

Dérivées d'ordre supérieur.

Comparaison de fonctions et développements limités.

K désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} . D est un sous-ensemble de \mathbb{R} . I est un intervalle de \mathbb{R} .

I Dérivées d'ordre supérieur.

1. Définitions et notations

Définition : Soit f une fonction de \mathbb{R} dans K définie sur un sous-ensemble D de \mathbb{R} . Soit a un point non isolé de D .

- Par convention, $f^{(0)}(a) = f(a)$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. f est k -fois dérivable en a lorsque $f, f', f'', \dots, f^{(k-2)}$ sont dérivables en a et sur un voisinage de a dans D et $f^{(k-1)}$ est dérivable en a . Alors par définition, la dérivée k -ième de f en a est : $f^{(k)}(a) = (f^{(k-1)})'(a)$.

Par convention, $f^{(0)} = f$ fonction dérivée 0-ième de f .
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. f est k -fois dérivable sur D lorsque f est $(k-1)$ -fois dérivable sur D et $f^{(k-1)}$ est dérivable sur D . Alors par définition, la fonction dérivée k -ième de f est : $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$.

- f est de classe C^k sur D lorsque f est k -fois dérivable sur D et $f^{(k)}$ est continue sur D .
- f est infiniment dérivable ou de classe C^∞ sur D lorsque pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, f est k -fois dérivable sur D .
- $D^k(D, K)$ est l'ensemble des fonctions k -fois dérivables sur D et à valeurs dans K .
- $C^0(D, K)$ est l'ensemble des fonctions continues sur D et à valeurs dans K .
- $C^k(D, K)$ est l'ensemble des fonctions de classe C^k sur D et à valeurs dans K .
- $C^\infty(D, K)$ est l'ensemble des fonctions *infiniment* dérivables sur D et à valeurs dans K .

Conséquence : Si f est à valeurs complexes, alors f est k -fois dérivable sur D si et ssi $Re(f)$ et $Im(f)$ le sont. Et dans ce cas, $Re(f^{(k)}) = (Re(f))^{(k)}$ et $Im(f^{(k)}) = (Im(f))^{(k)}$.

Remarque : Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $k \geq 2$. $D^{k+1}(D, K) \subsetneq C^k(D, K) \subsetneq D^k(D, K)$ et $D^2(D, K) \subsetneq C^1(D, K) \subsetneq D^1(D, K) \subsetneq C^0(D, K) \subsetneq F(D, K)$. Ces inclusions sont strictes.

Prop : si f est paire et de classe C^∞ sur I alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^{(2k+1)}$ est impaire et $f^{(2k)}$ est paire.
si f est impaire et de classe C^∞ sur I alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^{(2k+1)}$ est paire et $f^{(2k)}$ est impaire.

2. Exemples de référence

Prop Dérivées successives des fonctions usuelles ♥♥♥: Les fonctions inverse, logarithme, exponentielle, puissances, sinus et cosinus sont infiniment dérivables sur leur domaine de définition respectif. **Soit $k \in \mathbb{N}$.**

- $\forall x \in \mathbb{R}, \exp^{(k)}(x) = e^x$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^{k/2} \sin(x) & \text{si } k \text{ pair} \\ (-1)^{(k-1)/2} \cos(x) & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^{k/2} \cos(x) & \text{si } k \text{ pair} \\ (-1)^{(k+1)/2} \sin(x) & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}^{(k)}(x) = \begin{cases} \operatorname{sh}(x) & \text{si } k \text{ pair} \\ \operatorname{ch}(x) & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$ et $\operatorname{ch}^{(k)}(x) = \begin{cases} \operatorname{ch}(x) & \text{si } k \text{ pair} \\ \operatorname{sh}(x) & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$
- Soit q un entier naturel et $f_q: (x \mapsto x^q)$. Alors, $\forall x \in \mathbb{R}, f_q^{(k)}(x) = \begin{cases} \frac{q!}{(q-k)!} x^{q-k} & \text{si } k \in \llbracket 0, q \rrbracket \\ 0 & \text{si } k > q. \end{cases}$
- Soit $f: (x \mapsto \frac{1}{x})$. Si $k \in \mathbb{N}^*$ alors $\forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$.
- Si $k \in \mathbb{N}^*$ alors $\forall x \in \mathbb{R}^+, \ln^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k}$
- Soit α un réel tq $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $f_\alpha: (x \mapsto x^\alpha)$. Si $k \in \mathbb{N}^*$ alors, $\forall x \in \mathbb{R}^+, f_\alpha^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-n+1)x^{\alpha-k}$.

3. Opérations sur les fonctions n -fois dérivables

Prop Dérivées successives d'une somme et d'un produit -FORMULE DE LEIBNIZ
Soient f, g des fonctions définies sur D et α, β deux constantes et n un entier naturel.
Si f, g sont n -fois dérivables (resp. de classe C^n) sur D alors $\alpha f + \beta g$ et $f g$ sont n -fois dérivables (resp. de classe C^n) sur D et

$$(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)} \quad \text{et} \quad (f g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \quad (\text{Leibniz}) \quad \heartsuit \heartsuit \heartsuit$$

Généralisation : Soient f_1, f_2, \dots, f_p des fonctions définies sur D et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ des constantes. Si f_1, f_2, \dots, f_p sont n -fois dérivables sur D alors $\sum_{k=1}^p \alpha_k f_k$ et $\prod_{k=1}^p f_k$ sont n -fois dérivables sur D et $(\sum_{k=1}^p \alpha_k f_k)^{(n)} = \sum_{k=1}^p \alpha_k f_k^{(n)}$.
⚠ pas de formule générale pour le produit de p fonctions sauf pour $n = 1$: $(\prod_{k=1}^p f_k)' = \sum_{j=1}^p f_j' (\prod_{k \neq j} f_k)$.

8

Dérivées successives des fonctions polynomiales : Toute fonction polynomiale est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

$$\text{Si } \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{q=0}^n a_q x^q \text{ alors } \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, P^{(k)}(x) = \begin{cases} \sum_{q=k}^n a_q \frac{q!}{(q-k)!} x^{q-k} & \text{si } k \leq \deg(P) \\ 0 & \text{si } k > \deg(P) \end{cases}$$

9

Prop. : Dérivabilité d'ordre supérieur d'un quotient. Soient f, g des fonctions définies sur D et n un entier naturel.

Si f, g sont n -fois dérivables (resp. de classe C^n) sur D et g ne s'annule pas sur D alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont n -fois dérivables (resp. de classe C^n) sur D . **⚠ pas de formule générale pour $\left(\frac{1}{g}\right)^{(k)}$ et $\left(\frac{f}{g}\right)^{(k)}$**

10

Prop. : Dérivées successives d'une composée Soient f, g des fonctions définies sur resp. I et J et n un entier naturel.

Si f et g sont n -fois dérivables (resp. de classe C^n) sur resp. I et J et $\forall x \in I, f(x) \in J$ alors $g \circ f$ est n -fois dérivable (resp. de classe C^n) sur I . **⚠ pas de formule générale pour $(g \circ f)^{(n)}$.**

11

Cas particulier : Si f est k -fois dérivable sur D_f et a et b deux constantes réelles alors $g: (x \mapsto f(ax+b))$ est k -fois dérivable sur D_g et $\forall x \in \mathbb{R}, g^{(k)}(x) = a^k f^{(k)}(ax+b)$.

12

Exemples à connaître : $f: (x \mapsto \ln(1+x))$ est de classe C^∞ sur $]-1, +\infty[$ et $\forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in D, f^{(m)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$.

$g: (x \mapsto \frac{1}{x-a})$ est de classe C^∞ sur $D = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ et $\forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in D, g^{(m)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(x-a)^{k+1}}$.

13

BILAN : Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ toute fonction constituée uniquement de fonctions de classe C^k (resp. k -fois dérivables) sur leur domaine de définition respectifs est de classe C^k (resp. k -fois dérivables) sur son domaine de définition.

14

Exemples : 1) Dérivées successives de $\varphi(x) = e^x (3x^2 - 2x + 5)$. φ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} car P et \exp le sont et $\forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in D,$

$$\varphi^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \underbrace{P^{(k)}(x)}_{=0 \text{ si } k \geq 2} \exp^{(m-k)}(x) = \binom{m}{0} P(x) e^x + \binom{m}{1} P'(x) e^x + \binom{m}{2} P''(x) e^x + \underbrace{\binom{m}{3} P'''(x) e^x + \dots + \binom{m}{m} P^{(m)}(x) e^x}_{=0}$$

Donc, si $m \geq 2$, alors $\varphi^{(m)}(x) = (3x^2 - 2x + 5)e^x + m(6x - 2)e^x + \frac{m(m-1)}{2} 6e^x$

le. $\varphi^{(m)}(x) = (3x^2 + (6m-2)x + 5 - 2m + 3m(m-1))e^x$ (formule encore valable pour $m \in \{0,1\}$... à vérifier).

2) Dérivées successives de $\varphi: (x \mapsto \sin(x)e^{ix})$. $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \text{Im}(e^{ix}e^x) = \text{Im}\left(\frac{e^{(1+i)x}}{g(x)}\right)$. D'après ce qui précède, g est C^∞ sur \mathbb{R}

et $\forall x \in \mathbb{R}, g^{(k)}(x) = (1+i)^k e^{(1+i)x} = \sqrt{2}^k e^{ik\frac{\pi}{4}} e^{(1+i)x} = \sqrt{2}^k e^{i(k\frac{\pi}{4}+x)}$. Donc, φ est de classe C^∞ sur \mathbb{R}

et $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi^{(k)}(x) = \text{Im}\left(g^{(k)}(x)\right) = \sqrt{2}^k e^x \sin\left(x + k\frac{\pi}{4}\right)$.

3) Dérivées successives de $f: (x \mapsto \frac{x}{(x-2)(x+3)})$. Je décompose f en éléments simples et je dérive chaque élément simple. Ici, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{2, -3\}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2, -3\}, f(x) = \frac{x}{(x-2)(x+3)} = \frac{1}{5} \left(\frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+3} \right)$. Donc $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2, -3\}, f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{5} \left(\frac{2}{(x-2)^{k+1}} + \frac{3}{(x+3)^{k+1}} \right)$.

Dérivée nième de $f(x) = \frac{x^2+1}{1-5x}$.

$Df = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{5} \right\}$. f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{5} \right\}$ car f est constituée de fonctions de classe C^∞ sur leur propre domaine de définition.

Division euclidienne : je fais la division euclidienne de $x^2 + 1$ par $1 - 5x$: $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = (1 - 5x) \left(-\frac{1}{5}x - \frac{1}{25} \right) + \frac{26}{25}$

$$\text{Réécriture de } f(x): \forall x \in Df, f(x) = \frac{x^2+1}{1-5x} = \frac{(1-5x)\left(-\frac{1}{5}x - \frac{1}{25}\right) + \frac{26}{25}}{1-5x} = \underbrace{-\frac{1}{5}x - \frac{1}{25}}_{P(x)} + \frac{26}{25} \underbrace{\left(\frac{1}{1-5x}\right)}_{Q(x)}$$

Comme P et Q sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{5} \right\}$, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in Df, f^{(n)}(x) = P^{(n)}(x) + \frac{26}{25} Q^{(n)}(x)$. Or, $P'(x) = -\frac{1}{5}$ et $\forall n \geq 2, P^{(n)}(x) = \frac{26}{25}$

$$\text{Et, } Q(x) = u(1-5x) \text{ avec } u(t) = \frac{1}{t} \text{ donc } Q^{(n)}(x) = (-5)^n u^{(n)}(1-5x) \stackrel{\text{le cours assure que}}{=} \frac{(-5)^n (-1)^n n!}{(1-5x)^{n+1}} \\ u^{(n)}(t) = \frac{(-1)^n n!}{t^{n+1}}$$

$$\forall x \in Df, f^{(n)}(x) = -\frac{1}{5} + \frac{26}{25} \frac{5}{(1-5x)^2} \text{ et } \forall n \geq 2, f^{(n)}(x) = \frac{26(-5)^n (-1)^n n!}{25(1-5x)^{n+1}}$$

4) Classe C^∞ d'une solution d'edl. Considérons l'edl2 suivante $(E): (1+x^2)y''(x) + 4xy'(x) - y(x) = e^{3x}$.

Soit f une solution de (E) sur \mathbb{R} . Montrons que f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et cherchons une relation entre les dérivées successives de f .

Alors f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \frac{1}{1+x^2} (-4xf'(x) + f(x) + e^{3x})$.

Initialisation : f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} .

Propagation : supposons que f soit n -fois dérivable sur \mathbb{R} où n entier naturel fixé et $n \geq 2$. On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \frac{1}{1+x^2} (-4xf'(x) + f(x) + e^{3x})$. Alors j'en déduis que f''' est $n-1$ fois dérivable sur \mathbb{R} (puisque f, f' et les autres fonctions le sont) donc f est $n+1$ fois dérivable sur \mathbb{R} . CQFD.

J'en conclus que f est infiniment dérivable sur \mathbb{R} . Et par conséquent, $\alpha: (x \mapsto (1+x^2)f''(x))$ et $\beta: (x \mapsto 4xf'(x))$ le sont aussi. Or, γ et f le sont aussi. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}, \underbrace{(1+x^2)f''(x)}_{\alpha(x)} + \underbrace{4xf'(x)}_{\beta(x)} - f(x) = \underbrace{e^{3x}}_{\gamma(x)}$. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \alpha^{(n)}(x) + \beta^{(n)}(x) - f^{(n)}(x) = \gamma^{(n)}(x)$.

Or, $\alpha^{(n)}(x) = (1+x^2)f^{(n+2)}(x) + 2nx f^{(n+1)}(x) + n(n-1)f^{(n)}(x)$ et $\beta^{(n)}(x) = 4xf^{(n+1)}(x) + 4nf^{(n)}(x)$ et $\gamma^{(n)}(x) = 3^n e^{3x}$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, (1+x^2)f^{(n+2)}(x) + 2nx f^{(n+1)}(x) + n(n-1)f^{(n)}(x) + 4xf^{(n+1)}(x) + 4nf^{(n)}(x) - f^{(n)}(x) = 3^n e^{3x}$.

C'est à dire : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, (1+x^2)f^{(n+2)}(x) + (2n+4)xf^{(n+1)}(x) + (n^2+3n-1)f^{(n)}(x) = 3^n e^{3x}$.

15 **Méthode : Soit f une fonction dont je connais une expression .**

- 1) Pour prouver que f est k -fois dérivable ou de classe C^k , on applique les théorèmes précédents .
- 2) Pour trouver l'expression de $f^{(k)}$, on peut :
 - a) Calculer les premières dérivées et en conjecturer la forme de $f^{(k)}$ à démontrer par récurrence .
 - b) Reconnaître l'une des formes précédentes : $\sin(px)e^{mx}$, $\varphi(ax+b)$, $\frac{ux+v}{(x-a)(x-b)}$ et appliquer les méthodes indiquées .
 - c) Si $f = uv$, appliquer Leibniz si je connais les dérivées successives de u et de v .

16 **Théorème admis Classe $C^{n(\infty)}$ d' une bijection réciproque** Si $n \in \mathbb{N}^*$ et f est strictement monotone et de classe $C^{n(\infty)}$ sur l'intervalle I et $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$ alors f est bijective de I sur l'intervalle $f(I)$ et f^{-1} est de classe $C^{n(\infty)}$ sur $f(I)$.

17 **Classe $C^{n(\infty)}$ des réciproques usuelles :** Les fonctions *Arcsin*, *Arccos* et *Arctan* sont infiniment dérivables sur leur domaine de dérivation respectif.

18 **Critère de Classe $C^{n(\infty)}$** Soit I un intervalle et $a \in I$. et $\forall x \in I, f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in I \setminus \{a\} \\ L_0 & \text{si } x = a \end{cases}$.

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si g est de classe C^n sur $I \setminus \{a\}$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_0$ et $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lim_{x \rightarrow a} g^{(k)}(x) = L_k$ existe et est finie alors f est de classe C^n sur l'intervalle I et $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall x \in I, f^{(k)}(x) = \begin{cases} g^{(k)}(x) & \text{si } x \neq a \\ L_k & \text{si } x = a \end{cases}$.
- 2) Si g est de classe C^∞ sur $I \setminus \{a\}$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_0$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \rightarrow a} g^{(k)}(x)$ existe et est finie et alors f est de classe C^∞ sur l'intervalle I et $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in I, f^{(k)}(x) = \begin{cases} g^{(k)}(x) & \text{si } x \neq a \\ L_k & \text{si } x = a \end{cases}$.

Rappel : Si f est continue sur I et dérivable au moins sur $I \setminus \{a\}$ et $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \ell$ alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$.

19 **Exemple CLASSIQUE mais pas simple :** Montrons que la fonction $f: \left(x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}\right)$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale P_n telle que : $f^{(n)}: \left(x \mapsto \begin{cases} P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}\right)$.

A. Posons $g(x) = e^{-1/x^2}$. g est la composée de l'exp de classe C^∞ sur \mathbb{R} et de $h: \left(x \mapsto \frac{1}{x^2}\right)$ de classe C^∞ sur \mathbb{R}^* . Donc, g est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^* . Ainsi, f l'est aussi et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x)$.

B. Montrons $H(n)$: " il existe une fonction polynomiale P_n tq : $\forall x \in \mathbb{R}^*, g^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$ " par récurrence sur n

Initialisation : $\forall x \in \mathbb{R}^*, g(x) = 1 \times e^{-1/x^2}$ donc $P_n(t)=1$ convient .

Propagation : Soit n un entier naturel . Je suppose $H(n)$ vraie . Alors il existe une fonction polynomiale P_n telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, g^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$. Donc, $\forall x \in \mathbb{R}^*, g^{(n+1)}(x) = -\frac{1}{x^2}P_n'\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} + P_n\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{2}{x^3}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} = \left[-\frac{1}{x^2}P_n'\left(\frac{1}{x}\right) + P_n\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{2}{x^3}\right)\right]e^{-\frac{1}{x^2}}$

$g^{(n+1)}(x) \stackrel{CC}{=} \left[-t^2P_n'(t) + 2t^3P_n(t)\right]e^{-t^2}$. Posons $P_{n+1}(t) = -t^2P_n'(t) + 2t^3P_n(t)$. Alors P_{n+1} est polynomiale et $\forall x \in \mathbb{R}^*, g^{(n+1)}(x) = \stackrel{t=\frac{1}{x}}{=} P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$. Donc $H(n+1)$ vraie dès que $H(n)$ vraie .

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, H(n)$ est vraie .

Montrons que f est infiniment dérivable en 0 . Soit n un entier naturel . $\forall x > 0, g^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} \stackrel{CC}{=} P_n(\sqrt{u})e^{-u}$. Or , $u = \frac{1}{x^2}$

$\lim_{u \rightarrow +\infty} u^{k/2} e^{-u} \stackrel{CC}{=} 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$. Donc par composition, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^k} e^{-\frac{1}{x^2}} \stackrel{CC}{=} 0$ et ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0^+} P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$. (autre démon : $\frac{1}{x^k} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{\ln\left(\frac{1}{x^k}\right) - \frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{x^2}(1-kx^2\ln(x))}$. Or, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(x) \stackrel{CC}{=} 0$. Donc, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^k} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$.)

De même, $\forall x < 0, g^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} \stackrel{CC}{=} P_n(-\sqrt{u})e^{-u}$. Or, $\lim_{u \rightarrow +\infty} (-1)^k u^{\frac{k}{2}} e^{-u} \stackrel{CC}{=} 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$. Donc par composition,

$\lim_{x \rightarrow 0^+} (-1)^k \frac{1}{x^k} e^{-\frac{1}{x^2}} \stackrel{CC}{=} 0$ et ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0^-} P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0} g^{(n)}(x) = 0$.
Je conclus par le critère C^∞ , que f est infiniment dérivable en 0 et $f^{(n)}(0) = 0$.

II Comparaison des fonctions au voisinage d'un point ou d'un infini.

Soit I intervalle non réduit à un point et f une fonction réelle définie au moins sur I et a un élément ou bord de I réel ou infini.

20 **Rappels :** On dit que f vérifie une propriété au voisinage de a ou sur un voisinage de a lorsque cette propriété est vraie sur

- Un intervalle ouvert contenant a et inclus dans I si a est réel .
- $]M, +\infty[$ inclus dans I tq $M \in \mathbb{R}$ si $a = +\infty$
- $]-\infty, M[$ inclus dans I tq $M \in \mathbb{R}$ si $a = -\infty$.

Propriétés : si f est bornée au voisinage de a et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$.

Théorème admis pour le moment :

1. Si f a une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a . En particulier, toute fonction continue en un réel a est bornée sur un voisinage de a .
2. Si f a une limite strictement positive (resp. nég.) en a alors f est strictement positive (resp. nég.) sur un voisinage de a .

1. Définition et premières propriétés

Définition Soit f et g deux fonctions réelles définies sur un même voisinage V de a (mais pas forcément en a).

1. On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a lorsqu'il existe une application ε définie au voisinage de a telle que : $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ et pour x au voisinage de a , $f(x) = g(x) \times \varepsilon(x)$. On note alors $f(x) = o_a(g(x))$ ou $f = o_a(g)$ ou $f \ll_a g$

2. On dit que f est équivalente à g au voisinage de a lorsqu'il existe une application φ définie au voisinage de a telle que : $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 1$ et pour x au voisinage de a , $f(x) = g(x) \times \varphi(x)$. On note alors $f \sim_a g$ ou $f(x) \sim_a g(x)$.

NB : Si $f \sim_a g$ alors $g \sim_a f$ et on dit que f et g sont équivalentes au voisinage de a .

3. On dit que f est dominée par g au voisinage de a lorsqu'il existe une application b définie au voisinage de a telle que : pour x au voisinage de a , $f(x) = g(x)b(x)$ et b bornée au voisinage de a . On note alors $f(x) = O_a(g(x))$ ou $f = O_a(g)$.
Autrement dit $f = O_a(g) \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in V, |f(x)| \leq M|g(x)|$.

Exemple : $\sin(x)e^x \sim_0 \sin(x)$ et $\sin(x)e^x = o_{-\infty}(\sin(x))$ et $\sin(x)e^x = O_{+\infty}(e^x)$

Caractérisation ♥♥: Soit f et g deux fonctions réelles définies sur un même voisinage de a . On suppose ici que g ne s'annule pas au voisinage de a sauf éventuellement en a . Alors,

1. $f = o_a(g) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

2. $f \sim_a g \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

3. $f = O_a(g) \Leftrightarrow \frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a .

⚠ $f \sim_a g \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x) = 0$.

Ex : ■ $\frac{1}{x} \sim_{+\infty} \frac{2}{x}$ mais $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - \frac{2}{x} = 0$.

■ $x^2 \sim_{+\infty} x^2 - x$ mais $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - (x^2 - x) \neq 0$.

Exemple : $ch(x) \sim_{+\infty} sh(x) \sim_{+\infty} \frac{e^x}{2}$ et $Arctan(t) \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2}$

Application : On suppose que φ ne s'annule pas au vois. de a sauf éventuellement en a et de signe constant au vois. de a .

1. Si au voisinage de a , $f \leq g \leq h$ et $f \sim_a \varphi$ et $h \sim_a \varphi$ alors $g \sim_a \varphi$.
2. Si au voisinage de a , $f \leq g \leq h$ et $f = o_a(\varphi)$ et $h = o_a(\varphi)$ et alors $g = o_a(\varphi)$.

THEO ♥♥♥

1. $f = o_a(0) = O_a(0) \sim_a 0 =$ une fonction nulle sur tout un voisinage de a
2. $o_a(1)$ symbolise une fonction qui tend vers 0 en a .
3. Autre écriture d'une fonction négligeable : $o_a(g) = g \times o_a(1)$
4. Autre écriture d'un équivalent : $f \sim_a g \Leftrightarrow f = g + o_a(g) \Leftrightarrow f = g + g o_a(1)$.

⚠ Donc, cela n'arrive presque jamais !!!!!

THEO ♥♥♥: équivalent et limite /signe

1. Si $f \sim_a g$ alors f et g sont de même signe strict au voisinage de a .
2. Si $f \sim_a g$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ (L finie ou infinie) alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$
3. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ tel que L réel non nul alors $f(x) \sim_a L$.
4. Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$ alors $f(x) - f(a) \sim_a f'(a)(x - a)$.

2. Exemples

a. Fonctions puissances:

Soit α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$. Alors

1. $x^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta)$
2. $x^\beta = o_0(x^\alpha)$
3. $(x - a)^\beta = o_a((x - a)^\alpha)$ où $a \in \mathbb{R}$

b. Fonctions polynomiales

Si $P(x) = a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \dots + a_n x^n$ où $n > p$ et $a_n \neq 0$ et $a_p \neq 0$ alors $P(x) \sim_{+\infty} a_n x^n$ et $P(x) \sim_0 a_p x^p$.

c. Croissances comparées Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ et $a \in]1, +\infty[$

$(\ln(x))^\beta = o_{+\infty}(x^\alpha)$ $|\ln(x)|^\beta = o_0\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ $a^x = o_{-\infty}\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right)$

d. Equivalent usuels ♥♥♥: Soit α un réel non nul.

$e^x - 1 \sim_0 x$	$\tan(x) \sim_0 x$	$(1 + x)^\alpha - 1 \sim_0 \alpha x$	$\cos(x) - 1 \sim_0 -\frac{1}{2} x^2$
$\ln(1 + x) \sim_0 x$	$sh(x) \sim_0 x$	$ch(x) - 1 \sim_0 \frac{1}{2} x^2$	
$\ln(y) \sim_1 y - 1$	$Arctan(x) \sim_0 x$		
$\sin(x) \sim_0 x$	$Arcsin(x) \sim_0 x$		

3. Comparaison

Théorème DE COMPARAISON ♥♥:

1. Si $f \sim_a g$ et $g \sim_a h$ alors $f \sim_a h$.
2. Si $f \sim_a g$ ou $f = o_a(g)$ alors $f = O_a(g)$.
3. Si $h = o_a(g)$ et $g = O_a(f)$ alors $h = o_a(f)$. Donc, Si $h = o_a(g)$ et $(g = o_a(f) \text{ ou } g \sim_a f)$ alors $h = o_a(f)$.
4. Si $f = O_a(g)$ et $g = o_a(h)$ alors $f = o_a(h)$. Donc, Si $(f = o_a(g) \text{ ou } f \sim_a g)$ et $g = o_a(h)$ alors $f = o_a(h)$.
5. Si $f = O_a(g)$ et $g = O_a(h)$ alors $f = O_a(h)$.
6. Si $f \sim_a g$ et $u \sim_a v$ et $v = o_a(g)$ (resp. $v = O_a(g)$) alors $u = o_a(f)$ (resp. $u = O_a(f)$)
7. Si f est bornée au voisinage de a (en particulier si f a une limite finie en a) et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ alors $f = o_a(g)$.
8. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe et est non nulle et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ alors $g = o_a(f)$.

4. Opérations

Théorème d'OPÉRATIONS 1 ♥♥:

1. $o_a(g) + o_a(g) = o_a(g)$ et pour tout réel β non-nul, $\beta o_a(g) = o_a(g) = o_a(\beta g)$ et $o_a(fg) = f o_a(g)$.
2. $O_a(g) + O_a(g) = O_a(g)$ et pour tout réel β non nul, $\beta O_a(g) = O_a(g) = O_a(\beta g)$.
3. $g + o_a(g) \sim_a g$. Autrement dit, Si $h = o_a(g)$ alors $g + h \sim_a g$

Dans la recherche d'équivalent :
Produit, quotient, inverse, puissance indépendante de x , composition à droite d'équivalents sont autorisés.

Théorème d'OPÉRATIONS 2 ♥♥:

4. Si $f \sim_a g$ et $u \sim_a v$ alors $f \times u \sim_a g \times v$. En particulier, Si $f \sim_a g$ alors $fu \sim_a gv$.
5. Si $f \sim_a g$ et $u \sim_a v$ et u ne s'annule pas au voisinage de a , alors $\frac{f}{u} \sim_a \frac{g}{v}$ et $\frac{1}{u} \sim_a \frac{1}{v}$.
6. Si α est une constante réelle (indépendante de la variable x) et $f(x) \sim_a g(x)$ et f^α est définie au voisinage de a (pas forcément en a), alors $(f(x))^\alpha \sim_a (g(x))^\alpha$.
7. Si $f(t) \sim_{t \rightarrow a} g(t)$ et $\lim_{x \rightarrow b} u(x) = a$ alors $f(u(x)) \sim_{x \rightarrow b} g(u(x))$ (composition à droite ou changement de variable)

ATTENTION, ON NE SOMME PAS ET ON NE COMPOSE PAS A GAUCHE LES EQUIVALENTS. SI LA PUISSANCE α DEPEND DE x ALORS LA PROPRIETE 6. NE S'APPLIQUE PAS

Dans la recherche d'équivalent, il est interdit de sommer $f(x) \sim_a g(x) \not\Rightarrow u(x) + f(x) \sim_a u(x) + g(x)$ de composer à gauche... $f(x) \sim_a g(x) \not\Rightarrow u(f(x)) \sim_a u(g(x))$ ni de mettre à une puissance qui « bouge » $f(x) \sim_a g(x) \not\Rightarrow f(x)^{u(x)} \sim_a g(x)^{u(x)}$

Contre-exemples :

1. $x^2 + x \sim_0 x$ et $-x \sim_0 -x + x^3$ mais $x^2 + x^3$ n'est pas équivalent au voisinage de 0 à x^3 .
2. $x^2 + x \sim_{+\infty} x^2$ mais e^{x^2+x} n'est pas équivalent à e^{x^2} au voisinage de $+\infty$.
3. $1 + x \sim_0 1$ et $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} e$ donc $(1+x)^{\frac{1}{x}} \sim_0 e$ mais $1^{\frac{1}{x}} = 1 \sim_0 1$.

Exemples et techniques :

- 1) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $e^{-\frac{1}{x^2}} = o_0(x^k)$. **Par limite du quotient**
- 2) Montrer que $\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt = o_{+\infty}(x^2)$. **Par encadrement**
- 3) Soit $f: (x \mapsto \frac{\text{Arccos}(x)\sin^2(x)}{3\sqrt{\text{ch}(x)-1}})$. Cherchons un équivalent puis la limite de f en 0.
- 4) Soit $f: (x \mapsto \frac{\sqrt{x-2} + \text{Arctan}(x^2)}{3\text{ch}(x) - \ln^{2024}(x)})$. Cherchons un équivalent puis la limite de f en $+\infty$.
- 5) Soit $f: (x \mapsto \sqrt{x^3+1} - \sqrt[3]{x^2-1} + \sin(x))$. Cherchons un équivalent puis la limite de f en $+\infty$.
- 6) Soit $f: (x \mapsto \sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^3-2})$. Cherchons un équivalent puis la limite de f en $+\infty$.
- 7) Soit $f: (x \mapsto \ln(\cos(x)))$. Cherchons un équivalent de f en 0.
- 8) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^x - x}{\ln(1+\sqrt{x^2-1})}$.
- 9) Soit $f: (x \mapsto \text{Arcsin}(\pi \sin(x)))$. Cherchons un équivalent de f au voisinage de 0.
- 10) Soit $h: (x \mapsto \ln(-2x + \sqrt{x} + \text{Arctan}(x)))$. Cherchons un équivalent de f en 0
- 11) Soit $f: (x \mapsto e^{x^2-1-\frac{1}{x}+\ln(x)})$. Cherchons un équivalent puis la limite de f en $+\infty$.
- 12) Soit $f: x \mapsto (1 - \tan(x))^{\frac{1}{x}}$. Cherchons un équivalent puis la limite de f en 0.
- 13) Soit $f: x \mapsto (sh(x))^{\sin(x)}$. Cherchons un équivalent puis la limite de f en 0.
- 14) Soit $f: \mathbb{R}^{++} \rightarrow \mathbb{R}^{++}$, continue et strictement décroissante sur \mathbb{R}^{++} , bijective de \mathbb{R}^{++} sur \mathbb{R}^{++} , et telle que : $f(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x^2}$. Déterminer un équivalent de f^{-1} en 0^+ .
- 15) Soit $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une application décroissante et telle que : $f(x+1) + f(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x}$. Montrer que $f(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{2x}$.

Pour obtenir un équivalent simple de $f + g$ au voisinage de a
1. je regarde si l'une des deux fonctions f ou g est négligeable devant l'autre au voisinage de a .
Si $f = o_a(g)$ alors $f + g \sim_a g$.
2. Je remplace $f(x)$ et $g(x)$ par leur développement limité ou asymptotique en a avec au moins deux termes non nuls... si ces deux termes se simplifient, je vais jusqu'à troisième terme non nul....

Pour obtenir un équivalent simple de $\ln(f(x))$ au voisinage de a
1. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ alors $\ln(f(x)) \sim_a f(x) - 1$.
2. Sinon, je remplace $f(x)$ par son développement limité ou asymptotique à un terme significatif au voisinage de a .
3. Ensuite je réinjecte dans le logarithme et j'utilise les propriétés de ce \ln .

Pour obtenir un équivalent simple de $f(x)^{g(x)}$ au voisinage de a
1. J'écris $f(x)^{g(x)}$ sous forme exponentielle $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))}$.
2. Je cherche un équivalent simple de $g(x)$ et un autre de $\ln(f(x))$ et j'en fais leur produit.
3. Je transforme cet équivalent par une égalité $u \sim_a v \Rightarrow u = v + o_a(v)$.
4. Ensuite je réinjecte dans l'exponentielle et j'utilise les propriétés de l'exponentielle.

4. Changement de variable pour se ramener en 0

1. Soit f une fonction dont je cherche un équivalent au voisinage du réel a non nul.

Je pose $g(t) = f(t + a)$. Alors g est définie au voisinage de 0 et $f(x) = g(x - a)$. De plus,

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{et} \quad g(t) \sim_0 h(t) \Rightarrow f(x) \sim_a h(x - a).$$

2. Soit f une fonction dont je cherche un équivalent au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Je pose $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$. Alors g est définie au voisinage de 0^+ (resp. 0^-) et $f(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$. De plus,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \quad \text{et} \quad g(t) \sim_{0^+} h(t) \Rightarrow f(x) \sim_{+\infty} h\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exemples 1 Cherchons un équivalent simple de $f(x) = \ln(\sin(x))$ au voisinage de $\frac{\pi}{2}$.

1) Cherchons un équivalent simple de $f(x) = 1 + \cos(x)$ au voisinage de π .

Posons $g(t) = f(t + \pi)$. Alors $g(t) = 1 + \cos(t + \pi) = 1 - \cos(t) \sim_0 \frac{t^2}{2}$. Donc, $f(x) \sim_{\pi} \frac{(x - \pi)^2}{2}$.

2) Cherchons un équivalent simple de $f(x) = x^x - 4$ au voisinage de 2.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^x - 4}{x - 2} \stackrel{TA}{=} 4(1 + \ln(2)). \text{ Donc, } x^x - 4 \sim_2 4(1 + \ln(2))(x - 2).$$

III Développements limités

RAPPEL : Soit x_0 un réel. $o_{x_0}((x - x_0)^n) = (x - x_0)^n \times o_{x_0}(1) = (x - x_0)^n \times \varepsilon(x)$ tel que $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$

En particulier, $o_0(x^n) = x^n \times o_0(1) = x^n \times \varepsilon(x)$ tel que $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$

De plus, $o_0(x^n) \times o_0(x^p) = o_0(x^{n+p})$ et $x^n \times o_0(x^p) = o_0(x^{n+p})$ et si $n > p$ alors $x^n = o_0(x^p)$.

1. Définition et unicité

Définition • Soit f une fonction définie sur un voisinage de 0.

On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 lorsqu'il existe $n + 1$ réels $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ tels que :

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n}_{\substack{P_n(x) \\ \text{partie polynomiale ou partie principale} \\ \text{de degré inférieur ou égal à } n}} + \underbrace{o_0(x^n)}_{\substack{\text{reste} \\ \text{fonction} \\ \text{négligeable devant } x^n \\ \text{au voisinage de } 0}}.$$

• Soit f une fonction définie sur un voisinage du réel x_0 (pas forcément en x_0)

On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 lorsqu'il existe $n + 1$ réels $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ tels que :

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n}_{\substack{Q_n(x) = P_n(x - x_0) \\ \text{partie polynomiale ou partie principale} \\ P_n(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n \\ \text{de degré inférieur ou égal à } n}} + \underbrace{o_{x_0}((x - x_0)^n)}_{\substack{\text{reste} \\ \text{fonction} \\ \text{négligeable devant } (x - x_0)^n \\ \text{au voisinage de } x_0}}.$$

Théo pour se ramener à un DL en 0 :

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 réel non nul. On pose $h = x - x_0$ et $g(h) = f(x_0 + h)$.

$$f \text{ vérifie: } f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n)$$

\Leftrightarrow

$$g \text{ vérifie: } g(h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \dots + a_n h^n + o_0(h^n).$$

Théo d'UNICITE: Il y a unicité de la partie polynomiale du développement limité d'une fonction donnée en un point donné à un ordre fixé (i.e. pour tout ordre n unicité des réels $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$).

Exemple : Montrons que $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^n o_0(1) = \sum_{k=0}^n x^k + o_0(x^n)$ ♥♥♥

Et $\frac{1}{x} = 1 - (x - 1) + (x - 1)^2 - \dots + (-1)^n (x - 1)^n + (x - 1)^n o_1((x - 1)^n)$  **ON NE DEVELOPPE JAMAIS !!!**

NB : $a_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Donc, il est facile de vérifier le terme constant d'un DL !!!!

2. Propriétés

EQUIVALENT Soit f une fonction définie au voisinage du réel x_0 .

Si f admet le $DL_n(x_0)$ suivant :

$$f(x) = a_{k_0} (x - x_0)^{k_0} + a_{k_0+1} (x - x_0)^{k_0+1} + \dots + a_n (x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n) \text{ tel que } a_{k_0} \neq 0,$$

alors $f(x) \sim_{x_0} a_{k_0} (x - x_0)^{k_0}$.

49

TRONCATURE : Si f admet le $DL_n(x_0)$ suivant : $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n)$
 Alors f admet un $DL_{n-1}(x_0)$ suivant : $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + o_{x_0}((x - x_0)^{n-1})$.

50

FONCTION PAIRE / FONCTION IMPAIRE
 Si f admet un $DL_n(0)$ et f est paire alors tous les coefficients d'indices impairs de la partie polynomiale sont nuls
 i.e. $f(x) = a_0 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + o_0(x^n)$ si n pair
 et $f(x) = a_0 + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + o_0(x^n)$ si n impair
 Si f admet un $DL_n(0)$ et f est impaire alors tous les coefficients d'indices pairs de la partie polynomiale sont nuls
 i.e. $f(x) = a_1x + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + o_0(x^n)$ si n impair
 et $f(x) = a_1x + a_3x^3 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + o_0(x^n)$ si n impair

51

Remarque : P est une fonction polynomiale paire si et ssi P est de la forme $P(x) = a_0 + a_2x^2 + \dots + a_{2p}x^{2p}$.
 De même, P est une fonction polynomiale impaire si et ssi P est de la forme $P(x) = a_1x + a_3x^3 + \dots + a_{2p+1}x^{2p+1}$.
 Ainsi, si f est paire (resp impaire) alors la partie polynomiale de son $DL_n(0)$, s'il existe, est paire (resp. impaire).

3. Obtention d'un DL

51s

DL en 0 d'une fonction polynomiale : Si P est polynomiale telle que : $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_Nx^N$ alors pour tout entier $n \geq N$, $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_Nx^N$ est le $DL_n(0)$ de P
 pour tout entier $n < N$, $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + o_0(x^n)$ est le $DL_n(0)$ de P .

52

Théorème de Taylor Young ♥♥♥ (admis pour le moment)
 Si f est de classe C^n sur l'intervalle I et $x_0 \in I$ alors f admet le $DL_n(x_0)$: $f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}_{Q_n(x-x_0)} + \underbrace{o_{x_0}((x - x_0)^n)}_{reste}$.
 Si f est de classe C^n sur l'intervalle I et $0 \in I$ alors f admet le $DL_n(0)$: $f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}_{P_n(x)} + \underbrace{o_0(x^n)}_{reste}$.

53

Développements limités d'ordre n au voisinage de 0 des fonctions usuelles : ♥♥♥♥
 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n o_0(1) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o_0(x^n)$.
 $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} x^n}{n!} + x^n o_0(1) & \text{si } n \text{ impair} \\ \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} x^{n-1}}{(n-1)!} + x^n o_0(1) & \text{si } n \text{ pair} \end{cases} = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_0(x^n)$.
 $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} x^n}{n!} + x^n o_0(1) & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} x^{n-1}}{(n-1)!} + x^n o_0(1) & \text{si } n \text{ impair} \end{cases} = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o_0(x^n)$.
 $\text{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \begin{cases} \frac{x^n}{n!} + x^n o_0(1) & \text{si } n \text{ impair} \\ \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + x^n o_0(1) & \text{si } n \text{ pair} \end{cases} = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_0(x^n)$.
 $\text{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \begin{cases} \frac{x^n}{n!} + x^n o_0(1) & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + x^n o_0(1) & \text{si } n \text{ impair} \end{cases} = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o_0(x^n)$.
 $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!} x^4 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n o_0(1)$.
 $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^n o_0(1) = \sum_{k=0}^n x^k + o_0(x^n)$.

54

Démo :
 1. \cos est de classe C^∞ sur \mathbb{R} donc TY s'applique à \cos en tout point et à tout ordre. Appliquons-le en 0, à l'ordre $2n$:
 $\forall p \in \mathbb{N}, \cos^{(2p)}(0) = (-1)^p$ et $\cos^{(2p+1)}(0) = 0$ i.e. $\cos^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ impair} \\ (-1)^{k/2} & \text{si } k \text{ pair} \end{cases}$
 Alors $\cos(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} x^k + o_0(x^{2n}) = \sum_{\substack{k \text{ impair} \\ \cos^{(k)}(0)=0}} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} x^k + \sum_{k \text{ pair}} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} x^k + o_0(x^{2n})$
 $\cos(x) = \sum_{\substack{k=2p \\ \text{on pose } k=2p}} \frac{\cos^{(2p)}(0)}{(2p)!} x^{2p} + o_0(x^{2n}) = \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} + o_0(x^{2n})$.
 Alors, $0 \leq k \leq 2n \Leftrightarrow 0 \leq p \leq n$
 2. \sin est de classe C^∞ sur \mathbb{R} donc TY s'applique à \sin en tout point et à tout ordre. Appliquons-le en 0, à l'ordre $2n + 1$:

$\forall p \in \mathbb{N}, \sin^{(2p+1)}(0) = 0$ et $\sin^{(2p+1)}(0) = (-1)^p$ i.e. $\sin^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ pair} \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$.

Alors $\sin(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} x^k + o_0(x^{2n+1}) \equiv \sum_{\substack{0 \leq k \leq 2n+1 \\ \text{pour } k \text{ pair,} \\ \sin^{(k)}(0)=0}} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} x^k + o_0(x^{2n+1})$

$\sin(x) \equiv \sum_{\substack{\text{on pose } k=2p+1 \\ \text{Alors,} \\ 0 \leq k \leq 2n+1 \Leftrightarrow 0 \leq p \leq n}} \sum_{p=0}^n \frac{\sin^{(2p+1)}(0)}{(2p+1)!} x^{2p+1} + o_0(x^{2n+1}) = \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o_0(x^{2n+1})$.

NB : TY assure que $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \underset{\rightarrow 0}{\varepsilon(x)}$. On obtient : $e^x \sim_0 1$ première estimation du comportement de \exp en 0

puis $e^x - 1 \sim_0 x$ précise cette information... On peut encore aller plus loin $e^x - 1 - x \sim_0 \frac{x^2}{2}$ puis $e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \sim_0 \frac{x^3}{6}$...

De même, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \underset{\rightarrow 0}{\varepsilon(x)}$. Donc, $\ln(1+x) \sim_0 x$ et $\ln(1+x) - x \sim_0 -\frac{x^2}{2}$ et ...

55 Attention : $e^x \sim_0 \text{ch}(x) \sim_0 \cos(x) \sim_0 1 - 10x \sim_0 1$ cela signifie simplement que \exp, ch et \cos tendent vers 1 en 0. Mais $e^x - 1 \sim_0 \text{ch}(x) - 1 \sim_0 \cos(x) - 1 \sim_0 0$. Donc, \exp, ch, \cos et $(x \mapsto 1 - 10x)$ ne tendent pas vers 1 en 0 à la même vitesse.

56 Théorème COMBINAISON LINEAIRE ET PRODUIT : Soit α et β deux réels.

Si f et g admettent les $DL_n(0)$ suivants :

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n}_{P(x)} + o_0(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) = \underbrace{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n}_{Q(x)} + o_0(x^n)$$

alors $\alpha f + \beta g$ et fg admettent chacune un $DL_n(0)$ et

$$\alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha P(x) + \beta Q(x) + o_0(x^n).$$

$$f(x) \times g(x) = [\text{somme des termes de degré inférieur ou égal à } n \text{ de } P(x) \times Q(x)] + o_0(x^n).$$

Exemple : Cherchons le $DL_4(0)$ de $f(x) = \sin(x) \cos(x) - \frac{1}{1+x}$.

57 Théorème $DL_n(0)$ d'un inverse, d'un quotient :

Si f admet le $DL_n(0)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ admet un $DL_n(0)$.

Si f et g admettent des $DL_n(0)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq 0$ alors $\frac{g}{f}$ admet un $DL_n(0)$.

59 Exemples : 1) cherchons le $DL_5(0)$ de $f(x) = \frac{1}{1+\sin^2(x)}$ 2) Cherchons les $DL_4(0)$ de $h(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{\sin(x)}$.

1) Cherchons les $DL_4(0)$ de $g(x) = \frac{1}{(2+\sin(x))}$ 3) Montrons que : $\cotan(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + o_0(x^3)$

60 Théorème (admis) COMPOSITION : Si f admet le $DL_n(0)$ suivant : $f(x) = P(x) + o_0(x^n)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ et g admet un $DL_n(0)$ alors $g \circ f$ admet le $DL_n(0)$.

61 Exemples de référence : Cherchons le $DL_n(0)$ de $\ln(1-u)$ et $\frac{1}{1+u}$ et le $DL_{2n}(0)$ de $\frac{1}{1+x^2}$.

$$\frac{1}{1+u} = \frac{1}{1-(-u)} = 1 + (-u) + (-u)^2 + (-u)^3 + \dots + (-u)^n + o_0(u^n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k u^k + o_0(u^n)$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + (-x^2)^3 + \dots + (-x^2)^n + o_0(x^{2n}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + o_0(x^{2n}).$$

62 Exemples et techniques :

1) Cherchons le $DL_5(0)$ de $\sin(3x)$.

3) Cherchons le $DL_5(\frac{\pi}{2})$ de $f(x) = \ln(2 + \sin^2(x))$

2) Cherchons le $DL_3(0)$ de $f(x) = \ln(4 - x^2) - 2e^{(x^2-1)^2}$

4) Cherchons le $DL_5(0)$ de $f(x) = e^{\sqrt{2\text{ch}(x)}}$.

63 Théorème : INTEGRATION TERME A TERME (TITT) (admis pour le moment)

• Si f est dérivable un intervalle I contenant 0 et f' admet le $DL_n(0)$ suivant :

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + o_0(x^n).$$

alors f admet le $DL_{n+1}(0)$ suivant : $f(x) = f(0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o_0(x^{n+1})$.

• Si f est dérivable sur un intervalle I contenant x_0 et f' admet le $DL_n(x_0)$ suivant :

$$f'(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots + a_n (x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n)$$

alors f admet le $DL_{n+1}(x_0)$ suivant : $f(x) = f(x_0) + a_0 (x - x_0) + a_1 \frac{(x - x_0)^2}{2} + \dots + a_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1} + o_{x_0}((x - x_0)^{n+1})$.

64 La réciproque du TITT est fautive !! Voici un contre-exemple : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \sin\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}, f \text{ admet le } DL_n(0) \text{ suivant: } f(x) = o_0(x^n) \text{ mais } f' \text{ n'a pas de } DL_0(0).$$

65 Exemple : Soit $f : (x \mapsto \text{Arctan}(1+x))$. Cherchons son $DL_5(0)$.

66 Exemples de référence ♥♥♥♥ :

$$\text{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o_0(x^{2n+1}).$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + o_0(x^{n+1}).$$

$$\text{Arcsin}(x) = x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + x^5 o_0(1).$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5 o_0(1).$$

67 **Conséquence du TITT** : Si f et f' admettent respectivement les $DL_{n+1}(x_0)$ et $DL_n(x_0)$ suivants
 $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_{n+1}(x - x_0)^{n+1} + o_{x_0}((x - x_0)^{n+1})$.
 $f'(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \dots + b_n(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n)$.
alors $a_1 = b_0$, $a_2 = \frac{b_1}{2}$, $a_3 = \frac{b_2}{3}$, \dots , $a_{n+1} = \frac{b_n}{n+1}$.

c'est le cas lorsque f est de classe C^{n+1} sur un intervalle contenant x_0 .

IV Applications à l'étude de fonctions.

1. Continuité – dérivabilité en un point – position de la courbe par rapport à une tangente- extremum local

68 **Prop** ■ Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 et en x_0 .

- f est continue en x_0 si et ssi f admet le $DL_0(x_0)$ suivant : $f(x) = f(x_0) + o_{x_0}(1)$.
- f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = m$ si et ssi f admet le $DL_1(x_0)$ suivant : $f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + (x - x_0)o_{x_0}(1)$.
 ■ Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 mais pas en x_0 .
- f est prolongeable par continuité en x_0 par la valeur L si et ssi f admet le $DL_0(x_0)$ suivant : $f(x) = L + o_{x_0}(1)$.
- f est prolongeable par continuité en x_0 par la valeur L en une fonction \tilde{f} dérivable en x_0 et $\tilde{f}'(x_0) = m$ si et ssi f admet le $DL_1(x_0)$ suivant : $f(x) = L + m(x - x_0) + (x - x_0)o_{x_0}(1)$.

69 **Méthode pour connaître l'équation de la tangente et la position de la courbe par rapport à cette tangente.**

Si f admet le $DL(x_0)$ suivant : $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_{k_0}(x - x_0)^{k_0} + (x - x_0)^{k_0}o_{x_0}(1)$ où $a_{k_0} \neq 0$ alors je conclus que

OU BIEN f est définie en x_0

- f est continue et dérivable en x_0 et $f(x_0) = a_0$, $f'(x_0) = a_1$ et $y = a_0 + a_1(x - x_0)$ est l'équation de la tangente à Cf au point $M_0(x_0, f(x_0))$.
- $f(x) - [a_0 + a_1(x - x_0)] \sim_{x_0} a_{k_0}(x - x_0)^{k_0}$. Alors au voisinage de x_0 , $f(x) - [a_0 + a_1(x - x_0)]$ est du signe de $a_{k_0}(x - x_0)^{k_0}$ ce qui permet de connaître, au voisinage de M_0 , la position de Cf par rapport à sa tangente en M_0 .

OU BIEN f n'est pas définie en x_0

- $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_{k_0}(x - x_0)^{k_0} + (x - x_0)^{k_0}o_{x_0}(1)$ tel que $a_{k_0} \neq 0$ alors
- f est prolongeable par continuité en x_0 par la valeur a_0 et son prolongement est dérivable en x_0 et $\tilde{f}(x_0) = a_0$, $\tilde{f}'(x_0) = a_1$ et $y = a_0 + a_1(x - x_0)$ est l'équation de la tangente à $C\tilde{f}$ au point $M_0(x_0, \tilde{f}(x_0))$.
- $\tilde{f}(x) - [a_0 + a_1(x - x_0)] \sim_{x_0} a_{k_0}(x - x_0)^{k_0}$. Alors au voisinage de x_0 , $\tilde{f}(x) - [a_0 + a_1(x - x_0)]$ est du signe de $a_{k_0}(x - x_0)^{k_0}$.

70 **Exemples :**

Etude de $f(x) = \ln\left(\frac{1+2x^2}{1+\text{Arcsin}(x)}\right)$ au voisinage de 0

Etude de $f: (x \mapsto x^2 \text{Arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right))$ au voisinage de $(-1)^\pm$.

71 **Méthode pour reconnaître un extremum local**

Si f admet le $DL(x_0)$ suivant : $f(x) = f(x_0) + a_{k_0}(x - x_0)^{k_0} + (x - x_0)^{k_0}o_{x_0}(1)$ tel que $a_{k_0} \neq 0$ et k_0 pair alors au voisinage de x_0 , $f(x) - f(x_0)$ est du signe de a_{k_0} et par conséquent, si $a_{k_0} > 0$ alors $f(x_0)$ est un minimum local de f et si $a_{k_0} < 0$ alors $f(x_0)$ est un maximum local de f .

72 **Exemple :** Etude au voisinage de 0 de $f(x) = e^x - \sqrt{1+2x}$.

2. Calculs de limite et recherche d'un équivalent

73 **Exemples :** 1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{ch}(x) - \cos(x)}{\sin(x) - \text{sh}(x)}$ D'après TY, $\text{ch}(x) - \cos(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + o_0(x^2) - 1 + \frac{x^2}{2} + o_0(x^2) = x^2 + o_0(x^2) \sim_0 x^2$.

Et $\sin(x) - \text{sh}(x) = x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3) - x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3) = -\frac{x^3}{3} + o_0(x^3) \sim_0 -\frac{x^3}{3}$. Donc, $\frac{\text{ch}(x) - \cos(x)}{\sin(x) - \text{sh}(x)} \sim_0 -\frac{3}{x}$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{3}{x} = \mp\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{ch}(x) - \cos(x)}{\sin(x) - \text{sh}(x)} = \mp\infty$.

2. Trouver un équivalent au voisinage de 0 de $f(x) = \sin(x) - x$ puis de $g(x) = \sin(x) - 2x$

$\sin(x) = x + o_0(x) = x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)$. Donc, $f(x) = -\frac{x^3}{6} + o_0(x^3) \sim_0 -\frac{x^3}{6}$ et $g(x) = -x + o_0(x) \sim_0 -x$.

74 **Exemples :** 1. Limite en 0 de $f(x) = \frac{\sqrt{\sin(x)} - \sqrt{x}}{\sin(\sqrt{x}) - \sqrt{x}}$ et limite en e de $f(x) = \frac{x^e - e^x}{(e-x)^2}$.

2. Trouver un équivalent de $f(x) = \sqrt[3]{1+3x} - \sqrt[3]{1+2x} + \frac{x^2}{2}$ au voisinage de 0.

3. Trouver un équivalent de $f(x) = \ln(\tan(x))$ au voisinage de 0.

75 **Méthode générale pour trouver un équivalent d'une fonction f au voisinage de a :**

1) je peux écrire $f(x)$ sous la forme $g(x) \times$ une fonction de limite 1 en a .

2) Je peux trouver une fonction g telle que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

3) si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ tel que L réel non nul alors $f(x) \sim_a L$.

4) Si $f = g \times h$ alors je cherche un équivalent de g et un équivalent de h au voisinage de a et j'en fais le quotient (ou un produit).

5) Si $f = g^\alpha$ avec α constante alors je cherche un équivalent de g que j'élève à la puissance α .

6) Si $f = g + h$, alors je cherche un équivalent simple de chacune des fonctions g et h au voisinage de a et grâce à ces équivalents, je compare g et h au voisinage de a .

a) si $h = o_a(g)$ alors $f \sim_a g$.

b) si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) + h(x) = L$ tel que L réel non nul alors $f(x) \sim_a L$.

c) sinon, je vais chercher des développements limités ou asymptotiques de g et de h au voisinage de a que je peux additionner contrairement aux équivalents (puisque un DL est une égalité) !!! L'ordre sera choisi de sorte qu'en les sommant, il reste un terme significatif.

7) Si $f(x) = \ln(g(x))$ alors après avoir écarté la situation 1),

Ou bien $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 1$. Alors j'utilise la propriété de composition à droite.

Ou bien $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ n'existe pas ou est infinie. Alors je cherche un DA ou un DL de g au voisinage de a et je mets le

terme dominant en facteur puis j'utilise la propriété $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ puis je compare $\ln(a)$ et $\ln(b)$.

8) Si $f(x) = e^{g(x)}$ alors après avoir écarté la situation 1), je cherche un DA ou un DL de g au voisinage de a et je mets le terme dominant en facteur puis j'utilise la propriété $e^{a+b} = e^a e^b$.

9) Si $f(x) = u(x)^{v(x)}$ alors j'écris $f(x) = e^{v(x) \ln(u(x))}$, alors après avoir écarté la situation 1), je vais chercher un DL ou DA ou la limite de $h(x) = u(x) \ln(v(x))$ en a puis conclure ou utiliser la propriété de l'exponentielle $e^{a+b} = e^a e^b$. Il faut parfois obtenir la limite de f pour avoir un équivalent.

3. Recherche d'asymptote et position de la courbe par rapport à cette asymptote.

Méthode S'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et des réels a, b et c tels que : $c \neq 0$ et $f(x) = ax + b + \frac{c}{x^k} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^k}\right)$

alors $f(x) - [ax + b] \sim_{+\infty} \frac{c}{x^k}$ et j'en déduis que :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - [ax + b] = 0$ et $f(x) - [ax + b]$ est du signe $\frac{c}{x^k}$ et ainsi, la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à Cf en $+\infty$ et je peux connaître la position de Cf par rapport à cette asymptote au voisinage de $+\infty$ selon le signe de $\text{signe } \frac{c}{x^k}$.

Pour obtenir l'écriture $f(x) = ax + b + \frac{c}{x^k} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^k}\right)$, je peux effectuer le changement de variable

$t = \frac{1}{x}$ et $g(t) = f(x)$. Je vais alors tenter d'obtenir : $tg(t) = a + bt + ct^{k+1} + o_0(t^{k+1})$.

En fait, il suffit en fait d'obtenir $f(x) = ax + b + \text{terme significatif}$ ie $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$ et de connaître un équivalent de $\varepsilon(x)$ au voisinage de $+\infty$. Cet équivalent est souvent de la forme $\frac{c}{x^k}$ mais peut avoir une autre forme

Exemple : Soit f définie par : $f(x) = \sqrt{3x^2 - 5x + 1} e^{\frac{1}{x}}$. Etude de sa branche infinie en $+\infty$.

4. Recherche du DL d'une primitive.

Exemple : Soit $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{1+\ln(t)} dt$. Cherchons le $DL_3(1)$ de f .

5. Recherche du DL d'une bijection réciproque.

Exemple : Soit $f : (x \mapsto 2x - \sin(x))$. Montrons que f est bijective de \mathbb{R} sur \mathbb{R} et cherchons un $DL_5(0)$ de f^{-1} .

6. Recherche de développement asymptotique.

Exemples :

1. Déterminons un développement asymptotique de Arctan en $+\infty$ à la précision $\frac{1}{x^n}$.

2. Soit $f(x) = \sqrt{\frac{3-x^2}{2-4x}}$. Montrer que $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{4\sqrt{x}} - \frac{21}{16x\sqrt{x}} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$. Que peut-on en conclure sur Cf ?

Développements limités usuels



$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n o_0(1) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o_0(x^n).$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} o_0(1) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_0(x^{2n+2}).$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} o_0(1) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o_0(x^{2n+1}).$$

$$\operatorname{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} o_0(1) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_0(x^{2n+2}).$$

$$\operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} o_0(1) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o_0(x^{2n+1}).$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^n o_0(1) = \sum_{k=0}^n x^k + o_0(x^n).$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + x^n o_0(1) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o_0(x^n).$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^n o_0(1) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o_0(x^n).$$

$$\ln(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} \dots + (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} + (x-1)^n o_1(1). \quad \triangle DL_n(1)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n o_0(1).$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + x^4 o_0(1). \quad \text{A savoir retrouver en prenant } \alpha = \frac{1}{2}.$$

$$\operatorname{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o_0(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o_0(x^{2n+1}).$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + x^6 o_0(1).$$

$$\operatorname{Arcsin}(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o_0(x^6).$$

