + ch(x) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$
11. $(1 + tan^2\frac{\alpha}{2})y'' + 4itan\frac{\alpha}{2}y' - 4y = i + 2$
où α paramètre réel tq $tan\frac{\alpha}{2}$ existe
12. $y'' + \omega y = x^2e^x$ où ω cste réelle .
13. $y'' + (2m + 1)y' + 2my = e^{-x}$ où m paramètre réel
14. $my'' - (m^2 + 1)y' + my = xe^{-x}$ où m paramètre rée

Ex 9 On donne l'équation différentielle $(E) : y'' + 2y' + y = f$ où y est la fonction inconnue et f est définie par

$$f(x) = 0 \text{ si } x \leq 0 \text{ et } f(x) = 1 - e^{-x} \text{ si } x > 0$$

1) Intégrer (E) sur chacun des intervalles $\mathbb{R}^{+*}$et $\mathbb{R}^{-*}$.
2) Soit $m \in \mathbb{R}$. Montrer que (E) a une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée y_m, telle que : $y_m(0) = 0$ et $y_m'(0) = m$ On déterminera y_m .

Ex 10 Changement de fonctions pour se ramener à une edl2 à coefficients constants : ces edl2 ne sont pas à coefficients constants donc le cours ne s'applique pas !!!! on va changer de de fonctions pour que la nouvelle fonction vérifie une edl2 à coefficients constants.

1. On va résoudre $(E): x^2y'' + 4xy' + 2y = \frac{2}{(1+x^2)^2}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ en posant $\theta(x) = x^2y(x)$.

- Montre que : y est solution de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$sietssi θ est solution d'une edl_2 à coefficients constants à déterminer.
- En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. Résoudre $(E): x^2y'' - 2xy' + (2 - x^2)y = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ en posant $y(x) = xz(x)$.
3. Résoudre$(E): x^3y'' = y - xy'$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ en posant $z(x) = y(x) - xy'(x)$.

1. Soit y une fonction de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Je pose $\theta(x) = x^2y(x)$. Alors θ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Et $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\theta'(x) = 2xy(x) + x^2y'(x)$ et $\theta''(x) = 2y(x) + 4xy'(x) + x^2y''(x)$.

Donc, y est solution de (E)sur $\mathbb{R}^{+*}$
<u>sietssi</u> $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $x^2y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = \frac{2}{(1+x^2)^2}$
<u>sietssi</u> $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\theta''(x) = \frac{2}{(1+x^2)^2}$

sietssi θ' est une primitive de g: $\left(x \mapsto \frac{2}{(1+x^2)^2}\right)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Or, g est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$donc le TFI assure que g admet des primitives sur cet intervalle. Déterminer une expression :

$$G(y) = \int_{.}^{y} \frac{2}{(1+x^2)^2} dx = 2\int_{.}^{y} \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2} dx = 2\int_{.}^{y} \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = 2Arctan(y) + cste - \int_{.}^{y} \underbrace{x}_{v(x)} \underbrace{\frac{2x}{(1+x^2)^2}}_{u'(x)} dx$$

$$G(y) \underbrace{=}_{IPP} 2Arctan(y) + cste - \left[\underbrace{x}_{v(x)} \underbrace{\frac{-1}{1+x^2}}_{u(x)}\right]_{.}^{y} + \int_{.}^{y} \underbrace{1}_{v'(x)} \underbrace{\frac{-1}{1+x^2}}_{u(x)} dx = Arctan(y) + \frac{y}{1+y^2} + cste.$$

Par suite,
y est solution de (E)sur $\mathbb{R}^{+*}$
sietssi il existe un réel c tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \theta'(x) = Arctan(x) + \frac{x}{1+x^2} + c$
sietssi θ est une primitive sur $\mathbb{R}^{+*}$, de h: $\left(x \mapsto Arctan(x) + \frac{x}{1+x^2} + c\right)$.
Or, h est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$donc le TFI assure que h admet des primitives sur cet intervalle. Déterminer une expression :

$$H(y) = \int_{.}^{y} \left[Arctan(x) + \frac{x}{1+x^2} + c\right] dx = \int_{.}^{y} 1.Arctan(x)dx + \int_{.}^{y} \frac{x}{1+x^2} dx + \int_{.}^{y} c dx$$

$$\underbrace{=}_{\substack{IPP \\ sur\ la\ première \\ intégrale}} [xArctan(x)]_0^y - \int_{.}^{y} \frac{x}{1+x^2} dx + \int_{.}^{y} \frac{x}{1+x^2} dx + cy + cste = yArctan(y) + cy + cste.$$

Ainsi, y est solution de (E)sur $\mathbb{R}^{+*}$
sietssi il existe deux réels c et d tels que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad x^2y(x) = \theta(x) = xArctan(x) + cx + d$
sietssi il existe deux réels c et d tels que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad y(x) = \frac{Arctan(x)}{x} + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2}$.

3. Résolvons $(E): x^3y'' = y - xy'$ *sur* $\mathbb{R}^{+*}$ en posant $z(x) = y(x) - xy'(x)$.

1. Soit y une fonction de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Je pose $z(x) = y(x) - xy'(x)$. Alors z est une fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Et $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \; z'(x) = y'(x) - y'(x) - xy''(x) = -xy''(x)$.

Donc y est solution de (E)sur $\mathbb{R}^{+*}$
sietssi $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \; x^3y'' = y - xy'$
sietssi $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \; x^2z'(x) = z(x)$
sietssi z est solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de l'*edlh₁* (E_1) : $x^2z' - z = 0$ *d'inconnue* z.

sur $\mathbb{R}^{+*}, (E_1)$ *s'écrit* : $z' - \frac{1}{x^2}z = 0$
Ici, $a(x) = -\frac{1}{x^2}$ *donc* A: $\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)$ *est une primitive de a sur* $\mathbb{R}^{+*}$. Donc,
$Sol(E_1) = \{(x \mapsto ke^{-\frac{1}{x}})/k \in \mathbb{R}\}$.

sietssi il existe k réel tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \; z(x) = ke^{-\frac{1}{x}}$.
sietssi il existe k réel tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \; y(x) - xy'(x) = ke^{-\frac{1}{x}}$.
sietssi y est solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de l'*edl₁* (E_2): $xy' - y = ke^{-\frac{1}{x}}$ *d'inconnue* y

sur $\mathbb{R}^{+*}, (E_2H)$ *s'écrit*: $y' - \frac{1}{x}y = 0$. $(x \mapsto x)$ est une solution évidente et non nulle de (E_2H).Donc, $Sol(E_2H) = (x \mapsto cx)/c \in \mathbb{R}\}$.
Cherchons une SP de (E_2) sous la forme $f(x) = c(x)x$ où c fonctino dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Alors f solution de $(E_2) \Leftrightarrow \forall x > 0, \; xf'(x) - f(x) = ke^{-\frac{1}{x}}$
$\Leftrightarrow \forall x > 0, \; x^2c'(x) = ke^{-\frac{1}{x}} \Leftrightarrow \forall x > 0, \; c'(x) = \frac{k}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \underbrace{=}_{u(x)=e^{-\frac{1}{x}}} ku'(x)e^{u(x)}$
$\Leftrightarrow$ *il existe un réel d tel que* $\forall x > 0, \; c(x) = ke^{-\frac{1}{x}} + d$

sietssi il existe deux réels k *et* d *tel que* $\forall x > 0, \; f(x) = kxe^{-\frac{1}{x}} + dx$

Ex 11 Méthode de variation de la constante (changement de fonctions particulier)

1. Soit $(E) : x(x+1)y'' + (x-2)y' - y = 0$. Vérifier que (E) admet une solution polynomiale φ **non nulle** puis résoudre (E) sur $]2;+\infty[$ en cherchant les solutions sous la forme $f(x) = k(x)\varphi(x) \; (Cf\ MVC)$.
2. Résoudre $(E) : xy'' + 2y' + xy = 0$ *sur* $I =]0,\pi[$ *en remarquant que* φ: $\left(x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}\right)$ est solution et en cherchant les autres solutions sous la forme $y(x) = \varphi(x)z(x)$.
3. Résoudre $(E) : y'' - 4y' + 4y = x^{2013}e^{2x}$ *en appliquant la même méthode que précédemment*.

1. Cherchons (tentons !!) φ sous la forme $\varphi(x) = ax + b$ tels que a et b réels. φ est alors deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
Alors, φ solution de $(E) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (x-2)a - (ax+b) = 0 \Leftarrow \; b = -2a$. Ainsi, φ: $(x \mapsto x - 2)$ est solution non nulle de (E) sur $\mathbb{R}$ donc sur $]2;+\infty[$. Sur $]2;+\infty[$, φ ne s'annule pas.
Soit f une fonction deux fois dérivable sur $]2;+\infty[$. Posons $\forall x > 2, k(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$. Alors k est deux fois dérivable sur $]2;+\infty[$ car f et φ le sont .
$\forall x \in]2;+\infty[, f(x) = k(x)\varphi(x) = k(x)(x-2)$
et $f'(x) = k'(x)\varphi(x) + k(x)\varphi'(x) = k'(x)(x-2) + k(x)$
et $f''(x) = k''(x)\varphi(x) + 2k'(x)\varphi'(x) + k(x)\varphi''(x) = k''(x)(x-2) + 2k'(x)$.
Alors, f est solution de (E) sur $]2;+\infty[\Leftrightarrow \forall x \in]2;+\infty[, \; x(x+1)f''(x) + (x-2)f'(x) - f(x) = 0$
$\Leftrightarrow \forall x \in]2;+\infty[, \; x(x+1)[k''(x)\varphi(x) + 2k'(x)\varphi'(x) + k(x)\varphi''(x)] + (x-2)[k'(x)\varphi(x) + k(x)\varphi'(x)] - k(x)\varphi(x) = 0$
$\Leftrightarrow \forall x \in]2;+\infty[, \; x(x+1)[k''(x)\varphi(x) + 2k'(x)\varphi'(x)] + (x-2)k'(x)\varphi(x) + k(x)\underbrace{[x(x+1)\varphi''(x) + (x-2)\varphi'(x)] - \varphi(x)]}_{=0\ car\ \varphi\ solution\ de\ (E^\circ} = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in]2;+\infty[,\ x(x+1)(x-2)k''(x) + [2\,x(x+1) + (x-2)^2\}k'(x) = 0$
$\Leftrightarrow k'\,est\ solution\ \ sur\ ]2;+\infty[$ de l'edl_1 : $x(x+1)(x-2)z' + (3x^2-2x+4)z = 0$

Posons $a(x) = \frac{(3x^2-2x+4)}{x(x+1)(x-2)}$. Décomposons a en éléments simples. Il existe trois réels U, V et W tels que $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1,2\}$, $a(x) = \frac{U}{x} + \frac{V}{x+1} + \frac{W}{x-2}$. Alors $U = \lim_{x\to 0} x\,a(x) = -2$ et $V = \lim_{x\to -1}(x+1)\,a(x) = 3\ et\ \lim_{x\to 2}(x-2)\,a(x) = 2$

Donc, $a(x) = \frac{-2}{x} + \frac{2}{(x-2)} + \frac{3}{(x+1)}$. Donc $A : (x \mapsto -2\ln(x) + 2\ln(x-2) + 3\ln(x+1))$ est une primitive de a sur $]2\,;+\infty[$ et $h(x) = e^{-A(x)} = e^{2\ln(x)-2\ln(x-2)-3\ln(x+1)} = \frac{x^2}{(x-2)^2(x+1)^3}$.

Donc,
f est solution de (E) sur $]2\,;+\infty[$
sietssi il existe un réel M tel que $\forall x \in]2\,;+\infty[, k'(x) = M\,\frac{x^2}{(x-2)^2(x+1)^3}$.
sietssi il existe un réel M tel que k est une primitive de Mh sur $]2\,;+\infty[$,

Déterminer les primitives de h sur $]2\,;+\infty[$. Pour cela décomposons h en éléments simples :
Il existe 5 réels $U, V, W\ Z\ et\ T$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1,2\}, h(x) = \frac{x^2}{(x-2)^2(x+1)^3} = \frac{U}{x-2} + \frac{V}{(x-2)^2} + \frac{W}{x+1} + \frac{Z}{(x+1)^2} + \frac{T}{(x+1)^3}$.
Alors

- $V = \lim_{x\to 2}(x-2)^2\,h(x) = \frac{4}{27}\ et\ T = \lim_{x\to -1}(x+1)^3\,h(x) = \frac{1}{9}$.
- $U + W = \lim_{x\to +\infty} x\,h(x) = 0$. Donc $W = -U$.
- $0 = h(0) = \frac{U}{-2} + \frac{V}{4} + W + Z + T$. Donc $-\frac{3}{2}U + \frac{1}{27} + Z + \frac{1}{9} = 0$. Donc $Z = \frac{3}{2}U - \frac{4}{27}$.
- $\frac{1}{8} = h(1) = -U + V + \frac{W}{2} + \frac{Z}{4} + \frac{T}{8}$. Donc, $\ U + \frac{U}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}U - \frac{4}{27}\right) = -\frac{1}{8} + \frac{4}{27} + \frac{1}{72}$.
  Donc $\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{8}\right)U = -\frac{1}{27} - \frac{1}{8} + \frac{4}{27} + \frac{1}{8\times 9} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8\times 9} = 0$. Donc $W = 0\ et\ Z = -\frac{4}{27}$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1,2\}, h(x) = \frac{x^2}{(x-2)^2(x+1)^3} = \frac{4}{27}\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{4}{27}\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{9}\frac{1}{(x+1)^3} = \frac{4}{27}(x-2)^{-2} - \frac{4}{27}(x+1)^{-2} + \frac{1}{9}(x+1)^{-3}$.
Donc H: $\left(x \mapsto \frac{-4}{27}(x-2)^{-1} + \frac{4}{27}(x+1)^{-1} - \frac{1}{18}(x+1)^{-2}\right)$ est une primitive de h sur $]2\,;+\infty[$.
Ainsi,
f est solution de (E) sur $]2;+\infty[$
sietssi il existe deux réels M et M' tel que: $\forall x \in]2\,;+\infty[, k(x) = M' + M[\frac{-4}{27}(x-2)^{-1} + \frac{4}{27}(x+1)^{-1} - \frac{1}{18}(x+1)^{-2}]$
sietssi il existe deux réels M et M' tel que: $\forall x \in]2\,;+\infty[, f(x) = M'(x-2) + M[\frac{-4}{27} + \frac{4}{27}\frac{(x-2)}{x+1} - \frac{1}{18}\frac{(x-2)}{(x+1)^2}]$

Ex 12 Changement de variables (et le changement de fonctions associé) pour se ramener à une edl2 à coefficients constants.
On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre suivante :

$$(E): (1+x^2)^2y'' + 2x(1+x^2)y' + y = 0\,.$$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont définies de la même façon que pour les équations différentielles linéaires rencontrées en cours .
Cette edl2 n'est pas a coefficients constants donc le cours ne s'applique pas ! On va effectuer un changement de variables et le changement de fonctions associé dans le but de se ramener à une edl2 a coefficients constants pour pouvoir appliquer le cours .

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On effectue le changement de variable: $t = \text{Arctan}\,(x)$ ie. $x = \tan\,(t)$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et le changement de fonction associé : on définit g telle que : $f(x) = g(t)$ ie .

$$\forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\ g(t) = f(\tan(t)) \qquad ie. \quad \forall x \in \mathbb{R}\,, f(x) = g(Arctan(x))\ .$$

1. Déterminer les expressions de $g'(t) et\ g''(t)$ en fonction de f , f' , f'' et $\tan(t)$. .
2. Montrer que : f est solution de (E) **si et seulement** si g est solution de (E_1): $z'' + z = 0$
3. En déduire les solutions (E) .

Ex 12 D'autres équations avec d'autres changements de variables

1. Résoudre (E):$t^2y''(t) + ty'(t) - y(t) = t^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. On effectuera le changement de variable $s = \ln(t)$.
2. Résoudre (E): $(1+x^2)^2y'' + 2x(1+x^2)y' + y = 0\ \ sur\ \mathbb{R}\ \ \ et\ en\ posant\ x = \tan(t)$.
3. Résoudre (E): $x^4y'' + 2x^3y' - y = e^{\frac{1}{x}}\ \ sur\ \mathbb{R}^{+*}\ et\ en\ posant\ t = \frac{1}{x}$.

Ex 13

1. Soit $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $(E_1) : cos(t)z''(t) - 2sin(t)z'(t) - cos(t)z(t) = 0$. Résoudre (E_1)sur I en effectuant le changement de fonction $\varphi(t) = cos(t)z(t)$.
2. Soit $J =]-1,1[$ et (E_2): $(1-x^2)y''(x) - 3xy'(x) - y(x) = 0$. Résoudre (E_2)sur J en effectuant le changement de variable $x = sin(t)$.

Ex 14 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que : pour tout $x\in\mathbb{R}$,$f(x) = 1 - \int_0^x (x-t)f(t)dt$.
Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie une edl à coefficients constants. En déduire que $f = cos$.

Ex 15 Trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel x , $f'(x) - f(x) = e^x \int_0^1 f(t)dt$.

Ex 16 Trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que : $f'(x) = f(\pi - x)$.

Ex 17 Trouver toutes les fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que : pour tous réels $x \; et \; y$,
$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$.

Ex 18 Trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x f(t)dt = f'(x) + 1$.

Ex 19 1) Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$, (E): $4x^2y'' + y = 0$ en effectuant le changement de variable $t = \ln(x)$.

2) Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$ et telles que $\forall x > 0, f'(x) = f\left(\frac{1}{4x}\right)$.

Ex 20 Trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$.

Ex 21 1) Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$, l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$.
2) Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle : $y''' + y'' + y' + y = 1$.