

Programme de colle 12

Chap 8: Equations différentielles linéaires d'ordre 2

III Résolution d'une ~~edl~~ 2 de la forme (E): $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x)$ tq a, b et c constantes tq $a \neq 0$ et d fonctions continues sur un $\mathbb{R}$.

- Théorème de résolution de ~~edl~~₂. Solutions complexes et solutions réelles.
- Recherche d'une solution particulière de (E) dans les cas suivants :
 - ✓ $d(x) = P(x)e^{Mx}$ où P polynomiale et M constante (réelles ou complexes).
 - ✓ $d(x) = P(x)\cos(qx)e^{mx}$ où P polynomiale à coefficients réels et q et m constantes réelles.

Chap 9 : Dérivées $n^{\text{ièmes}}$. Comparaison des fonctions. Développements limités.

I Dérivées $n^{\text{ièmes}}$

- Définition de la dérivée $n^{\text{ième}}$, de la classe C^n ou C^∞ . Ensembles $C^n(I, K)$, $D^n(I, K)$ et $C^\infty(I, K)$.
- Dérivées successives des fonctions usuelles :

$\exp \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \exp^{(n)}(x) = e^x$.

$\text{ch} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}^{(n)}(x) = \begin{cases} \text{ch}(x) & \text{si } n \text{ pair} \\ \text{sh}(x) & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$.

$\text{sh} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \text{sh}^{(n)}(x) = \begin{cases} \text{sh}(x) & \text{si } n \text{ pair} \\ \text{ch}(x) & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$.

$\cos \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}\cos(x) & \text{si } n \text{ pair} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin(x) & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$.

$\sin \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}\sin(x) & \text{si } n \text{ pair} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}\cos(x) & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$.

$\ln \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+, \ln^{(n)}(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{si } n = 0 \\ \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$.

$f: \left(x \mapsto \frac{1}{x}\right) \in C^\infty(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. $f: (x \mapsto x^\alpha) \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+, f^{(n)}(x) = \begin{cases} \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} & \text{si } n \geq 1 \\ x^\alpha & \text{si } n = 0 \end{cases}$.

- Dérivées successives d'une combinaison linéaire et d'un produit (formule de Leibniz) de deux fonctions n -fois dérivables (ou de classe C^n) sur un même domaine.

Formule de Leibniz : Si $f = u \times v$ telles que u et v sont de classe C^n sur I ($n \in \mathbb{N}$) alors

f est de classe C^n sur I et $\forall x \in I, f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x)$

- Classe C^k d'un quotient, d'une composée, d'une bijection réciproque (admis).
- Critère de classe C^n ou C^∞ (admis pour $n = 1$): Soit I un intervalle et $a \in I$. et $\forall x \in I, f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in I \setminus \{a\} \\ L_0 & \text{si } x = a \end{cases}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si g est de classe C^n sur $I \setminus \{a\}$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_0$ et $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lim_{x \rightarrow a} g^{(k)}(x) = L_k$ existe et est finie alors f est de classe C^n sur l'intervalle I

et $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall x \in I, f^{(k)}(x) = \begin{cases} g^{(k)}(x) & \text{si } x \neq a \\ L_k & \text{si } x = a \end{cases}$.

Si g est de classe C^∞ sur $I \setminus \{a\}$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_0$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \rightarrow a} g^{(k)}(x) = L_k$ existe et est finie et alors f est de classe C^∞ sur l'intervalle I et $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in I, f^{(k)}(x) = \begin{cases} g^{(k)}(x) & \text{si } x \neq a \\ L_k & \text{si } x = a \end{cases}$.

II Comparaisons entre fonctions.

- Définitions d'une fonction négligeable devant une autre au voisinage de a , d'une fonction équivalente à une autre au voisinage de a , d'une fonction dominée par une autre au voisinage de a . Notations.
- Caractérisation par le quotient :

si f et g sont définies sur une même voisinage de a et g ne s'annule pas sur ce voisinage de a sauf éventuellement en a alors

$$\checkmark \quad f \sim_a g \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

$$\checkmark \quad f = o_a(g) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

$$\checkmark \quad f = O_a(g) \Leftrightarrow \frac{f}{g} \text{ est bornée sur un voisinage de } a.$$

- Théorème de comparaison.

$$\checkmark \quad f \sim_a g \text{ ou } f = o_a(g) \Rightarrow f = O_a(g)$$

$$\checkmark \quad f = o_a(g) \text{ et } g = o_a(h) \Rightarrow f = o_a(h).$$

$$\checkmark \quad f \sim_a g \text{ et } g = o_a(h) \Rightarrow f = o_a(h).$$

$$\checkmark \quad f = o_a(g) \text{ et } g \sim_a h \Rightarrow f = o_a(h).$$

$$\checkmark \quad f \sim_a g \text{ et } g = o_a(h) \Rightarrow f = o_a(h).$$

✓ f bornée au voisinage de a et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty \Rightarrow f = o_a(g)$

• Propriétés et opérations sur les fonctions négligeables :

✓ $o_a(1)$ désigne une fonction qui tend vers 0 en a .

✓ $o_a(g) = g \times o_a(1)$

✓ $o_a(fg) = f \times o_a(g) = fg \times o_a(1) = g \times o_a(f)$

✓ $o_a(g) + o_a(g) = o_a(g)$

✓ Pour tout réel λ non nul, $o_a(\lambda g) = o_a(g) = \lambda o_a(g)$

✓ Une somme finie ou combinaison linéaire (finie) de fonction négligeables devant g au voisinage de a est une fonction négligeable devant g au voisinage de a .

• Caractérisation et propriétés sur les équivalents :

✓ $f \sim_a g \Leftrightarrow f = g + o_a(g) \Leftrightarrow f - g = o_a(g)$. Autrement dit, $g + o_a(g) \sim_a g$.

✓ $f \sim_a g$ et $g \sim_a h \Rightarrow f \sim_a h$.

✓ $f \sim_a g \Rightarrow f$ et g ont le même signe strict sur un voisinage de a .

✓ $\begin{cases} f \sim_a g \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

✓ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \in \mathbb{R}^* \Rightarrow f \sim_a L$.

✓ $\begin{cases} f \text{ est dérivable en } a \\ f'(a) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) - f(a) \sim_a f'(a)(x - a)$.

• Opérations autorisées sur les fonctions équivalentes : produit, quotient, puissance constante, composition à droite.

✓ $f \sim_a g$ et $u \sim_a v \Rightarrow f \times u \sim_a g \times v$.

✓ $f \sim_a g$ et $u \sim_a v$ et u ne s'annule pas au voisinage de a (sauf éventuellement en a) $\Rightarrow \frac{f}{u} \sim_a \frac{g}{v}$.

✓ $f \sim_a g$ et α constante réelle $\Rightarrow f \sim_a g^\alpha$.

✓ $f \sim_a g$ et $\lim_{x \rightarrow b} u(x) = a \Rightarrow f(u(x)) \sim_b g(u(x))$.

• Opérations interdites sur les fonctions équivalentes : somme, puissance non constante, composition à gauche.

✓ $f \sim_a g$ et $u \sim_a v \Rightarrow f + u \not\sim_a g + v$.

✓ $f \sim_a g$ et α fonction non constante $\Rightarrow f(x)^\alpha \not\sim_a g(x)^\alpha$.

✓ $f \sim_a g \Rightarrow u(f(x)) \not\sim_a u(g(x))$.

• Exemples déjà rencontrés :

✓ Comparaison des fonctions puissances entre elles au voisinage de 0 et de $+\infty$: soit α et β réels

$$\alpha < \beta \Rightarrow \begin{cases} x^\alpha \ll_{+\infty} x^\beta \\ x^\beta \ll_0 x^\alpha \end{cases}$$

✓ Comparaison des fonctions $(x \mapsto (x - a)^k)$ tel que $k \in \mathbb{Z}$ au voisinage de a . Soit n et m entiers.

$$n < m \Rightarrow (x - a)^m \ll_a (x - a)^n$$

✓ Équivalent d'une fonction polynomiale au voisinage de $+\infty$ puis de 0.

Soit n et m entiers tels que $n \leq m$ et $a_0, \dots, a_n, \dots, a_m$ réels tels que $a_m \neq 0$ et $a_n \neq 0$. $\sum_{k=0}^m a_k x^k \sim_{+\infty} a_m x^m$ et $\sum_{k=n}^m a_k x^k \sim_0 a_n x^n$.

✓ Croissances comparées.

pour tous réels α, β strictement positifs et $a > 1$, $\ln(x)^\alpha \ll_{+\infty} x^\beta \ll_{+\infty} a^x$.

✓ Équivalents usuels obtenus par taux d'accroissement ou d'autres limites usuelles.

$$\begin{aligned} e^x - 1 &\sim_0 x \\ \ln(1 + x) &\sim_0 x \\ \ln(y) &\sim_1 y - 1 \\ \sin(x) &\sim_0 x \\ \tan(x) &\sim_0 x \\ \sinh(x) &\sim_0 x \\ \operatorname{Arctan}(x) &\sim_0 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Arcsin}(x) &\sim_0 x \\ (1 + x)^\alpha - 1 &\sim_0 \alpha x \text{ (où } \alpha \in \mathbb{R}^*) \\ \cosh(x) - 1 &\sim_0 \frac{1}{2} x^2 \\ \cos(x) - 1 &\sim_0 -\frac{1}{2} x^2 \end{aligned}$$

Questions de cours : CONNAITRE ET SAVOIR ENONCER TOUS LES ENONCES DES DEFINITIONS, PROPRIETES ET THEOREMES DU COURS.

Savoir énoncer et démontrer les résultats suivants :

1) Théorème de résolution de $(EdIH_2)$ dans le cas complexe

2) Formule de Leibniz

3) Critère de classe $\mathcal{C}^n$ en admettant le critère de classe $\mathcal{C}^1$.

4) Démontrer :

a) $f \sim_a g \Leftrightarrow f = g + o_a(g)$.

b) $f \sim_a g$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

c) $f = o_a(g)$ et $g \sim_a h \Rightarrow f = o_a(h)$.

d) $o_a(g) + o_a(g) = o_a(g)$ et $\alpha o_a(g) = o_a(g)$

e) $f(x) \sim_a g(x)$ et α constante réelle $\Rightarrow f((x))^\alpha \sim_{x \rightarrow a} (g(x))^\alpha$.