DS 3

CALCULATRICE NON AUTORISÉE. DURÉE 4 HEURES.

Le sujet comporte 2 pages (1 feuille recto-verso). Les 3 exercices sont indépendants. Quelques consignes :

- Bien lire tout le sujet avant de commencer.
 - Traiter les exercices dans l'ordre que vous souhaitez.
 - Justifier toutes vos réponses. Bien relire chaque raisonnement et s'assurer que :
 - Vous n'avez pas d'emblée affirmé que la propriété à démontrer est vraie (sans justifier). Posez - vous les bonnes questions : je sais que ? ou je cherche quand ou qui ?
 - Le raisonnement est clairement exposé : avec une syntaxe correcte en maths et en français. Relisez-vous pour vous assurer que vous avez bien écrit ce que vous vouliez dire (en maths comme en français).
 - Les liens logiques (donc, si et seulement si, car, alors, si, par conséquent, je sais que, en conclusion, ..., $\Leftrightarrow, \Rightarrow$) sont utilisés et utilisés à bon escient.
 - La phrase réponse, attendue et soulignée (ou encadrée ou surlignée) répond clairement à la question posée.
- Si vous avez un doute sur l'énoncé (erreur d'énoncé ??), n'hésitez pas à demander au professeur-surveillant.**

Dans tout le devoir, on munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On fera un seul dessin par exercice (lorsque cela est demandé).

Exercice 1

On définit la fonction tangente hyperbolique notée th par : $\forall x \in \mathbb{R}, th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}$.

A. Fonction th

1. Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq |sh(x)| < ch(x)$.
2. Justifier que th est définie et bornée sur $\mathbb{R}$. Etudier la parité de th .
3. Justifier que th est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, th'(x) = 1 - th^2(x) = \frac{1}{ch^2(x)}$.
4. Déterminer les variations et limites de th en $\pm\infty$.
5. Tracer la courbe représentative de th dans le plan prédéfini.
6. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, x - \frac{x^3}{3} \leq th(x) \leq x$. Que se passe-t-il sur $\mathbb{R}^-$? Illustrer ce résultat sur le dessin précédent.
7. Calculer l'aire géométrique entre la courbe de th , la droite des abscisses et celles d'équation $x = 1$ et $x = -1$.
8. a) Montrer que th est bijective de $\mathbb{R}$ sur un domaine J à déterminer.
b) Donner une expression de sa bijection réciproque.
c) Tracer la courbe représentative de th^{-1} sur le même dessin.

B. Une somme

9. Soit x un réel non nul fixé.
 - a. Montrer que $th(x) = \frac{2}{th(2x)} - \frac{1}{th(x)}$.
 - b. En déduire la somme $S_n(x) = \sum_{k=0}^n 2^{-k} th(2^{-k}x)$ où n entier naturel.
 - c. Justifier que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{thx}{x} = 1$.
 - d. En déduire la limite de la suite $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ (x est fixé et n tend vers $+\infty$).

C. Une dernière relation

10. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \text{Arcsin}(th(x)) = \text{Arctan}(sh(x))$.

Exercice 2

Soit g la fonction définie par : $g(x) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

1. Déterminer Dg le domaine de définition de g . Que peut-on dire de la parité et de la continuité de g ?

A. NOUVELLE EXPRESSION DE g PAR DERIVATION.

2. Expliquer pourquoi g est au moins dérivable sur $D' = Dg \setminus \{0\}$.

3. Montrer que : $\forall x \in D', g'(x) = 2 \times \frac{1}{1+x^2} \times \frac{x}{|x|}$.

4. En déduire que : $\forall x \in D, g(x) = \begin{cases} 2\operatorname{Arctan}(x) & \text{si } x \geq 0 \\ -2\operatorname{Arctan}(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$

B. NOUVELLE EXPRESSION DE g PAR CHANGEMENT DE VARIABLE.

5. Soit $x \in Dg$.

a) Justifier qu'il existe un unique $t \in]-\pi; \pi[$ tel que : $x = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$. Exprimer t en fonction de x .

b) Montrer que $\frac{1-x^2}{1+x^2} = \cos(t)$.

6. Redémontrer alors le résultat de la question 4 à savoir : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} 2\operatorname{Arctan}(x) & \text{si } x \geq 0 \\ -2\operatorname{Arctan}(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$

C. TANGENTES PARTICULIERES ET TRACE DE Cg .

7. Justifier que g n'est pas dérivable en 0. Quelle est l'allure de Cg au voisinage de 0 ?

8. Tracer Cg .

9. Calculer l'aire algébrique de la surface délimitée par Cg , les droites d'équation $x = 1, x = -1$ et l'axe des abscisses.

Exercice 3

On pose $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{t^2-t-1}{t^4+t^2+1}$.

A. Factorisation de $P(t) = t^4 + t^2 + 1$ dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$.

1. Justifier que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est racine complexe de P . En déduire que l'on peut factoriser $P(t)$ par $(t^2 + t + 1)$.

2. Ecrire alors $P(t)$ comme produit de deux expressions polynomiales de degré 2 à discriminant négatif.

B. Décomposition en éléments simples de f

3. Quelle est la forme de la décomposition en éléments simples de f ?

4. Déterminer les coefficients de cette décomposition. Prenez le temps de vérifier votre résultat car la suite de l'exercice en dépend.

C. Intégration de f sur $[0, 1]$.

On pose $\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = \int_0^x \frac{t-1}{t^2-t+1} dt$.

5. Que représente H pour la fonction $h: \left(t \mapsto \frac{t-1}{t^2-t+1}\right)$?

6. Soit x un réel. Calculer $H(x)$.

7. Montrer que $\int_0^1 \frac{t}{t^2+t+1} dt = \int_0^1 \frac{2t+1}{t^2+t+1} dt - H(-1)$.

8. En déduire que $\int_0^1 f(t) dt = -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \ln(3)$.

D. Limite d'un somme.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n f(k)$.

9. Simplifier S_n .

10. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.