Corrigé du DL 6

Exercice 1 une suite d'intégrales

$\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

a. Déterminer une expression de I_n à l'aide de la formule du binôme .
b. Exprimer I_n en fonction de I_{n-1} . En déduire une autre expression de I_n.
c. Donner alors une formule sommatoire .
d. Montrer que (I_n) est convergente .

3.a.$Soit\ n \in \mathbb{N}$ et $I_n = \int_0^1 \underbrace{(1-t^2)^n}_{f_n(t)} dt$. f_n est continue sur le segment $[0,1]$ donc $I_n$existe.

$$(1-t^2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-t^2)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k t^{2k}$$

Donc, $I_n = \int_0^1 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-t^2)^k\, dt \underbrace{=}_{\substack{car\ toute\ fonction\\ (t \mapsto t^{2k}) est\ continue\\ sur\ [0,1].}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \int_0^1 t^{2k}\, dt = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

b.$Soit\ n \in \mathbb{N}^*$.

$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt = \int_0^1 (1-t^2)^{n-1}(1-t^2)dt$$
$$= \int_0^1 (1-t^2)^{n-1} - t^2(1-t^2)^{n-1}dt \underbrace{=}_{\substack{car\ f_{n-1}\ et\ (t \mapsto t^2(1-t^2)^{n-1})\\ sont\ continues\ sur\ le\ segment [0,1]}} I_{n-1} - \int_0^1 t^2(1-t^2)^{n-1}dt$$
$$= I_{n-1} + \frac{1}{2}\int_0^1 \underbrace{t}_{v(t)} \times \underbrace{(-2t)(1-t^2)^{n-1}}_{u'(t)} dt \underbrace{=}_{\substack{IPP\\ u(t)=\frac{(1-t^2)^n}{n}\\ v(t)=t\\ u\ et\ v\ sont\ C^1\\ sur\ [0,1]}} I_{n-1} + \frac{1}{2}\left\{\left[\underbrace{t}_{v(t)} \underbrace{\frac{(1-t^2)^n}{n}}_{u(t)}\right]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{1}_{v'(t)} \times \underbrace{\frac{(1-t^2)^n}{n}}_{u(t)} dt\right\}$$
$$= I_{n-1} + \frac{1}{2}\left\{\underbrace{0}_{\substack{car\ n>0\ donc\\ 0^n=0}} \quad - \frac{1}{n} I_{n-1}\right\}$$

Donc, $I_n = I_{n-1} - \frac{1}{2n} I_n$ et ainsi, $\forall n \geq 1, \left(1+\frac{1}{2n}\right) I_n = I_{n-1}$. $Conclusion$: $\forall N \geq 1, I_N = \frac{2N}{2N+1} I_{N-1}\ (**)$.

Alors, $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1} \underbrace{=}_{\substack{(**)\\ avec\\ N=n-1}} \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2(n-1)}{2(n-1)+1} I_{n-2} \underbrace{=}_{\substack{(**)\\ avec\\ N=n-2}} \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2(n-1)}{2(n-1)+1} \times \frac{2(n-2)}{2(n-2)+1} I_{n-3} = \cdots = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2(n-1)}{2(n-1)+1} \times \frac{2(n-2)}{2(n-2)+1} \times \ldots \times \frac{2}{3} \times I_0$.

$$I_n = \frac{(2n)(2n-2)(2n-4)\ldots..2}{(2n+1)(2b-1)(2n-3)\ldots.3}\ car\ I_0 = 1.$$
$$I_n = \frac{(2n)^2(2n-2)^2(2n-4)^2\ldots..2^2}{(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)\ldots.3 \times 2}.$$
$$I_n = \frac{(2^2n^2)(2^2(n-1)^2)(2^2(n-2)^2)\ldots..2^2}{(2n+1)!}$$
$$I_n = \frac{(2^{2n})[n(n-1)(n-2)\ldots.2]^2}{(2n+1)!} = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

c. J'en déduis que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$

d.$\forall t \in [0,1], (1-t^2)^n \geq 0\ donc\ I_n \geq 0$. La suite (I_n) est donc minorée par 0.

De plus, $I_n - I_{n-1} = I_n - \left(1+\frac{1}{2n}\right) I_n = -\frac{1}{2n}\ I_n \leq 0$. La suite (I_n) est donc décroissante. J'en déduiss que la suite (I_n) est convergente.

Exercice 2 Une fonction définie par une intégrale

Soit $\varphi(t) = \frac{1}{\ln(t)}\ et\ f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition et celui de continuité de φ.
2. Monter que $\forall x \in]0,1[, f(x)$ existe (il faudra justifier que l'intégrande est continue sur tout le segment d'intégration) . Monter, de même, que $\forall x \in]1,+\infty[, f(x)$ existe. Ainsi, $D_f = D\varphi =]0,1[\cup]1,+\infty[$.
3. Justifier que φ admet une primitive G sur l'intervalle $]0,1[$ et une primitive H sur l'intervalle $]1,+\infty[$.
4. Soit $x \in]0,1[$. En appliquant le TFCI, exprimer $f(x)$ à l'aide de $G, x\ et\ x^2$. En déduire que f est de classe C^1 sur $]0,1[$ et exprimer $f'(x)$ à l'aide de $\varphi, x\ et\ x^2$. En déduire les variations de f sur $]0,1[$.
5. Faire de même sur l'intervalle $]1,+\infty[$.
6. Soit $x \in]0,1[$.Montrer que : $\frac{x^2-x}{2\ln(x)} \leq f(x) \leq \frac{x^2-x}{\ln(x)}$. En déduire les limites de f en 0.
7. Faire de même en $+\infty$.

<u>1)</u> <u>Domaine de définition</u> : $Soit\ \varphi : \left(t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}\right)$. $D\varphi =]0,1[\cup]1,+\infty[$ et φ est continue sur $D\varphi$.

φ doit être continue sur tout le segment d'intégration pour que notre intégrale existe.

$Soit\ x \in]0,1[$. Alors $x^2 \in]0,1[$. Or , φ est continue sur l'intervalle $]0,1[$ donc sur $[x^2, x]$ et ainsi $f(x)$ existe .
$Soit\ x \in]1,+\infty[$. Alors $x^2 \in]1,+\infty[\ et\ x < x^2\ donc, [x, x^2] \subset]1,+\infty[$. Ainsi, φ est continue sur $[x^2, x]$ et $f(x)$ existe.
Ainsi, $Df = D\varphi$.

2) Dérivabilité et monotonie : Sur l'intervalle $]0,1[$, φ est continue et admet donc une primitive G. Alors, $\forall x \in]0,1[,\ f(x) = G(x^2) - G(x)$.
G et $(x \mapsto x^2)$ sont de classe C^1 sur $]0,1[$ et $\forall x \in]0,1[, x^2 \in]0,1[$, alors par composition, $(x \mapsto G(x^2))$ est de classe C^1 sur $]0,1[$. Il en découle que f est de classe C^1 sur $]0,1[$ comme somme de fonctions de classe C^1 sur $]0,1[$. De plus,
$\forall x \in]0,1[,\ f'(x) = 2xG'(x^2) - G'(x) = 2x\varphi(x^2) - \varphi(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x}{\ln(x)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x-1}{\ln(x)} > 0$. J'en déduis que f est strictement croissante sur l'intervalle $]0,1[$. Idem sur $]1,+\infty[$: f est strictement croissante sur l'intervalle $]1,+\infty[$.

3) Limites aux bords de son domaine de définition.

En 0 ? Soit $x \in]0,1[$. Alors $\forall t \in [x^2,x], \ln(x^2) \leq \ln(t) \leq \ln(x) < 0$ $donc,$ $\frac{1}{\ln(x)} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(x^2)} < 0$ et par croissance de l'opérateur intégral $\int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(x)} dt \leq \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(t)} dt \leq \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(x^2)} dt < 0$.
Ainsi, $\forall x \in]0,1[, \frac{x-x^2}{\ln(x)} \leq -f(x) \leq \frac{x-x^2}{2\ln(x)} < 0$. Or, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-x^2}{\ln(x)} = 0$. Donc par encadrement, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
Mais, $\frac{x-x^2}{\ln(x)} = x\frac{(1-x)}{\ln(x)} = \frac{-x}{\frac{\ln(x)}{x-1}}$. $Donc$, $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-x^2}{\ln(x)} = -1$ et $alors$ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-x^2}{2\ln(x)} = -\frac{1}{2}$. Donc cet encadrement ne permet pas de conclure sur la limite de f en 1^-.
En $+\infty$? Soit $x \in]1,+\infty[$. Alors $\forall t \in [x,x^2], 0 < \ln(x) \leq \ln(t) \leq \ln(x^2)$ $donc,$ $\frac{1}{\ln(x)} \geq \frac{1}{\ln(t)} \geq \frac{1}{\ln(x^2)} > 0$ et par croissance de l'opérateur intégral $\int_{x}^{x^2} \frac{1}{\ln(x)} dt \geq \int_{x}^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt \geq \int_{x}^{x^2} \frac{1}{\ln(x^2)} dt > 0$. Ainsi, $\forall x \in]1,+\infty[, \frac{x^2-x}{\ln(x)} \geq f(x) \geq \frac{x^2-x}{2\ln(x)} > 0$. Or, $\frac{x^2-x}{2\ln(x)} = \frac{x^2}{\ln(x)}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2x}\right)$. Et grâce aux croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-x}{2\ln(x)} = +\infty$. Donc par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Mais ce deuxième encadrement ne permet toujours pas de conclure sur la limite de f en 1^+.
En 1^+ ? Soit $x \in]1,+\infty[$. Alors $[x,x^2] \subset]1,+\infty[$.
Alors, $\forall t \in [x,x^2], t > 1$ $donc, t - 1 > 0$ et $\ln(t) > 0$ et par $conséquent,$ $\frac{1}{t-1} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{x^2}{t-1} \Leftrightarrow \frac{t-1}{x^2} \leq \ln(t) \leq t-1$.

- Posons $g: (t \mapsto \frac{t-1}{x^2} - \ln(t))$. g est dérivable sur $[x,x^2]$, et $\forall t \in [x,x^2], [, g'(t) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{t} < 0$. Donc g est strictement décroissante sur l'intervalle $[x,x^2]$. Or, $g(x) = \frac{x-1}{x^2} - \ln(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \ln(x)$.
- Posons $h: (x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \ln(x))$. h est dérivable sur $[1,+\infty[$ et $\forall x \in [1,+\infty[, h'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x} = \frac{2-x-x^2}{x^3} = \frac{(2+x)(1-x)}{x^3} < 0$. Donc, h est strictement décroissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$. Or, $h(1) = 0$. Donc, $\forall x \in]1,+\infty[, h(x) < 0$.

Il en découle que $g(x) < 0$. Comme g est strictement décroissante sur l'intervalle $[x,x^2]$, je peux conclure que : $\forall t \in [x,x^2], g(t) < 0$ et ainsi, $\frac{t-1}{x^2} \leq \ln(t)$.

- Pour prouver l'autre inégalité : $\ln(t) \leq t-1$, on étudie $m: (t \mapsto (t-1) - \ln(t))$.

Alors, $\forall t \in [x,x^2], 0 < \frac{1}{t-1} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{x^2}{t-1}$. Donc par croissance de l'opérateur intégral, $\int_{x}^{x^2} \frac{1}{t-1} dt \leq f(x) \leq \int_{x}^{x^2} \frac{x^2}{t-1} dt$
i.e., $[ln|t-1|]_x^{x^2} \leq f(x) \leq x^2[ln|t-1|]_x^{x^2}$ i.e. $ln\left|\frac{x^2-1}{x-1}\right| \leq f(x) \leq x^2 ln\left|\frac{x^2-1}{x-1}\right|$. Alors $\forall x \in]1,+\infty[, ln|x+1| \leq f(x) \leq x^2 ln|x+1|$. Or, $\lim\limits_{x\to 1^+} ln|x+1| = \ln(2) = \lim\limits_{x\to 1^+} x^2 ln|x+1|$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \ln(2)$.
En 1^- ? Soit $x \in]0,1[$. Alors $[x^2,x] \subset]0,1[$.
Alors, $\forall t \in [x^2,x], t < 1$ $donc, t - 1 < 0$ et $\ln(t) < 0$ et par $conséquent,$ $\frac{1}{t-1} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{x^2}{t-1} \Leftrightarrow \frac{t-1}{x^2} \leq \ln(t) \leq t-1$.

- Posons $g: (t \mapsto \frac{t-1}{x^2} - \ln(t))$. g est dérivable sur $[x^2,x]$, et $\forall t \in [x^2,x], [, g'(t) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{t} > 0$. Donc g est strictement croissante sur l'intervalle $[x^2,x]$. Or, $g(x^2) = \frac{x^2-1}{x^2} - \ln(x^2) = 1 - \frac{1}{x^2} - 2\ln(x)$.
- Posons $h: (x \mapsto 1 - \frac{1}{x^2} - 2\ln(x))$. h est dérivable sur $]0,1]$ et $\forall x \in]0,1], h'(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{2}{x} = \frac{2(1-x^2)}{x^3} = \frac{2(1+x)(1-x)}{x^3} > 0$. Donc, h est strictement croissante sur l'intervalle $]0,1]$. Or, $h(1) = 0$. Donc, $\forall x \in]0,1[, h(x) < 0$.

Il en découle que $g(x^2) < 0$. Comme g est strictement décroissante sur l'intervalle $[x^2,x]$, $\forall t \in [x^2,x], g(t) < 0$ et ainsi, $\frac{t-1}{x^2} \leq \ln(t)$.
prouver l'autre inégalité : $\ln(t) \leq t-1$, on étudie $m: (t \mapsto (t-1) - \ln(t))$.
Alors, $\forall t \in [x^2,x], 0 < \frac{1}{t-1} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{x^2}{t-1}$. Donc par croissance de l'opérateur intégral, $\int_{x^2}^{x} \frac{1}{t-1} dt \leq -f(x) \leq \int_{x^2}^{x} \frac{x^2}{t-1} dt$

Attention ! les bornes de l'intégrale doivent être croissante pour appliquer la propriété de croissance.

i.e., $[ln|t-1|]_{x^2}^{x} \leq -f(x) \leq x^2[ln|t-1|]_{x^2}^{x}$ i.e. $ln\left|\frac{x-1}{x^2-1}\right| \leq -f(x) \leq x^2 ln\left|\frac{x-1}{x^2-1}\right|$.
Alors, $\forall x \in]0,1[, ln\left|\frac{1}{x+1}\right| \leq -f(x) \leq x^2 ln\left|\frac{1}{x+1}\right|$. Or, $\lim\limits_{x\to 1^+} ln\left|\frac{1}{x+1}\right| = -\ln(2) = \lim\limits_{x\to 1^+} x^2 ln\left|\frac{1}{x+1}\right|$.
Ainsi, $\lim\limits_{x\to 1^-} -f(x) = -\ln(2)$ $i.e.$ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \ln(2)$. Et finalement $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \ln(2)$.