CORRIGE DU DS 3

Exercice 1 **On définit la fonction tangente hyperbolique notée th par : pour tout réel x , $th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}$**

A. Fonction th

1. Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq |sh(x)| < ch(x)$.
2. Justifier que th est définie et bornée sur $\mathbb{R}$. Etudier la parité de th.
3. Justifier que th est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, th'(x) = 1 - th^2(x) = \frac{1}{ch^2(x)}$.
4. Déterminer les variations et limites de th en $\pm\infty$.
5. Tracer la courbe représentative de th dans le plan prédéfini en mettant en évidence le résultat 5.
6. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, x - \frac{x^3}{3} \leq th(x) \leq x$. Que se passe-t-il sur $\mathbb{R}^-$? Illustrer ce résultat sur la courbe de th.
7. Calculer l'aire géométrique entre la courbe de th, la droite des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = -1$.
8. a) Montrer que th est bijective de $\mathbb{R}$ sur un domaine J à déterminer.
   b) Donner une expression de sa bijection réciproque. Tracer la courbe représentative de th^{-1} sur le même dessin que th.

B. Une somme

9. Soit x un réel non nul fixé.
   a. Montrer que $th(x) = \frac{2}{th(2x)} - \frac{1}{th(x)}$.
   b. En déduire la somme $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} th(2^{-k}x)$ où n entier naturel.
   c. Justifier que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{thx}{x} = 1$.
   d. En déduire la limite de la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ (x est fixé et n tend vers $+\infty$).

C. Une dernière relation

10. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, Arcsin(th(x)) = Arctan(sh(x))$.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq |sh(x)| = \left|\frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2}\right| \underset{\leq}{\overset{\substack{inégalité\\triangulaire}}{}} \left|\frac{e^x}{2}\right| + \left|\frac{e^{-x}}{2}\right| = ch(x)$.

De plus, $|sh(x)| = ch(x) \Leftrightarrow sh(x) = \pm ch(x) \Leftrightarrow \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2} = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2}$ ou $\frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2} = -\frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2} \Leftrightarrow e^{-x} = 0$ ou $e^x = 0$ ce qui est impossible. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R} |sh(x)| \neq ch(x)$. Donc finalement, $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq |sh(x)| < ch(x)$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}, sh(x)$ et $ch(x)$ existent et $ch(x) > 0$ donc $th(x)$ existe et est du signe de $sh(x)$ soit positif sur $\mathbb{R}^+$ et négatif sur $\mathbb{R}^-$ et s'annule en 0 uniquement. ch étant paire et sh impaire, th est impaire car $th(-x) = \frac{sh(-x)}{ch(-x)} = -\frac{sh(x)}{ch(x)} = -th(x)$.

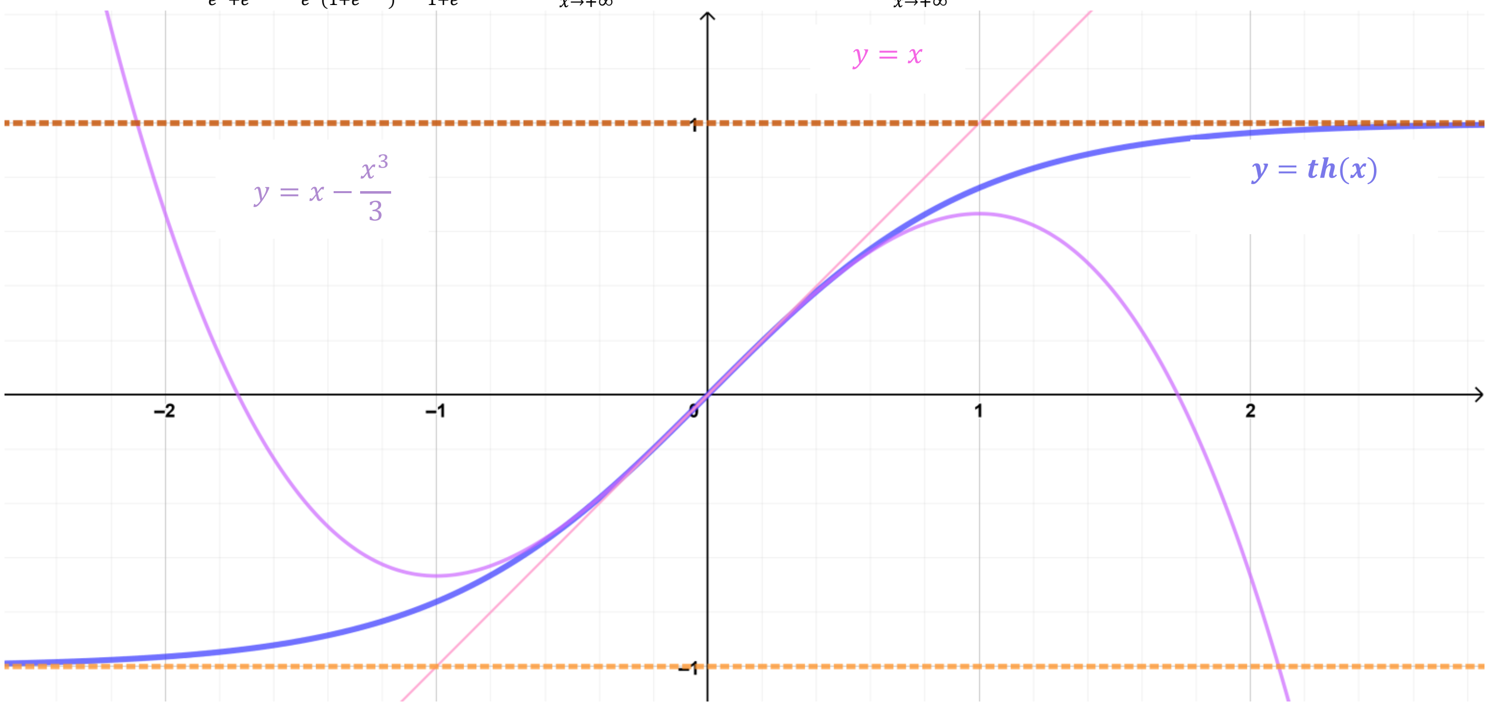
$\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq |x| \leq |sh(x)| < ch(x)$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq |th(x)| = \frac{|sh(x)|}{ch(x)} < 1$. Ainsi, th est minorée par -1 et majorée par 1.

3. Enfin, ch et sh étant continues et dérivables sur $\mathbb{R}$, th est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, th'(x) = \frac{ch^2(x) - sh^2(x)}{ch^2(x)} = \frac{1}{ch^2(x)} = \frac{ch^2(x)}{ch^2(x)} - \frac{sh^2(x)}{ch^2(x)} = 1 - th^2(x) > 0.$$

4. $\forall x \in \mathbb{R}, th'(x) > 0$ car $|th(x)| < 1$. Donc th est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

De plus, $t(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} th(x) = 1$. Et par imparité, $\lim\limits_{x\to+\infty} th(x) = -\infty$.



6. Posons $g(x) = x - th(x)$ et $h(x) = x - th(x) - \frac{x^3}{3}$.

g et h sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall x \geq 0, g'(x) = 1 - th'(x) = 1 - 1 + th^2(x) = th^2(x) \geq 0$ *et* $h'(x) = th^2(x) - x^2$.
Donc g est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et comme $g(0) = 0, g$ est positive sur $\mathbb{R}^+$. Par suite, $\forall x \in \mathbb{R}^+, 0 \leq x - th(x)$ et par conséquent, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $0 \leq th(x) \leq x$ donc $h'(x) \leq 0$. Donc h est décroissante sur $\mathbb{R}^+$et comme $h(0) = 0, h$ est négative sur $\mathbb{R}^+$.
Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^+, x - \frac{x^3}{3} \leq th(x) \leq x$. Comme les trois fonctions sont impaires, $\forall x \in \mathbb{R}^-, x - \frac{x^3}{3} \geq th(x) \geq x$.

Il s'agit de calculer $I = 2\int_0^1 th(t)dt . I = 2\int_0^1 \frac{sh(t)}{ch(t)}dt = 2\left[\ln\left(ch(t)\right)\right]_0^1 = 2\ln\left(ch(1)\right)$.

7\. a) th est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ donc le $TBCSM$ assure que $J = th(\mathbb{R}) =]\lim\limits_{-\infty} th, \lim\limits_{+\infty} th[=]-1; 1[$ et th est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1\,;1[$. Tout réel de $]-1\,;1[$ admet donc un unique antécédent par th.

b) Soit $y \in]-1\,;1[$ *et* x son antécédent par th. Posons $X = e^x$.

Alors $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{X - \frac{1}{X}}{X + \frac{1}{X}}$ donc $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{X^2 - 1}{X^2 + 1}$ et par suite , $X^2 y + y = X^2 - 1$ *donc* $X^2(1-y) = y + 1$. Alors $X^2 = \frac{1+y}{1-y}$ et finalement $X = \pm\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$. Mais $X > 0$ car X est une exponentielle. Donc $e^x = X = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$ et ainsi, $x = \ln\left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$.

(Remarque : $\frac{1+y}{1-y} > 0$ car $y \in]-1\,;1[$). Ainsi, $\forall y \in]-1\,;1[\,, th^{-1}(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$.

8\. a) Soit x un réel non nul. $\frac{2}{th(2x)} - \frac{1}{th(x)} = \frac{2ch(2x)}{sh(2x)} - \frac{ch(x)}{sh(x)} = \frac{2[2ch^{2(x)} - 1]}{2ch(x)sh(x)} - \frac{ch(x)}{sh(x)} = \frac{[2ch^2(x) - 1]}{ch(x)sh(x)} - \frac{ch^{2(x)}}{sh(x)ch(x)} = \frac{ch^2(x) - 1}{sh(x)ch(x)} = \frac{sh^2(x)}{sh(x)ch(x)} = th(x)$.

b) Soit n un entier naturel. $S_n(x) = \sum_{k=0}^n 2^{-k} th(2^{-k}x) = \sum_{k=0}^n \underbrace{\frac{2^{1-k}}{th(2^{1-k}x)}}_{u_k} - \underbrace{\frac{2^{-k}}{th(2^{-k}x)}}_{u_{k+1}} \underbrace{=}_{telescopage} \frac{2}{th(2x)} - \frac{2^{-n}}{th(2^{-n}x)}$.

c) Comme th est dérivable en 0 , $\lim\limits_{x \to 0} \frac{thx}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{thx - th(0)}{x - 0} = th'(0) = 1$.

d) $\frac{2^{-n}}{th(2^{-n}x)} = \frac{1}{x}\frac{1}{\frac{th(2^{-n}x)}{2^{-n}x}}. Or, \begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} 2^{-n}x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} \frac{thx}{x} = 1 \end{cases}$. Donc par composition, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{th(2^{-n}x)}{2^{-n}x} = 1$. Alors, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2^{-n}}{th(2^{-n}x)} = \frac{1}{x}$. Et j'en déduis que : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n(x) = \frac{2}{th(2x)} - \frac{1}{x}$.

Exercice 2

Soit g la fonction définie par : $g(x) = Arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

1. Déterminer Dg le domaine de définition de g . Que pouvez-vous dire de la parité et de la continuité de g ?

A. NOUVELLE EXPRESSION DE g PAR DERIVATION.

2. Expliquer pourquoi g est au moins dérivable sur $D' = Dg\backslash\{0\}$.
3. Montrer que : $\forall x \in D', g'(x) = 2 \times \frac{1}{1+x^2} \times \frac{x}{|x|}$.
4. En déduire que : $\forall x \in D, g(x) = \begin{cases} 2Arctan(x) \; si \; x \geq 0 \\ -2Arctan(x) \; si \; x < 0 \end{cases}$.

B. NOUVELLE EXPRESSION DE g PAR CHANGEMENT DE VARIABLE.

5. Soit $x \in Dg$.
   a) Justifier qu'il existe un unique $t \in]-\pi; \pi[$ tel que : $x = tan\left(\frac{t}{2}\right)$. Exprimer t en fonction de x.
   b) Montrer que $\frac{1-x^2}{1+x^2} = \cos(t)$.
6. Retrouver le résultat de la question 5 : $\forall x \in \mathbb{R},\; g(x) = \begin{cases} 2Arctan(x) \; si \; x \geq 0 \\ -2Arctan(x) \; si \; x < 0 \end{cases}$.

C. TANGENTES PARTICULIERES ET TRACE DE Cg.

7. Justifier que g n'est pas dérivable en 0 . Quelle est l'allure de Cg au voisinage de O ? (demi-tangentes ?)
8. Tracer Cg.
9. Calculer l'aire algébrique de la surface délimitée par Cg , les droites d'équation $x = 1, x = -1$ et l'axe des abscisses.

1.$g(x)$ *existe* $\Leftrightarrow -1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1 \Leftrightarrow -1 - x^2 \leq 1 - x^2 \leq 1 + x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq 0 \\ 2x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$. Donc $Dg = \mathbb{R}$.

2.Dans l'expression de g seule la fonction $Arccos$ n'est pas dérivable sur son propre domaine de définition. Arccos n'est dérivable que sur]1,1[. Or, $-1 < \frac{1-x^2}{1+x^2} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < 0 \\ 2x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^*$.
Par conséquent, g est donc dérivable au moins sur $\mathbb{R}^*$.

3.$\forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) = u'(x)\left(-\frac{1}{\sqrt{1-u^2(x)}}\right)$ *avec* $u(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ *et* $u'(x) = \frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$. Donc ,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}\right) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x^2)^2 - (1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}}\right) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}\left(-\frac{1}{\frac{\sqrt{(1+x^2)^2 - (1-x^2)^2}}{\sqrt{(1+x^2)^2}}}\right) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}\left(-\frac{1}{\frac{\sqrt{4x^2}}{1+x^2}}\right).$$

$g'(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}\left(-\frac{1+x^2}{|2x|}\right) = \frac{2x}{|x|}\frac{1}{1+x^2} = \begin{cases} 2Arctan'(x) \; si \; x > 0 \\ -2Arctan'(x) \; si \; x < 0 \end{cases}$.

4\. Les fonctions 2 $Arctan$ et g sont deux primitives de la même fonction $\left(x \mapsto \frac{1}{1+x^2}\right)$ sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$. Donc il existe une constante réelle c telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, g(x) = 2Arctan(x) + c$.

$-2\,Arctan$ et g sont deux primitives de la même fonction $\left(x \mapsto \frac{-1}{1+x^2}\right)$ sur l'intervalle $\mathbb{R}^{-*}$. Donc il existe une constante réelle d telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^{-*}, g(x) = -2Arctan(x) + d$.

De plus, $g(0) = Arccos(1) = 0 = 2Arctan(0)$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} 2Arctan(x) & si\ x \geq 0 \\ -2Arctan(x) & si\ x < 0 \end{cases}$.

5. La fonction φ: $\left(t \mapsto \tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-\pi, \pi[$. Donc, le TBCSM assure que : $\varphi(]-\pi,\pi[) =]\lim_{-\pi^+}\varphi, \lim_{\pi^-}\varphi[= \mathbb{R}$ et φ est bijective de $]-\pi,\pi[$ sur $\mathbb{R}$. Donc tout réel x admet un unique antécédent $t \in]-\pi,\pi[$ par φ. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \exists!\, t \in]-\pi,\pi[\ /\ x = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$.

6. $g(x) = Arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = Arccos\left(\frac{1-\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}\right) = Arccos\left(\left(1-\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\right) = Arccos\left(cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right) = Arccos(\cos(t))$.

<u>**1^er^ cas : $t \in [0, \pi[$ i.e. $x \geq 0$.**</u> Alors $g(x) = t = 2Arctan(x)$.

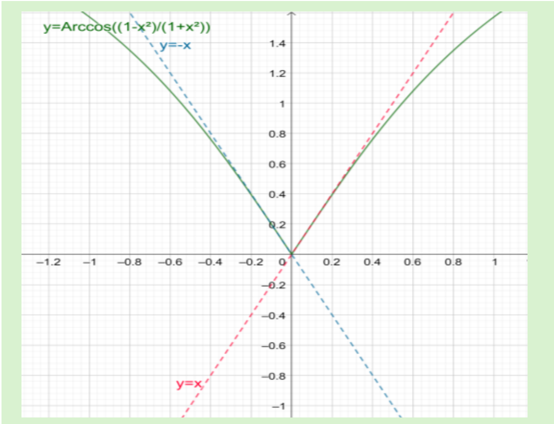
<u>**1^er^ cas : $t \in]-\pi, 0[$ i.e. $x < 0$.**</u> Alors $g(x) = Arccos(\cos(-t)) \underbrace{=}_{\substack{car \\ -t \in [0,\pi]}} -t = -2Arctan(x)$.

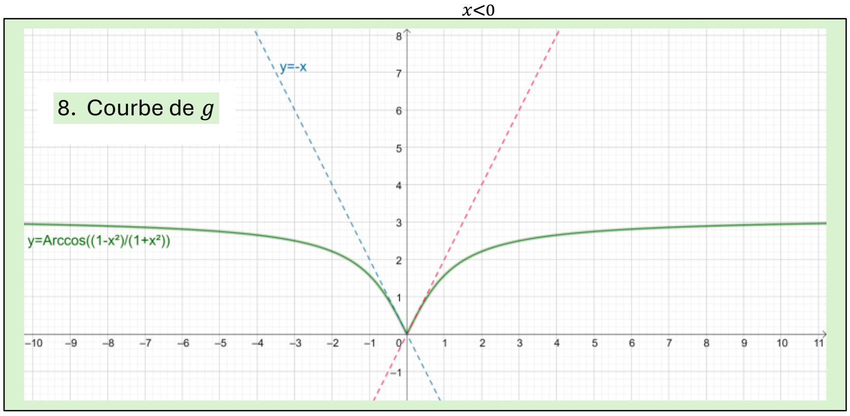
Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} 2Arctan(x) & si\ x \geq 0 \\ -2Arctan(x) & si\ x < 0 \end{cases}$.

7. $\forall x > 0, \tau(x) = \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = 2\frac{Arctan(x)}{x}$. $Donc$, $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \tau(x) = 2$.

$\forall x < 0, \tau(x) = \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = -2\frac{Arctan(x)}{x}$. $Donc$, $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \tau(x) = -2$.

Donc, g n'est pas dérivable en 0 et Cg a l'allure suivante au voisinage de 0 :





9.Il s'agit de calculer $I = \int_{-1}^{1} g(t)dt$.

g étant paire, $\int_{-1}^{1} g(t)dt = 2\int_0^1 g(t)dt = 2\int_0^1 2Arctan(t)dt = 4\int_0^1 Arctan(t)dt$

$\underbrace{=}_{\substack{IPP \\ u(t)=Arctan(t) \\ v(t)=t}} 4\left\{[tArctan(t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt\right\} = 4\left\{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t}{1+t^2}dt\right\} = 4\left\{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}[\ln(1+t^2)]_0^1\right\} = 4\left\{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)\right\}$

Ainsi, $I = \pi - 2\ln(2)$.

Exercice 3

On pose $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{t^2-t-1}{t^4+t^2+1}$.

A. Factorisation de $P(t) = t^4 + t^2 + 1$ dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$.

1. Justifier que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est racine complexe de P. En déduire que l'on peut factoriser $P(t)$ par $(t^2 + t + 1)$.

2. Ecrire alors $P(t)$ comme produit de deux expressions polynomiales de degré 2 à discriminant négatif.

B. Décomposition en éléments simples de f

3. Quelle est la forme de la décomposition en éléments simples de f ?

4. Déterminer les coefficients de cette décomposition. Prenez le temps de vérifier votre conclusion car une partie de la suite de l'exercice est basée sur cette décomposition.

C. Intégration de f sur $[0,1]$. On pose $\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = \int_0^x \frac{t-1}{t^2-t+1}dt$.

5. Que représente H pour la fonction h: $\left(t \mapsto \frac{t-1}{t^2-t+1}\right)$?

6. Soit x un réel. Calculer $H(x)$.

7. Soit x un réel. Montrer que $H(x) = \int_0^{-x} \frac{t+1}{t^2+t+1}dt$.

8. En déduire que $\int_0^1 \frac{t}{t^2+t+1}dt = \int_0^1 \frac{2t+1}{t^2+t+1}dt - H(-1)$.

9. En déduire que $\int_0^1 f(t)\,dt = -\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\ln(3)$.

D. Limite d'un somme. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} f(k)$.

10. Simplifier S_n.

11. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

1.$P(j) = j^4 + j^2 + 1 \underset{}{\overset{car\ j^3=1}{=}} j + j^2 + 1 = 0$. Donc j est racine de P. Comme P est à coefficients réels, $\bar{j}$ est aussi racine de P et je peux donc factoriser $P(t)$ par $(t-j)(t-\bar{j}) = (t^2+t+1)$.

2.En effectuant la division euclidienne de $P(t)$ par t^2+t+1, j'obtiens : $P(t) = (t^2+t+1)(t^2-t+1)\ avec\ \Delta_{t^2+t+1} < 0$ et $\Delta_{t^2-t+1} < 0$.

3.D'après le cours, comme $degN(t) < degP(t)$ et $P(t) = (t^2+t+1)(t^2-t+1)\ avec\ \Delta_{t^2+t+1} < 0$ et $\Delta_{t^2-t+1} < 0$, il existe quatre réels a,b,c et d tels que : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{t^2-t-1}{t^4+t^2+1} = \frac{at+b}{t^2+t+1} + \frac{ct+d}{t^2-t+1}$.

4. Alors, $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{t^2-t-1}{t^4+t^2+1} = \frac{(at+b)(t^2-t+1)+(ct+d)(t^2+t+1)}{t^2+t+1} = \frac{(a+c)t^3+(-a+b+c+d)t^2+(a-b+c+d)t+b+d}{t^2+t+1}$.

Donc il suffit de trouver a, b, c et d tels que : $\begin{cases} a+c=0 \\ -a+b+c+d=1 \\ a-b+c+d=-1 \\ b+d=-1 \end{cases}$ i.e. : $\begin{cases} c=-a \\ -2a-1=1 \\ -2b-1=-1 \\ d=-1-b \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} c=1 \\ a=-1 \\ b=0 \\ d=-1 \end{cases}$. Ainsi,

$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{t^2-t-1}{t^4+t^2+1} = \frac{-t}{t^2+t+1} + \frac{t-1}{t^2-t+1}$.

5. Comme h est continue sur $\mathbb{R}$, H est la primitive de h sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 d'après le TFI.

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. $H(x) = \int_0^x \frac{t-1}{t^2-t+1}dt$.

$$\frac{t-1}{t^2-t+1} = \frac{\frac{1}{2}(2t-1)-\frac{1}{2}}{t^2-t+1} = \frac{1}{2}.\frac{2t-1}{t^2-t+1} - \frac{1}{2}.\frac{1}{t^2-t+1} = \frac{1}{2}.\frac{2t-1}{t^2-t+1} - \frac{1}{2}.\frac{1}{\frac{3}{4}\left[\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]} = \frac{1}{2}\frac{2t-1}{t^2-t+1} - \frac{2}{3}\frac{1}{\left[\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]}$$

Donc, $H(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \underbrace{\frac{2t-1}{t^2-t+1}}_{\frac{P'(t)}{P(t)}}dt - \frac{2}{3}\int_0^x \frac{1}{\left[\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]}dt \underbrace{=}_{\substack{CV \\ u=\frac{2t-1}{\sqrt{3}} \\ dt=\frac{\sqrt{3}}{2}du \\ t=0\Leftrightarrow u=-\frac{1}{\sqrt{3}} \\ t=x\Leftrightarrow u=\frac{2x-1}{\sqrt{3}}}} \frac{1}{2}[\ln(t^2-t+1)]_0^x - \frac{2}{3}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2x-1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{[u^2+1]}\frac{\sqrt{3}}{2}du$

$H(x) = \frac{1}{2}[\ln(t^2-t+1)]_0^x - \frac{1}{\sqrt{3}}[Arctan(t)]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2x-1}{\sqrt{3}}}$

$H(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}Arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Ainsi, $\boxed{H(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6}}$

7. $H(x) = \int_0^x \frac{t-1}{t^2-t+1}dt \underbrace{=}_{\substack{CV \\ u=-t \\ dt=-du \\ t=0\Leftrightarrow u=0 \\ t=x\Leftrightarrow u=-x}} \int_0^{-x} \frac{-u-1}{u^2+u+1}(-du) = \int_0^{-x} \frac{u+1}{u^2+u+1}du$.

8.$\int_0^1 \frac{u}{u^2+u+1}du = \int_0^1 \frac{2u+1-(u+1)}{u^2+u+1}du = \int_0^1 \frac{2u+1}{u^2+u+1}du - \int_0^1 \frac{(u+1)}{u^2+u+1}du \overset{\substack{d'après \\ ce\ qui\ précède}}{=} \int_0^1 \frac{2u+1}{u^2+u+1}du - H(-1) = [\ln(u^2+u+1)]_0^1 - H(-1)$

Donc, $\int_0^1 \frac{u}{u^2+u+1}du = \ln(3) - H(-1)$.

9.$\int_0^1 \frac{t^2-t-1}{t^4+t^2+1}dt = \int_0^1 \frac{t-1}{t^2-t+1}dt - \int_0^1 \frac{t}{t^2+t+1}dt = H(1) + H(-1) - \ln(3)$

$= \frac{-1}{\sqrt{3}}\left[Arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + Arctan(-\sqrt{3})\right] - \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\ln(3)$

$\int_0^1 \frac{t^2-t-1}{t^4+t^2+1}dt = \frac{-1}{\sqrt{3}}\left[\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right] - \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\ln(3) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\ln(3)$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n f(k) = \sum_{k=0}^n \underbrace{\frac{k-1}{k^2-k+1}}_{u_k} - \underbrace{\frac{k}{k^2+k+1}}_{u_{k+1}} = u_0 - u_{n+1} = -1 + \frac{n}{n^2+n+1} = -1 + \frac{1}{n+1+\frac{1}{n}}$. J'en déduis que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = -1$.