Vacances de Noël

1. Reposez -vous ! Profitez de vos amis, de votre famille. Faites-vous plaisir tous les jours .....
2. Remettez -vous à travailler tous les jours (sauf 1er janvier = récupération) à partir du 26 décembre .... toutes les matières.
3. En maths :
   - Retravailler le cours et exemples sur les dérivées $n$ièmes, comparaisons et DL pour préparer la rentrée (DC et DS) Cf ci-dessous !!!
   - Chercher le DL 8 .

A. Le lundi 6 janvier : un DC de cours, connaitre par cœur et savoir parfaitement énoncer

1. Le critère de classe C^n
2. Les développements limités des fonctions usuelles
3. Le théorème de Taylor-Young
4. Le théorème d'intégration terme à terme.

B. Le jeudi 9 : un DC d'exercices, retravaillez les exercices et exemples du cours et TD et exercez-vous :

- Savoir retrouver très vite les dérivées nièmes des fonctinos usuelles
- Connaitre le critère de classe C^n (en colle les hypothèses et les conclusions de ce théorème n'étaient pas claires !!!)
- Connaitre parfaitement les équivalents et DL usuels
- Connaitre la règle de composition à droite des équivalents
- Savoir se ramener en 0 (même méthode pour les limites, équivalents et DL)
- Connaitre et savoir utiliser le théorème d'intégration terme à terme
- Savoir composer DL
- Savoir utiliser les DL pour
  - ✓ obtenir une limite et un équivalent
  - ✓ justifier une dérivabilité et la position de la courbe par rapport à sa tangente
  - ✓ existence d'une asymptote et position de la courbe par rapport à cette asymptote
  - ✓ obtenir le DL d'une bijection réciproque dont on ne connait pas l'expression
  - ✓ obtenir le DL d'une fonction dont l'expression est intégrale

1. Critère de classe C^n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. Comparer au sens de l'inclusion $D^n(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $C^{n-1}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. On pose $\forall x \neq 0, f(x) = x^{2n}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
   a. Montre que f est de classe C^∞sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $a_p, b_p, a_{p+1}, b_{p+1} \dots, a_{2p}, b_{2p}$ réels tels que :
   $\begin{cases} a_{2p} = 0 \\ b_{2p} \neq 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a_{2p} \neq 0 \\ b_{2p} = 0 \end{cases}$ $et\ \forall x \neq 0, f^{(p)}(x) = \left(a_p x^{2n-p} + a_{p+1}x^{2n-(p+1)} + \dots + a_{2p}x^{2n-2p}\right)\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \left(b_p x^{2n-p} + b_{p+1}x^{2n-(p+1)} + \dots + b_{2p}x^{2n-2p}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)$.
   b. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On pose $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x)\ si\ x \neq 0 \\ 0\ si\ x = 0 \end{cases}$.
   c. Montrer que $\tilde{f}$ de classe C^{n-1}sur $\mathbb{R}$ mais $\tilde{f}^{(n-1)}$ n'est pas dérivable en 0.
   d. Que peut-on alors dire de l'inclusion entre $D^n(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $C^{n-1}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ établie au 1. ?

2. Déterminer un équivalent simple

- $f(x) = \frac{x^4 - \mathrm{Arctan}^2(x)\sqrt[3]{\sqrt[5]{1-x}-1}}{\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \ln(x)}$ en 0 et en $+\infty$ indication : équivalents du numérateur et dénominateur-comparer les équivalents des deux termes
- $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ en $-\infty$ indication : composition à droite (pour ln et sin), puissance indépendante de x (pour $\sqrt{\ }$) puis produit et quotient .
- $f(x) = 2^{2^x} - 2$ en 0 indication : utiliser le résultat $f\ est\ dérivable\ en\ a\ et\ f'(a) \dots \dots . \Longrightarrow f(x) - f(x) \sim_a \dots\dots$
- $f(x) = \ln(\sin(x))$ en $\frac{\pi}{2}$ indication : se ramener en 0 et utiliser la composée à droite des équivalents
- $f(x) = \sqrt[p]{1+px} - \sqrt[q]{1+qx} + \left(\frac{p-q}{2}\right)x^2$ en 0 indication : utiliser les $DL_3(0)$ de $\sqrt[p]{1+px}$ et $\sqrt[q]{1+qx}$.
- Montrer que $Arccos(x) \sim_1 \sqrt{2}\sqrt{1-x}$ indication : calculer $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\mathrm{Arccos}(x)}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}}$ en effectuant le changement de variable $t = Arccos(x)$
- Ranger par ordre de «négligeabilité» au voisinage de $+\infty$ les fonctions suivantes : $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = \sqrt[3]{x}$, $f_3(x) = xln(x)$, $f_4(x) = (ln(x))^{2025}$, $f_5(x) = \sin(x)$, $f_6(x) = \ln(x)^x$, $f_7(x) = 2^x\ln(x)$, $f_8(x) = \mathrm{e}^x$, $f_9(x) = \frac{x}{\ln(x)}$, $f_{10}(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{\ln(x)}}$, $f_{11}(x) = x^2\sqrt{\ln(x)}$, $f_{12}(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}$. indication : croissance comparée et si doute limite en $+\infty$ du quotient.
- Soit a un réel ou un infini. Soit f et g deux fonctions définies sur un même voisinage V de a.
  1. Montrer que $e^f \sim_a e^g \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) - g(x) = 0$. Indication : caractérisation par le quotient
  2. Montrer que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0^+\ ou + \infty$ et $f \sim_a g \Longrightarrow \ln(f) \sim_a \ln(g)$.

3. Déterminer un développement limité en a d'ordre n

- $f(x) = \sqrt[3]{9 - 2\sin(x)}$ $a = \frac{\pi}{6}, n = 4$ indication : se ramener en 0 – développer $sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right)$- remplacer sin(t) et cos(t) par leur $DL_4(0)$- faire apparaitre $(1 + u(t))^{\frac{1}{3}}$ $avec \lim_{x\to 0} u(t) = 0$ en utiliser les propriétés de $\sqrt[3]{\ }$ puis composer- se ramener en $\frac{\pi}{6}$.
- Expliquer pourquoi $f(x) = \frac{Arctan(x)}{\ln(\cos(x))}$ n'a pas de DL en 0. Indication : chercher rapidement un éuqivalent puis le limite de f en 0 et conclure.
- $f(x) = \frac{xArctan(x)}{\ln(\cos(x))}$ $a = 0, n = 4$. indication : Remplacer $Arctan(x)$ et $ln(cos(x))$ par un DL(0) (ordre ??) et mettre en facteur les termes dominants au numérateur et au dénominateur et les simplifier … réévaluer l'ordre nécessaire des DL pour obtenir le résultat souhaité … puis terminer avec une composée par le DL $\frac{1}{1+u}$ piuis par un produit.
- $f(x) = Arccos(x)^{\operatorname{Arcsin}(x)}$ $a = 0, n = 3$ indication : forme exponentielle- DL(0) d'$Arccos$: utiliser $Arccos(x) = \frac{\pi}{2} - Arcsin(x)$. Utiliser les propriétés de ln et exp pour se ramenenr à du ln $(1 + u(x) et \exp(v(x))$ $telles\ que\ \lim_{x\to 0} u(x) = 0 = \lim_{x\to 0} v(x)$
- $f(x) = Arcsin\left(\frac{\tan(x)}{2}\right)$ $a = \frac{\pi}{3}, n = 5$ indication : se ramener en 0 -TITT- se ramener en $\frac{\pi}{3}$

4. Calculer des limites

- $\lim_{x\to\frac{1}{2}}(2x^2 - 3x + 1)\tan(\pi x)$ Indication : se ramener en 0 et utiliser les équivalents t et règles de calcul sur les équivalents.
- $\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{ch(x)}$ Indication : passer en exponentielle puis chercher la limite de l'exposant en utiliser les équivalent usuels.
- $\lim_{x\to 0} \sin(x)^{Artan(x)}$ Indication : passer en exponentielle et chercher la limite de l'exposant ; comme la composée à gauche est interdite dans les équivalents, remplacer $sin(x)$ par son $DL_1(0)$ dans le ln et utiliser les propriétés du ln ….. ensuite c'est un produit donc les équivalents « fonctionnent ».
- $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{cos^2 x} + \frac{1}{\ln(sin(x))}\right)$ Indication : se ramener en 0 … on a alors une somme de deux fonctions l'une équivalente à $\frac{2}{x^2}$ l'autre à $-\frac{2}{x^2}$. donc les équivalents ne vont pas permettre de conclure. Chercher un développement asymptotique à 2 terme significatifs de $\frac{2}{sin^2 x}$ et de $\frac{1}{\ln(cos(x))}$ … pour cela , remplacer $cos^2(x)$ par son $DL_{\,2}(0)$ et mettre x^2 en facteur au dénominateur pour faire apparaitre $1 + u(x)$ au dénominateur avec $\lim_{x\to 0} u(x) = 0$. Idem pour $\frac{1}{\ln(cos(x))}$.
- $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x$ où $a > 0\ et\ b > 0$, indépendants de x. Indication : se ramener en 0 … passer en exponentielle . Composition à droite pour le ln et ensuite utiliser les $DL_1(0)$ de $2^t = e^{t\ln(2)}\ et\ 3^t$.

5. Justifier qu'une fonction est dérivable en un point ou que des demi-tangentes existent en un point et obtenir la position de la courbe par rapport à sa tangente ou demi-tangentes en ce point

Déterminer l'équation des deux demi-tangentes en 0 de Cf où $f\colon\left(x \mapsto \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}\right)$ et la position de Cf par rapport à ces demi-tangentes .

6. Justifier l'existence d'une asymptote et obtenir son équation et la position de la courbe par rapport à cette asymptote

Déterminer l'équation de l'asymptote à Cf en $+\infty$ et la position de cette aymptote par rapport à Cf avec $f(x) = \frac{1-x+4x^2}{2x-3}e^{\frac{1}{x-3}}$.

7. Déterminer le DL d'une bijection réciproque

Justifier que $\varphi : \left(x \mapsto xe^{x^2}\right)$. est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et φ^{-1}admet un $DL_{\,5}(0)$. Déterminer le $DL_{\,5}(0)$ $de\ \varphi^{-1}$.

8. Déterminer le DL d'une fonction dont l'expression est sous forme intégrale

Soit $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt$. Déterminer son DL en 0 à l' ordre 10. Qu'en déduit-on sur f ?

9. Obtenir un développement asymptotique

Soit $f(x) = \sqrt{\frac{3-x^2}{2-4x}}$. Montrer que $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{4\sqrt{x}} - \frac{21}{16x\sqrt{x}} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$.

10. Avec des paramètres

Soit a un réel et f_a: $\left(x \mapsto \frac{1-ax+x^2}{\sqrt{1+x^2}} e^{Arctan(x)}\right)$.

1. a. Déterminer un équivalent simple de f_a au voisinage de 0 .
   b. Donner l'équation de la tangente à C_{f_a} en 0 et la position, au voisinage de 0, de la courbe C_{f_a} par rapport à cette tangente (suivant les valeurs de a).
2. a. Déterminer un équivalent simple de f_a au voisinage de$+\infty$.
   b. Montrer que C_{f_a}a deux asymptotes obliques et étudier la position, au voisinage de$\pm\infty$, de C_{f_a} par rapport à ses asymptotes (suivant les valeurs de a).
   c. Vérifier que ces deux asymptotes se coupent orthogonalement sur (Ox).