

Corrigé du DL 7

A. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ et telle que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x)f(y)$. (*)**

- 1) Donner un exemple d'une telle application.
- 2) Démontrer que $f(0) \in \{0; 1\}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$.
- 3) Démontrer que si $f(0) = 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.
- 4) Démontrer que si $f(0) = 1$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.
- 5) En déduire, grâce à la continuité de f , que si $f(0) = 1$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$.
- 1) L'exponentielle et la fonction constante égale à 0 et celle égale à 1 sont de bons exemples puisqu'elles sont continues sur $\mathbb{R}$ et vérifient (***) .
- 2) En appliquant (**) avec $x = y = 0$, j'obtiens : $f(0+0) = f(0)f(0)$ i.e. $f(0) = f(0)^2$ i.e. $f(0)(1-f(0)) = 0$ Donc $f(0) = 0$ ou 1.
- Soit t un réel quelconque. J'applique (**) avec $x = y = \frac{t}{2}$ alors $f\left(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}\right) = f\left(\frac{t}{2}\right)f\left(\frac{t}{2}\right)$ donc $f(t) = \left(f\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2 \geq 0$.
Donc $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) \geq 0$.
- 3) Supposons ici que $f(0) = 0$. Soit x un réel quelconque. En appliquant (**) avec $x = x$ et $y = 0$, j'obtiens : $f(x+0) = f(x)f(0) = 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$. f est donc la fonction nulle.
- 4) Supposons ici que $f(0) = 1$. Imaginons un instant qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) = 0$. Alors en appliquant (**) avec $x = x_0$ et $y = -x_0$, j'obtiens : $f(x_0 - x_0) = f(x_0)f(-x_0) = 0$ et par suite $f(0) = 0$ ce qui est faux ! Donc aucun réel n'a une image nulle par f ; autrement dit, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.
- 5) Supposons à nouveau que $f(0) = 1$. Nous savons, alors, que f est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc le corollaire du TVI assure que f conserve un signe constant sur $\mathbb{R}$. Comme de plus, $f(0) > 0$, je peux affirmer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$.

Dans la suite de la partie A, on suppose que $f(0) = 1$.

- 6) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \frac{1}{f(x)}$.
 - 7) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f(nx) = f(x)^n$.
 - 8) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, f(nx) = f(x)^n$.
 - 9) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{f(1)}$.
 - 10) Démontrer que $\forall \alpha \in \mathbb{Q}, f(\alpha) = f(1)^\alpha$.
 - 11) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 10^{-n} \lfloor 10^n x \rfloor$.
 1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq x < u_n + 10^{-n}$
 2. En déduire que x est la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de nombres rationnels.
- On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) = f(1)^{u_n} = e^{u_n \ln f(1)}$.
3. En déduire que $f(x) = f(1)^x$.

Dans cette partie, $f(0) = 1$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$ et en particulier $f(x) \neq 0$.

- 6) Soit x un réel quelconque. En appliquant (**) avec $x = x$ et $y = -x$, j'obtiens : $f(0) = f(x)f(-x)$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \frac{f(0)}{f(x)} = \frac{1}{f(x)}$.

- 6) Soit x un réel. Posons $H(n)$: " $f(nx) = f(x)^n$ ".

$H(0)$ est vraie car $f(0 \times x) = f(0) = 1 = f(x)^0$

Soit n un entier naturel. Supposons que $H(n)$ soit vraie.

Alors $f((n+1)x) = f(nx+x) \stackrel{(***)}{=} f(nx)f(x) = f(x)^n f(x) = f(x)^{n+1}$. OK !!

(**) avec
 $x=x$ et $y=nx$

Le théorème de récurrence permet alors d'affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}, f(nx) = f(x)^n$. Ainsi, x étant un réel quelconque, je peux conclure que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f(nx) = f(x)^n$.

- 7) La propriété à prouver est vraie pour p entier relatif positif d'après 7).

Soit x un réel et p un entier relatif négatif et $n = -p \in \mathbb{N}$. Alors, $f(px) = \frac{1}{f(-px)} = \frac{1}{f(nx)} \stackrel{7)}{=} \frac{1}{f(x)^n} = f(x)^{-n} = f(x)^p$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{Z}, f(px) = f(x)^p$.

- 8) Soit n un entier naturel non nul. Soit x un réel.

Alors, $f(x) = f\left(n \times \frac{x}{n}\right) \stackrel{8)}{=} f\left(\frac{x}{n}\right)^n$. Donc, comme $f(x) > 0$ et $f\left(\frac{x}{n}\right) > 0$, je peux affirmer que $f\left(\frac{x}{n}\right) = \sqrt[n]{f(x)}$.

En particulier, $f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{f(1)}$.

- 9) Soit $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$. Soit x un réel.

Alors, $f(ax) = f\left(\frac{p}{q}x\right) = f\left(p \times \frac{x}{q}\right) \stackrel{8)}{=} \left(f\left(\frac{x}{q}\right)\right)^p \stackrel{9)}{=} \left(\sqrt[q]{f(x)}\right)^p = (f(x))^{\frac{p}{q}} = (f(x))^\alpha$.

10) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 10^{-n} \lfloor 10^n x \rfloor$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Je sais, par définition de la partie entière que: $\lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1$. Donc, comme $10^{-n} > 0$, $10^{-n} \lfloor 10^n x \rfloor \leq x < 10^{-n} \lfloor 10^n x \rfloor + 10^{-n}$.

b. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, x - \left(\frac{1}{10}\right)^n < u_n \leq x$. Comme $\frac{1}{10} \in]-1; 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 0$, et les deux suites, qui encadrent u_n , tendent vers x quand $n \rightarrow +\infty$. Le théorème des gendarmes permet alors de conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ existe et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x$.

De plus, $10^{-n} \lfloor 10^n x \rfloor = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ avec $\lfloor 10^n x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $10^n \in \mathbb{N}$. Donc, u_n est un nombre rationnel.

Ainsi, x est la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de nombres rationnels. On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) = f(1)^{u_n} = e^{u_n \ln[f(1)]}$.

c. $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) = f(1)^{u_n} = e^{u_n \ln[f(1)]}$.

D'une part, comme f est continue en x , $\lim_{t \rightarrow x} f(t) = f(x)$ donc par composition, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(x)$.

D'autre part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \ln[f(1)] = x \ln[f(1)]$ donc, par continuité de l'exponentielle, $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{u_n \ln[f(1)]} = e^{x \ln[f(1)]} = f(1)^x$.

Ainsi, par unicité de la limite, je peux conclure que $f(x) = f(1)^x$.

B. Conclusion :

11) Déterminer toutes les applications continues sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x)f(y)$.

12) Tracer les allures des courbes solutions.

12) Nous venons de montrer que si f est une application continue et vérifiant (***) alors soit f est la fonction nulle, soit f est de la forme $(x \mapsto a^x)$ où $a \in \mathbb{R}^{+*}$.

Réciproquement, le fonction est solution (déjà vu !). Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $f: (x \mapsto a^x)$.

Alors $f(x) = e^{(\ln(a))x} = \exp_a(x)$.

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = e^{(\ln(a))(x+y)} = e^{(\ln(a))x + (\ln(a))y} = e^{(\ln(a))x} e^{(\ln(a))y} = f(x)f(y)$. Donc f est solution.

Ainsi, les applications f continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant (***) sont la fonction nulle, toutes les applications de la forme $(x \mapsto a^x)$ où $a \in \mathbb{R}^{+*}$.

13)

