

Corrigé des exercices de la fiche des vacances de Noël et d'autres exemples (Cf fin)

1. Classe C^n

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. Comparer au sens de l'inclusion $D^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $C^{n-1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. On pose $\forall x \neq 0, f(x) = x^{2n} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

a. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $a_p, b_p, a_{p+1}, b_{p+1}, \dots, a_{2p}, b_{2p}$ réels tels que :

$$\begin{cases} a_{2p} = 0 \\ b_{2p} \neq 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a_{2p} \neq 0 \\ b_{2p} = 0 \end{cases} \text{ et } \forall x \neq 0, f^{(p)}(x) = (a_p x^{2n-p} + a_{p+1} x^{2n-(p+1)} + \dots + a_{2p} x^{2n-2p}) \sin\left(\frac{1}{x}\right) + (b_p x^{2n-p} + b_{p+1} x^{2n-(p+1)} + \dots + b_{2p} x^{2n-2p}) \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

b. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On pose $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

c. Montrer que $\tilde{f}$ est de classe C^{n-1} sur $\mathbb{R}$

d. Montrer que $\tilde{f}$ est n -fois dérivable sur $\mathbb{R}$

e. Montrer que $\tilde{f}$ n'est pas de classe C^n sur $\mathbb{R}$

3. Que peut-on alors dire de l'inclusion entre $D^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ établie au 1. ?

1. $C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset D^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset C^{n-1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En effet, si f est n -fois continuellement dérivable sur $\mathbb{R}$ alors par définition f est n -fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus, si f est n -fois dérivable sur $\mathbb{R}$, alors $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ sont dérivables donc continues sur $\mathbb{R}$ et par suite, $f \in C^{n-1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2.

a. $\forall x \neq 0, f(x) = x^{2n} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. $Df = \mathbb{R}^*$ et f n'est constituée que de fonctions de classe C^∞ sur leur propre domaine de définition. J'en déduis que f est de classe C^∞ sur Df . Montrons par récurrence sur p que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $H(p)$ est vraie

où $H(p)$ " il existe $a_p, b_p, a_{p+1}, b_{p+1}, \dots, a_{2p}, b_{2p}$ réels tels que : $\begin{cases} a_{2p} = 0 \\ b_{2p} \neq 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a_{2p} \neq 0 \\ b_{2p} = 0 \end{cases}$ et

$$\forall x \neq 0, f^{(p)}(x) = (a_p x^{2n-p} + a_{p+1} x^{2n-(p+1)} + \dots + a_{2p} x^{2n-2p}) \sin\left(\frac{1}{x}\right) + (b_p x^{2n-p} + b_{p+1} x^{2n-(p+1)} + \dots + b_{2p} x^{2n-2p}) \cos\left(\frac{1}{x}\right) "$$

Initialisation : $f^{(0)}(x) = f(x) = x^{2n} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \cdot x^{2n-0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 0 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Donc $\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 0 \end{cases}$ conviennent.

Propagation : Soit p un entier naturel. Supposons que $H(p)$ est vraie : il existe donc $a_p, b_p, a_{p+1}, b_{p+1}, \dots, a_{2p}, b_{2p}$ réels tels que : $\begin{cases} a_{2p} = 0 \\ b_{2p} \neq 0 \end{cases}$ ou

$$\begin{cases} a_{2p} \neq 0 \\ b_{2p} = 0 \end{cases} \text{ et } \forall x \neq 0, f^{(p)}(x) = (a_p x^{2n-p} + a_{p+1} x^{2n-(p+1)} + \dots + a_{2p} x^{2n-2p}) \sin\left(\frac{1}{x}\right) + (b_p x^{2n-p} + b_{p+1} x^{2n-(p+1)} + \dots + b_{2p} x^{2n-2p}) \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Alors $\forall x \neq 0, f^{(p+1)}(x) = (f^{(p)})'(x) =$

$$\begin{aligned} & ((2n-p)a_p x^{2n-p-1} + (2n-(p+1))a_{p+1} x^{2n-p-2} + \dots + (2n-2p)a_{2p} x^{2n-2p-1}) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ & + (a_p x^{2n-p} + a_{p+1} x^{2n-(p+1)} + \dots + a_{2p} x^{2n-2p}) \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right) \\ & + ((2n-p)b_p x^{2n-p-1} + (2n-p-1)b_{p+1} x^{2n-p-2} + \dots + (2n-2p)b_{2p} x^{2n-2p-1}) \cos\left(\frac{1}{x}\right) \\ & + (b_p x^{2n-p} + b_{p+1} x^{2n-(p+1)} + \dots + b_{2p} x^{2n-2p}) \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Donc, $f^{(p+1)}(x) = (f^{(p)})'(x) =$

$$\begin{aligned} & ((2n-p)a_p x^{2n-p-1} + (2n-(p+1))a_{p+1} x^{2n-p-2} + \dots + (2n-2p)a_{2p} x^{2n-2p-1} + b_p x^{2n-p-2} + b_{p+1} x^{2n-p-3} + \dots + b_{2p} x^{2n-2p-2}) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ & + ((2n-p)b_p x^{2n-p-1} + (2n-p-1)b_{p+1} x^{2n-p-2} + \dots + (2n-2p)b_{2p} x^{2n-2p-1} - a_p x^{2n-p-2} - a_{p+1} x^{2n-p-3} - \dots - a_{2p} x^{2n-2p-2}) \cos\left(\frac{1}{x}\right) \\ & = ((2n-p)a_p x^{2n-(p+1)} + ((2n-(p+1))a_{p+1} + b_p) x^{2n-(p+2)} + \dots + ((2n-2p)a_{2p} + b_{2p-1}) x^{2n-2p-1} + b_{2p} x^{2n-2(p+1)}) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ & + ((2n-p)b_p x^{2n-(p+1)} + ((2n-p-1)b_{p+1} - a_p) x^{2n-(p+1)-1} + \dots + ((2n-2p)b_{2p} - a_{2p-1}) x^{2n-2(p+1)+1} - a_{2p} x^{2n-2(p+1)}) \cos\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

On pose $c_{p+1} = (2n-p)a_p$, $c_{p+2} = ((2n-(p+1))a_{p+1} + b_p)$, ..., $c_{2p+1} = ((2n-2p)a_{2p} + b_{2p-1})$ et $c_{2p+2} = b_{2p}$

$d_{p+1} = (2n-p)b_p$, $d_{p+2} = ((2n-p-1)b_{p+1} - a_p)$, ..., $d_{2p+1} = ((2n-2p)b_{2p} - a_{2p-1})$ et $d_{2p+2} = -a_{2p}$.

Alors, $\forall x \neq 0$,

$$f^{(p+1)}(x) = (c_p x^{2n-(p+1)} + c_{p+1} x^{2n-p-2} + \dots + c_{2p} x^{2n-2(p+1)}) \sin\left(\frac{1}{x}\right) + (d_p x^{2n-(p+1)} + d_{p+1} x^{2n-p-2} + \dots + d_{2p} x^{2n-2(p+1)}) \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Et $d_{2p+2} = -a_{2p}$ et $c_{2p+2} = b_{2p}$. Donc $\begin{cases} d_{2p+2} = -a_{2p} = 0 \\ c_{2p+2} = b_{2p} \neq 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} d_{2p+2} = -a_{2p} \neq 0 \\ c_{2p+2} = b_{2p} = 0 \end{cases}$. Donc $H(p+1)$ est vraie dès que $H(p)$ est vraie.

CCL : le théorème de récurrence simple assure que pour tout entier naturel p , $H(p)$ est vraie.

b. $\lim_{x \rightarrow 0} x^{2n} = 0$ et $\left(x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ est bornée. Donc, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Donc f est prolongeable par continuité en 0 par la valeur 0. On pose $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ le prolongement par continuité de f en 0.

c. Appliquons le critère de classe C^n en 0.

f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Il reste à vérifier que $\forall p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(p)}(x)$ existe et est finie. Je sais qu'il existe

$a_p, b_p, a_{p+1}, b_{p+1}, \dots, a_{2p}, b_{2p}$ réels tels que : $\begin{cases} a_{2p} = 0 \\ b_{2p} \neq 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a_{2p} \neq 0 \\ b_{2p} = 0 \end{cases}$ et

$$\forall x \neq 0, f^{(p)}(x) = (a_p x^{2n-p} + a_{p+1} x^{2n-(p+1)} + \dots + a_{2p} x^{2n-2p}) \sin\left(\frac{1}{x}\right) + (b_p x^{2n-p} + b_{p+1} x^{2n-(p+1)} + \dots + b_{2p} x^{2n-2p}) \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Comme $p \leq n-1, 2 \leq 2n-2p \leq 2n-2p+1 \leq \dots \leq 2n-p-1 \leq 2n-p$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} x^{2n-2p} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{2n-2p-1} = \dots = \lim_{x \rightarrow 0} x^{2n-p} = 0$ et

$\left(x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ et $\left(x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ est bornée. Donc, $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(p)}(x) = 0$.

Alors le critère de classe C^{n-1} permet de conclure que $\tilde{f}$ est de classe C^{n-1} sur $\mathbb{R}$ et $\tilde{f}^{(n-1)}(x) = \begin{cases} f^{(n-1)}(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

d. Vérifions que $\tilde{f}^{(n-1)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$:

• f étant n -fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc $\tilde{f}$ l'est aussi et il existe $a_n, b_n, a_{n+1}, b_{n+1}, \dots, a_{2n}, b_{2n}$ réels tels que : $\begin{cases} a_{2n} = 0 \\ b_{2n} \neq 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a_{2n} \neq 0 \\ b_{2n} = 0 \end{cases}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$,
 $\tilde{f}^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) = (a_n x^{2n-n} + a_{n+1} x^{2n-(n+1)} + \dots + a_{2n} x^{2n-2n}) \sin\left(\frac{1}{x}\right) + (b_n x^{2n-n} + b_{n+1} x^{2n-(n+1)} + \dots + b_{2n} x^{2n-2n}) \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

• En 0 ? $\tilde{f}$ l'est aussi et il existe $c_n, d_n, c_{n+1}, d_{n+1}, \dots, c_{2n}, d_{2n}$ réels tels que : $\begin{cases} c_{2n} = 0 \\ d_{2n} \neq 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} c_{2n} \neq 0 \\ d_{2n} = 0 \end{cases}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$,
 $\tilde{f}^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) = (c_{n-1} x^{2n-n+1} + c_n x^{2n-n} + \dots + c_{2n-2} x^{2n-2n+2}) \sin\left(\frac{1}{x}\right) + (d_{n-1} x^{2n-n+1} + d_n x^{2n-n} + \dots + d_{2n-2} x^{2n-2n+2}) \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

Donc $\tau(x) = \frac{\tilde{f}^{(n-1)}(x) - \tilde{f}^{(n-1)}(0)}{x} = (c_{n-1} x^{2n-n} + c_n x^{2n-n-1} + \dots + c_{2n-2} x^{2n-2n+1}) \sin\left(\frac{1}{x}\right) + (d_{n-1} x^{2n-n} + d_n x^{2n-n-1} + \dots + d_{2n-2} x^{2n-2n+1}) \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} x^n = \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-1} = \dots = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ et $(x \mapsto \sin(\frac{1}{x}))$ et $(x \mapsto \cos(\frac{1}{x}))$ sont bornées. Donc, $\lim_{x \rightarrow 0} \tau(x) = 0$. Donc, $\tilde{f}^{(n-1)}$ est dérivable en 0 et $\tilde{f}^{(n)}(x) = 0$. Ainsi, $\tilde{f}$ est n -fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x ,

$$\tilde{f}^{(n)}(x) = \begin{cases} f^{(n)}(x) = (a_n x^{2n-n} + a_{n+1} x^{2n-(n+1)} + \dots + a_{2n} x^{2n-2n}) \sin\left(\frac{1}{x}\right) + (b_n x^{2n-n} + b_{n+1} x^{2n-(n+1)} + \dots + b_{2n} x^{2n-2n}) \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

e. Montrons que $\tilde{f}^{(n)}$ n'est pas continue en 0. Supposons par exemple que $\begin{cases} a_{2n} = 0 \\ b_{2n} \neq 0 \end{cases}$. Alors,

$$f^{(n)}(x) = \underbrace{(a_n x^{2n-n} + a_{n+1} x^{2n-(n+1)} + \dots + a_{2n-1} x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) + (b_n x^{2n-n} + b_{n+1} x^{2n-(n+1)} + \dots + b_{2n-1} x) \cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{=\varphi(x)} + b_{2n} \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Utilisons la suite $\left(\frac{1}{2n\pi}\right)$ de limite nulle en $+\infty$. Si $f^{(n)}$ tendait vers 0 en 0 alors par composition $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{(n)}\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = 0$ mais ce n'est pas le cas, En effet,

d'après ce qui précède, $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0$ donc, par composition $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = 0$. De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_{2n} \cos\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = b_{2n}$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{(n)}\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = b_{2n} \neq 0$.

J'en déduis que $f^{(n)}$ ne tend pas vers 0 en 0. Ainsi, $f^{(n)}$ n'est pas continue en 0. Ainsi, f n'est pas de classe C^n sur $\mathbb{R}$.

3. L'inclusion $C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset D^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est stricte : il existe des fonctions de $D^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui ne sont pas dans $C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

4. Déterminer un équivalent simple

$f(x) = \frac{x^4 - \text{Arctan}^2(x) \sqrt[3]{5\sqrt{1-x}-1}}{\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \ln(x)}$ en 0. Cherchons un équivalent simple en 0 du numérateur $N(x)$ de $f(x)$:

$\lim_{x \rightarrow 0} -x = 0$ et $(1+x)^\alpha - 1 \sim_0 \alpha x$ donc, en prenant $\alpha = \frac{1}{5}$ et en composant à droite notre équivalent, $\sqrt[5]{1-x} - 1 \sim_0 \frac{1}{5}(-x)$. Et par suite

$\sqrt[3]{5\sqrt{1-x}-1} \sim_0 \sqrt[3]{-\frac{x}{5}}$. De plus, $\text{Arc tan}(x) \sim_0 x$ donc $\text{Arctan}^2(x) \sim_0 x^2$ puis $\text{Arctan}^2(x) \sqrt[3]{5\sqrt{1-x}-1} \sim_0 x^2 \left(-\frac{x}{5}\right)^{\frac{1}{3}} = -\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}} x^{2+\frac{1}{3}} =$

$-\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}} x^{\frac{7}{3}}$. Comme $\frac{7}{3} < 4$, $x^4 = o_0\left(x^{\frac{7}{3}}\right)$ et par conséquent, $x^4 = o_0\left(\text{Arctan}^2(x) \sqrt[3]{5\sqrt{1-x}-1}\right)$. Ainsi,

$$N(x) \sim_0 \left(\text{Arc tan}^2(x) \sqrt[3]{5\sqrt{1-x}-1}\right) \sim_0 -\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}} x^{\frac{7}{3}}.$$

Cherchons un équivalent simple en 0 du dénominateur $D(x)$ de $f(x)$:

Comme $(x \mapsto \sin(\frac{1}{x}))$ est borné et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$, $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = o_0(\ln(x))$ et par conséquent, $D(x) \sim_0 -\ln(x)$.

$$\text{Ainsi, } f(x) \sim_0 \frac{-\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}} x^{\frac{7}{3}}}{-\ln(x)} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{x^{\frac{7}{3}}}{\ln(x)}.$$

$f(x) = \frac{x^4 - \text{Arctan}^2(x) \sqrt[3]{5\sqrt{1-x}-1}}{\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \ln(x)}$ en $+\infty$.

Cherchons un équivalent simple du numérateur $N(x)$ de $f(x)$:

Comme $(x \mapsto -1)$ est borné et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[5]{1-x} = -\infty$, $\sqrt[5]{1-x} - 1 \sim_{+\infty} \sqrt[5]{1-x}$. De même, $1-x \sim_{+\infty} -x$ et par conséquent, $\sqrt[5]{1-x} - 1 \sim_{+\infty} \sqrt[5]{1-x} \sim_{+\infty} (-x)^{\frac{1}{5}}$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}^{+*}$ donc $\text{Arctan}(x) \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2}$. Alors $\text{Arctan}^2(x) [\sqrt[5]{1-x} - 1] \sim_{+\infty} \frac{\pi^2}{4} (-x)^{\frac{1}{5}}$. Alors, comme $x^{\frac{1}{5}} = o_{+\infty}(x^4)$,
 $N(x) \sim_{+\infty} x^4$.

Cherchons un équivalent simple du dénominateur $D(x)$ de $f(x)$:

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = o_{+\infty}(\ln(x))$. Par conséquent, $D(x) \sim_{+\infty} -\ln(x)$.

$$\text{Ainsi, } f(x) \sim_{+\infty} \frac{-x^4}{\ln(x)}.$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \text{ en } -\infty$$

Tout d'abord, $1+x^2 \sim_{-\infty} x^2$ donc $\sqrt{1+x^2} \sim_{-\infty} \sqrt{x^2} = |x| = -x$.

De plus, $\begin{cases} \sin(t) \sim_0 t \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases}$ donc, par composition à droite, $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \sim_{-\infty} \frac{1}{x}$.

Enfin, $\begin{cases} \ln(y) \sim_1 y - 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \end{cases}$ donc, par composition à droite, $\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \sim_{-\infty} \frac{x}{x+1} - 1 = -\frac{1}{x+1} \sim_{-\infty} -\frac{1}{x}$.

Ainsi, $f(x) \sim_{-\infty} x$.

$f(x) = 2^{2^x} - 2$ en 0

$f(x) = 2^{2^x} - 2 = e^{\ln(2)e^{2^x}} - 2$. Donc, f dérivable en 0 et $f'(0) = \ln(2)^2 \neq 0$. Alors le cours assure que $f(x) - \underbrace{f(0)}_{=0} \sim_0 \ln(2)^2 (x - 0)$. Ainsi, $f(x) \sim_0 \ln(2)^2 x$.

$f(x) = \ln(\sin(x))$ en $\frac{\pi}{2}$

Posons $t = x - \frac{\pi}{2}$ et $g(t) = f(x)$.

Alors, $g(t) = f\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right)\right) = \ln(\cos(t))$.

$\lim_{t \rightarrow 0} \cos(t) = 1$ et $\ln(u) \sim_{u \rightarrow 1} u - 1$. Donc, $\ln(\cos(t)) \sim_{t \rightarrow 0} \cos(t) - 1$. De plus, $\cos(t) - 1 \sim_0 -\frac{t^2}{2}$. Donc, $g(t) \sim_0 -\frac{t^2}{2}$.

Ainsi, $f(x) \sim_{\frac{\pi}{2}} -\frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2}$.

$f(x) = \sqrt[p]{1+px} - \sqrt[q]{1+qx} + \left(\frac{p-q}{2}\right)x^2$ en 0. (où p et q sont deux entiers naturels non nuls)

1er cas : $p = q$. Alors $f(x) = 0 \sim_0 0$

2ème cas : $p \neq q$.

$\lim_{x \rightarrow 0} px = 0$ et $(1+t)^{\frac{1}{p}} = 1 + \frac{1}{p}t + \frac{\left(\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{p}-1\right)t^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{p}-1\right)\left(\frac{1}{p}-2\right)t^3}{6} + o_0(t^3)$. Donc, $(1+px)^{\frac{1}{p}} = 1 + \frac{1}{p}(px) + \frac{\left(\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{p}-1\right)(px)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{p}-1\right)\left(\frac{1}{p}-2\right)(px)^3}{6} + o_0(x^3)$. Ainsi :

$(1+px)^{\frac{1}{p}} = 1 + x + \frac{1-p}{2}x^2 + \frac{(1-p)(1-2p)}{6}x^3 + o_0(x^3)$. De même, $(1+qx)^{\frac{1}{q}} = 1 + x + \frac{1-q}{2}x^2 + \frac{(1-q)(1-2q)}{6}x^3 + o_0(x^3)$.

Alors, $f(x) = \left[\frac{(1-p)(1-2p)}{6} - \frac{(1-q)(1-2q)}{6}\right]x^3 + o_0(x^3) = \frac{[2p^2-2q^2-3p+3q]x^3}{6} + o_0(x^3) = \frac{[2(p-q)(p+q)-3(p-q)]x^3}{6} + o_0(x^3) = (p-q)\frac{[2(p+q)-3]x^3}{6} + o_0(x^3)$.

Comme p et q sont supérieurs à 1, $2(p+q) - 3 \neq 0$ et comme $p \neq q$, $[p-q][2(p+q) - 3] \neq 0$ et ainsi, $f(x) \sim_0 \frac{[p-q][2(p+q)-3]x^3}{6}$.

Comparons en $+\infty$:

$\sin(x) \ll_{+\infty} (\ln(x))^{2025} \ll_{+\infty} \sqrt[3]{x} \ll_{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{\ln(x)}} \ll_{+\infty} \frac{x}{\ln(x)} \ll_{+\infty} x \ln(x) \ll_{+\infty} x^2 \ll x^2 \sqrt{\ln(x)} \ll 2^x \ln(x) \ll \frac{e^x}{x} \ll e^x \ll \ln(x)^x$.

Soit a un réel ou un infini. Soit f et g deux fonctions définies sur un même voisinage V de a .

1. $e^f \sim_a e^g \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = 1 \iff \lim_{x \rightarrow a} e^{f(x)-g(x)} = 1 \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x) = 0$.

Attention en général, $f \sim_a g \not\Rightarrow e^f \sim_a e^g$. Posons $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Alors $f \sim_0 g$ mais $\frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = e^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ donc $e^f \not\sim_0 e^g$.

2. Supposons que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0^+$ ou $+\infty$ et $f \sim_a g$. Alors au voisinage de a , $f(x) > 0$ (puisque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0^+$ ou $+\infty$)

et $g(x) > 0$ (puisque $f \sim_a g$ donc g a le même signe que f au voisinage de a) donc $\ln(f)$ et $\ln(g)$ sont définies au voisinage de a .

De plus, $g(x) = f(x) + f(x)o_a(1) = f(x)(1 + o_a(1))$ donc $\ln(g(x)) = \ln(f(x)) + \ln(1 + o_a(1))$. Comme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0^+$ ou $+\infty$,

$\lim_{x \rightarrow a} \ln(f(x)) = \infty$. Comme $\lim_{x \rightarrow a} \ln(1 + o_a(1)) = 0$, $\ln(1 + o_a(1)) = o_a(\ln(f(x)))$. Ainsi, je peux conclure que $\ln(g(x)) \sim_{x \rightarrow a} \ln(f(x))$.

Attention $f \sim_a g \not\Rightarrow \ln(f) \sim_a \ln(g)$. Posons $f(x) = e^x$ et $g(x) = 1$. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \in \mathbb{R}^*$, $f(x) \sim_0 g(x)$ mais $\ln(e^x) = x$ et $\ln(1) = 0$ et $x \not\sim_0 0$ i.e. $\ln(f) \not\sim_0 \ln(g)$.

5. Déterminer un développement limité en a d'ordre au plus 5

$f(x) = \sqrt[3]{9 - 2\sin(x)}$ et $a = \frac{\pi}{6}$

Posons $t = x - \frac{\pi}{6}$ et $g(t) = f(x)$.

$g(t) = f\left(\frac{\pi}{6} + t\right) = \sqrt[3]{9 - 2\sin\left(\frac{\pi}{6} + t\right)} = \sqrt[3]{9 - 2\left[\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(t) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(t)\right]}$

$= \sqrt[3]{9 - 2\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o_0(t^5)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(t - \frac{t^3}{6} + o_0(t^4)\right)\right]}$

$= \sqrt[3]{9 - 1 - \sqrt{3}t + \frac{t^2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}t^3 - \frac{t^4}{24} + o_0(t^4)}$

$= \sqrt[3]{8 - \sqrt{3}t + \frac{t^2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}t^3 - \frac{t^4}{24} + o_0(t^4)}$

$= \sqrt[3]{8\left[1 - \frac{\sqrt{3}}{8}t + \frac{1}{16}t^2 + \frac{\sqrt{3}}{6 \times 8}t^3 - \frac{t^4}{24 \times 8} + o_0(t^4)\right]}$

$$= 2^3 \sqrt{1 + \underbrace{\left(-\frac{\sqrt{3}}{8}t + \frac{1}{16}t^2 + \frac{\sqrt{3}}{6 \times 8}t^3 - \frac{t^4}{24 \times 8} + o_0(t^4)\right)}_{=u(t)}}$$

Comme $\lim_{t \rightarrow 0} u(t) = 0$ et $(1+u)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}u - \frac{1}{3^2}u^2 + \frac{5}{3^4}u^3 - \frac{10}{3^5}u^4 + o_0(u^4)$,

$$(1+u(t))^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}u(t) - \frac{1}{3^2}u(t)^2 + \frac{5}{3^4}u(t)^3 - \frac{10}{3^5}u(t)^4 + o_0(t^4) \text{ avec}$$

$$u(t) = \frac{1}{8} \left(-\sqrt{3}t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{\sqrt{3}}{6}t^3 - \frac{t^4}{24} + o_0(t^4) \right)$$

$$u(t)^2 = \frac{1}{64} \left[3t^2 - \sqrt{3}t^3 + \frac{3}{4}t^4 + o_0(t^4) \right]$$

$$u(t)^3 = u(t)^2 \times u(t) = \frac{1}{8^3} \left[-3\sqrt{3}t^3 + \frac{9}{2}t^4 + o_0(t^4) \right]$$

$$u(t)^4 = (u(t)^2)^2 = \frac{1}{8^4} \left[9t^4 - 6\sqrt{3}t^5 + o_0(t^5) \right]$$

$$u(t)^5 = u(t)^3 \times u(t)^2 = o_0(t^4)$$

Ainsi,

$$g(t) = 2 + \frac{21}{3^8} \left[-\sqrt{3}t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{\sqrt{3}}{6}t^3 - \frac{t^4}{24} \right] - \frac{2}{3^2 8^2} \left[3t^2 - \sqrt{3}t^3 + \frac{3}{4}t^4 \right] + \frac{5}{3^4 8^3} \left[-3\sqrt{3}t^3 + \frac{9}{2}t^4 \right] - \frac{10}{3^5 8^4} [9t^4] + o_0(t^4)$$

Et

$$f(x) = 2 - \frac{\sqrt{3}}{12} \left(x - \frac{\pi}{6} \right) + \left(\frac{1}{3 \times 8} - \frac{1}{3 \times 4 \times 8} \right) \left(x - \frac{\pi}{6} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6 \times 4 \times 3} + \frac{\sqrt{3}}{4 \times 8 \times 3^2} - \frac{5}{3^3 8^2 \times 4} \right) \left(x - \frac{\pi}{6} \right)^3 + \left(-\frac{1}{3 \times 6 \times 4^2} - \frac{1}{3 \times 8^2 \times 2} - \frac{5}{3^2 \times 8^3} \right) \left(x - \frac{\pi}{6} \right)^4 + o_{\frac{\pi}{6}} \left(\left(x - \frac{\pi}{6} \right)^4 \right)$$

$$f(x) = 2 - \frac{\sqrt{3}}{12} \left(x - \frac{\pi}{6} \right) + \left(\frac{1}{4 \times 8} \right) \left(x - \frac{\pi}{6} \right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{8^2 \times 4 \times 3^3} (115) \left(x - \frac{\pi}{6} \right)^3 + \frac{-1}{3^2 \times 8^3} \left(x - \frac{\pi}{6} \right)^4 + o_{\frac{\pi}{6}} \left(\left(x - \frac{\pi}{6} \right)^4 \right)$$

$f(x) = \frac{\text{Arctan}(x)}{\ln(\cos(x))}$, $a = 0$ IMPOSSIBLE car $\text{Arctan}(x) \sim_0 x$ et $\ln(\cos(x)) \sim_0 -\frac{x^2}{2}$ donc $f(x) \sim_0 \frac{1}{2x}$. Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = \pm \infty$ donc f n'a pas de limite finie en 0 et par suite, f ne peut pas avoir de $DL(0)$

$$f(x) = \frac{x \text{Arctan}(x)}{\ln(\cos(x))} \quad a = 0, n = 4$$

$$\ln(\cos(x)) = \ln \left(1 - \underbrace{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + o_0(x^6) \right)}_{=u(x)} \right) \stackrel{\text{c\grave{a}r}}{=} \ln(1-u) = -u - u^2 - u^3 - u^4 - u^5 - u^6 + o_{u \rightarrow 0}(u^6)$$

$\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$
 et $u(x) \sim_0 \frac{x^2}{2}$
 donc $u(x)^4 = o_0(x^6)$

$$-u(x) - \frac{u(x)^2}{2} - \frac{u(x)^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^6).$$

$$\text{Avec } u(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + o_0(x^6)$$

$$u(x)^2 = \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} + o_0(x^6)$$

$$u(x)^3 = \frac{x^6}{8} + o_0(x^6)$$

$$\text{Donc, } \ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} - \frac{1}{2} \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} \right) - \frac{1}{3} \frac{x^6}{8} + o_0(x^6) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o_0(x^6)$$

$$f(x) = \frac{x \left(x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + o_0(x^5) \right)}{-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o_0(x^6)} = \frac{x^2 \left(1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{5} + o_0(x^4) \right)}{-\frac{x^2}{2} \left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{2x^4}{45} + o_0(x^4) \right)} = -2 \left(1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{5} + o_0(x^4) \right) \times \frac{1}{\underbrace{1 + \frac{x^2}{6} + \frac{2x^4}{45} + o_0(x^4)}_{=u(x)}}$$

$$\text{De plus, } \frac{1}{\underbrace{1 + \frac{x^2}{6} + \frac{2x^4}{45} + o_0(x^4)}_{=u(x)}} \stackrel{\text{c\grave{a}r}}{=} \frac{1}{1+u} = 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + o_{u \rightarrow 0}(u^4)$$

$\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$
 et $u(x) \sim_0 \frac{x^2}{6}$
 donc $u(x)^3 = o_0(x^4)$

$$\text{donc } f(x) = -2 \left(1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{5} + o_0(x^4) \right) \times \left(1 - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{60} + o_0(x^4) \right) = -2 \left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{29}{180}x^4 + o_0(x^4) \right)$$

$$\text{Ainsi, } f(x) = -2 + x^2 + \frac{29}{90}x^4 + o_0(x^4).$$

$$f(x) = \text{Arccos}(x) \quad \text{Arctsin}(x) \quad a = 0 \quad \text{Ordre 3}$$

$f(x) = e^{\text{Arctsin}(x) \ln(\text{Arccos}(x))}$. Posons $h(x) = \text{Arctsin}(x) \ln(\text{Arccos}(x))$.

$$\text{Arctsin}(x) = x + \frac{x^3}{6} + o_0(x^3) \text{ et } \text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctsin}(x) = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{6} + o_0(x^3) \right).$$

$$\ln(\operatorname{Arccos}(x)) = \ln\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)\right)\right) = \ln\left\{\frac{\pi}{2} \left[1 - \underbrace{\left(\frac{2}{\pi}x + \frac{2}{\pi}\frac{x^3}{6} + o_0(x^3)\right)}_{=u(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0}\right]\right\} = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) + \ln(1 - u(x)).$$

$$\ln(\operatorname{Arccos}(x)) = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - u(x) - \frac{u(x)^2}{2} - \frac{u(x)^3}{3} + o_0(x^3) = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{2}{\pi}x + \frac{2}{\pi}\frac{x^3}{6}\right) - \frac{2}{\pi^2}x^2 - \frac{8}{3\pi^3}x^3 + o_0(x^3)$$

$$\ln(\operatorname{Arccos}(x)) = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{\pi}x - \frac{2}{\pi^2}x^2 - \left(\frac{8}{3\pi^3} + \frac{1}{3\pi}\right)x^3 + o_0(x^3).$$

$$\text{Alors, } h(x) = \left(x + \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)\right) \left(\ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{\pi}x - \frac{2}{\pi^2}x^2 - \left(\frac{8}{3\pi^3} + \frac{1}{3\pi}\right)x^3 + o_0(x^3)\right) =$$

$$\underbrace{\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)x - \frac{2}{\pi}x^2 + \left(\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)}{6} - \frac{2}{\pi^2}\right)x^3 + o_0(x^3)}_{=v(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0}.$$

$$\text{Donc, } f(x) = e^{v(x)} = 1 + v(x) + \frac{v(x)^2}{2} + \frac{v(x)^3}{6} + o_0(x^3) = 1 + \ln\left(\frac{\pi}{2}\right)x - \frac{2}{\pi}x^2 + \left(\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)}{6} - \frac{2}{\pi^2}\right)x^3 + \frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{\pi}{2}\right)x^2 - \frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)x^3 + \frac{1}{6}\ln^3\left(\frac{\pi}{2}\right)x^3 + o_0(x^3)$$

$$f(x) = 1 + \ln\left(\frac{\pi}{2}\right)x + \left(\frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{\pi}\right)x^2 + \left(\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)}{6} - \frac{2}{\pi^2} - \frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{6}\ln^3\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)x^3 + o_0(x^3)$$

$$f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{\tan(x)}{2}\right), a = \frac{\pi}{3}$$

Pour x au voisinage de $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\tan(x)}{2}$ est au voisinage de $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Or, Arcsin est dérivable sur $] -1, 1[$ donc au voisinage de $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Et par conséquent, f est dérivable au voisinage de $\frac{\pi}{3}$ et

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}(1 + \tan^2(x))}{\sqrt{1 - \frac{\tan^2(x)}{4}}} \underset{\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o_0(x^4)}{=} \frac{1}{2} \left(1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o_0(x^4)\right) \left(1 - \underbrace{\left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{6}x^4 + o_0(x^4)\right)}_{=u(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o_0(x^4)\right) \left(1 - \frac{1}{2}u(x) + \frac{3}{8}u(x)^2 + o_0(x^4)\right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o_0(x^4)\right) \left(1 - \left(\frac{x^2}{8} + \frac{1}{12}x^4\right) + \frac{3}{8} \times \frac{1}{16}x^4 + o_0(x^4)\right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{7}{8}x^2 + \left(-\frac{1}{8} + \frac{2}{3} - \frac{1}{12} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{16}\right)x^4 + o_0(x^4)\right) = \frac{1}{2} + \frac{7}{16}x^2 + \frac{185}{768}x^4 + o_0(x^4).$$

$$\text{Donc le théorème d'intégration terme à terme d'un DL assure que : } f(x) = \underbrace{f(0)}_{=\operatorname{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2}x + \frac{7}{16}\frac{x^3}{3} + \frac{185}{768}\frac{x^5}{5} + o_0(x^5)$$

$$\text{Ainsi, } f(x) = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}x + \frac{7}{48}x^3 + \frac{37}{768}x^5 + o_0(x^5).$$

6. Calculer des limites

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\ln(\sin(x))}\right) ?$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin(t) \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos(t)$$

Posons $t = x - \frac{\pi}{2}$ et $g(t) = f(x)$. Alors,

$$g(t) = f\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \frac{2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + t\right)} + \frac{1}{\ln(\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right))} = \frac{2}{\sin^2(t)} + \frac{1}{\ln(\cos(t))} = \frac{2}{\left(t - \frac{t^3}{6} + o_0(t^3)\right)^2} + \frac{1}{\ln\left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o_0(t^4)\right)} = \frac{2}{t^2\left(1 - \frac{t^2}{6} + o_0(t^2)\right)^2} +$$

$$\frac{1}{-\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \frac{t^4}{8} + o_0(t^4)}$$

$$= \frac{2}{t^2\left(1 - \frac{t^2}{3} + o_0(t^2)\right)} + \frac{1}{-\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \frac{t^4}{8} + o_0(t^4)} = \frac{2}{t^2\left(1 - \frac{t^2}{3} + o_0(t^2)\right)} + \frac{1}{\frac{t^2}{2}\left[-1 + \frac{t^2}{6} + o_0(t^2)\right]} = \frac{2}{t^2} \left[\frac{1}{1 - \frac{t^2}{3} + o_0(t^2)} - \frac{1}{1 + \frac{t^2}{6} + o_0(t^2)}\right] = \frac{2}{t^2} \left[1 + \frac{t^2}{3} + o_0(t^2) - \right.$$

$$\left. \left(1 - \frac{t^2}{6} + o_0(t^2)\right)\right] = \frac{2}{t^2} \left[\frac{t^2}{2} + o_0(t^2)\right] \sim_0 1. \text{ Donc } \lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\ln(\sin(x))}\right) = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (2x^2 - 3x + 1)\tan(\pi x)$$

Posons $t = x - \frac{1}{2}$ et $g(t) = f(x)$. Alors,

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + o_0(u) \text{ et } \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{t^2}{3} + o_0(t^2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{6} + o_0(t^2)$$

$$g(t) = f\left(\frac{1}{2} + t\right) = \left(2\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(t + \frac{1}{2}\right) + 1\right) \tan\left(\pi\left(t + \frac{1}{2}\right)\right) = (2t^2 - t) \tan\left(\frac{\pi}{2} + \pi t\right) = (2t^2 - t) \left(-\frac{1}{\tan(\pi t)}\right) \sim_0(-t) \times \frac{1}{-\pi t} = \frac{1}{\pi}.$$

Donc $\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = \frac{1}{\pi}$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{\pi}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \text{donc } e^{-x} = o_{+\infty}(e^x).$$

$$2t^2 = o_0(t) \text{ donc } 2t^2 - t \sim_0 -t. \\ \tan(u) \sim_{u \rightarrow 0} u \text{ et } \lim_{t \rightarrow 0} \pi t = 0 \text{ donc } \tan(\pi t) \sim_0 \pi t.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{ch(x)}$$

$$f(x) = e^{ch(x) \ln\left(1 + \frac{1}{2x}\right)}. \text{ Posons } H(x) = ch(x) \ln\left(1 + \frac{1}{2x}\right).$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2x}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{2x}. \text{ Donc, } H(x) \sim_{+\infty} \frac{ch(x)}{2x} = \frac{1}{4x} (e^x + e^{-x}) \sim_{+\infty} \frac{e^x}{4x}. \text{ Or, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{CC}{=} +\infty. \text{ Donc, } \lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = +\infty. \text{ Et ainsi,}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x)^{Arctan(x)}$$

$$f(x) = e^{Arctan(x) \ln(\sin(x))}. \text{ Posons } H(x) = Arctan(x) \ln(\sin(x)).$$

$$Arctan(x) \sim_0 x. \text{ Donc, } H(x) \sim_0 x \ln(\sin(x)). \text{ Or, } x \ln(\sin(x)) = x \ln(x + o_0(x)) = x[\ln(x) + \ln(1 + o_0(1))] \sim_0 x \ln(x).$$

$$\text{Or, } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) \stackrel{CC}{=} 0. \text{ Donc, } \lim_{x \rightarrow 0} H(x) = 0 \text{ et ainsi, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

$$\ln(1+u) \sim_0 u \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0 \text{ donc } \ln\left(1 + \frac{1}{2x}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{2x}$$

7. Utiliser les DL pour justifier qu'une fonction est dérivable en un point et obtenir la position de la courbe par rapport à sa tangente en ce point

$f: (x \mapsto (1 - 2\sin(x))\tan(3x))$. Montrer que f est prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{6}$ et que son prolongement est dérivable en $\frac{\pi}{6}$ et étudier la position de sa courbe par rapport à sa tangente.

$$\text{Posons } g(t) = f\left(t + \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\text{Alors } g(t) = \left(1 - 2\sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right)\right) \tan\left(3\left(t + \frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(1 - 2(\sin(t)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos(t)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right))\right) \tan\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= (1 - \sqrt{3}\sin(t) - \cos(t)) \frac{(-1)}{\tan(3t)} = \left(1 - \sqrt{3}\left(t - \frac{t^3}{6}\right) - 1 + \frac{t^2}{2} + o_0(t^3)\right) \frac{(-1)}{3t + \frac{(3t)^3}{3} + o_0(t^4)} = -\left(t(-\sqrt{3} + \frac{1}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{6}t^2 + o_0(t^3))\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{6}t^2 + o_0(t^3) \frac{1}{3t\left(1 + \frac{(3t)^2}{3} + o_0(t^2)\right)}$$

$$= -\frac{1}{3} \left((-\sqrt{3} + \frac{1}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{6}t^2 + o_0(t^3)) \frac{1}{\left(1 + \frac{(3t)^2}{3} + o_0(t^2)\right)} \right) = -\frac{1}{3} \left((-\sqrt{3} + \frac{1}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{6}t^2 + o_0(t^3)) (1 - 3t^2 + o_0(t^3)) \right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{6}t - \frac{19}{18}\sqrt{3}t^2 + o_0(t^2)$$

$$\text{Donc, } f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{19}{18}\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + o_{\frac{\pi}{6}}\left(\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2\right).$$

$$\text{J'en déduis que } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ i.e. } f \text{ est prolongeable par continuité en } \frac{\pi}{6} \text{ par la valeur } \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{De plus, son prolongement } \tilde{f}, \text{ qui est défini en } \frac{\pi}{6}, \text{ admet le } DL_1\left(\frac{\pi}{6}\right) \text{ suivant } \tilde{f}(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - o_{\frac{\pi}{6}}\left(\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^1\right). \text{ Donc, } \tilde{f} \text{ est}$$

$$\text{dérivable en } \frac{\pi}{6} \text{ et } \tilde{f}'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{6} \text{ et } y = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \text{ est l'équation de la tangente à } \tilde{Cf} \text{ en } \frac{\pi}{6}. \text{ De plus, son prolongement } \tilde{f}$$

$$\text{admet le } DL_1\left(\frac{\pi}{6}\right) \text{ suivant } \tilde{f}(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{19}{18}\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + o_{\frac{\pi}{6}}\left(\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2\right). \text{ Donc, } \tilde{f}(x) - \left[\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right] \sim_{\frac{\pi}{6}} -$$

$$\frac{19}{18}\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2. \text{ Donc au voisinage de } \frac{\pi}{6}, \tilde{f}(x) - \left[\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right] \leq 0. \text{ J'en déduis que } \tilde{Cf} \text{ est sous sa tangente en } \frac{\pi}{6}.$$

Déterminer l'équation des demi-tangentes en 0 de Cf où $f: (x \mapsto \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}})$ et la position de Cf par rapport à ces demi-tangentes

Tout d'abord, f est définie et continue sur $[-1; 1]$ et est dérivable au moins sur $] -1; 1[\setminus \{0\}$.

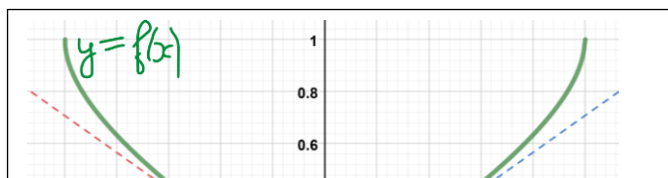
$$\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0 \text{ et } (1+u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 - \frac{5}{128}u^4 + o_0(u^4). \text{ Donc } \sqrt{1 - x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o_0(x^4). \text{ Alors,}$$

$$\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}} = \sqrt{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o_0(x^4)} = \sqrt{\frac{1}{2}x^2 \left(1 + \frac{1}{4}x^2 + o_0(x^2)\right)} = \frac{|x|}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{4}x^2 + o_0(x^2)\right)^{\frac{1}{2}} \stackrel{\substack{CC \\ \text{car} \\ \lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0}}{=} \frac{|x|}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{8}x^2 + o_0(x^2)\right).$$

$$\text{Donc, } f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}} = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8\sqrt{2}}x^3 + o_0(x^3) \text{ et } \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{2}} + \frac{(-1)}{8\sqrt{2}}x^3 + o_0(x^3).$$

Comme f admet un $DL_3(0^+)$, Cf admet la droite d'équation $y = \frac{x}{\sqrt{2}}$ est tangente à droite à Cf en 0 ; de plus, $f(x) - \frac{x}{\sqrt{2}} \sim_{0^+} -\frac{1}{8\sqrt{2}}x^3$ et $-\frac{1}{8\sqrt{2}}x^3 \geq 0$ au voisinage de 0^+ . Donc, $f(x) - \frac{x}{\sqrt{2}} \geq 0$ au voisinage de 0^+ . Cf est donc au dessus de cette demi-tangente à droite en 0.

De même, Cf admet la droite d'équation $y = -\frac{x}{\sqrt{2}}$ est tangente à gauche à Cf en 0 ; de plus, $f(x) + \frac{x}{\sqrt{2}} \sim_{0^+} -\frac{1}{8\sqrt{2}}x^3$ et $-\frac{1}{8\sqrt{2}}x^3 \geq 0$ au voisinage de 0^- . Donc, $f(x) - \frac{x}{\sqrt{2}} \geq 0$ au voisinage de 0^- . Cf est donc au dessus de cette demi-tangente à gauche en 0.



$$y = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{-x}{\sqrt{2}}$$

8. Justifier l'existence d'une asymptote et obtenir son équation et la position de la courbe par rapport à l'asymptote

$$f(x) = (x+1) \operatorname{Arctan}\left(\frac{2+x}{x}\right)$$

$$\text{Posons } g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$$

Alors, $tg(t) = t\left(\frac{1}{t} + 1\right) \operatorname{Arctan}\left(\frac{2+\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}}\right) = (1+t) \operatorname{Arctan}(2t+1)$. Cherchons un $DL(0)$ (ordre 2 ou 3 : il faut un terme

significatif après l'ordre 1) de $tg(t)$:

Soit $\varphi(t) = \operatorname{Arctan}(2t+1)$.

φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'(t) = \frac{2}{1+(2t+1)^2} = \frac{2}{2+4t+4t^2} = \frac{1}{1+(2t+2t^2)} = 1 - (2t+2t^2) + 4t^2 + o_0(t^2) = 1 - 2t + 2t^2 + o_0(t^2)$.

Donc le théorème d'intégration terme à terme d'un DL assure que $\varphi(t) = \varphi(0) + t - t^2 + \frac{2}{3}t^3 + o_0(t^3) = \frac{\pi}{4} + t - t^2 + \frac{2}{3}t^3 + o_0(t^3)$

Donc, $tg(t) = (1+t)\left(\frac{\pi}{4} + t - t^2 + \frac{2}{3}t^3 + o_0(t^3)\right) = \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{4} + 1\right)t + \left(-\frac{1}{3}\right)t^3 + o_0(t^3)$.

Donc $\frac{1}{x}f(x) = \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{4} + 1\right)\left(\frac{1}{x}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^3 + o_{+\infty}\left(\left(\frac{1}{x}\right)^3\right)$. Et finalement, $f(x) = \frac{\pi}{4}x + \left(\frac{\pi}{4} + 1\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^2 + o_{+\infty}\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)$.

Et par conséquent, $f(x) - \left[\frac{\pi}{4}x + \left(\frac{\pi}{4} + 1\right)\right] \sim_{+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^2$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 0$ et $\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^2 < 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \left[\frac{\pi}{4}x + \left(\frac{\pi}{4} + 1\right)\right] = 0$ et $f(x) - \left[\frac{\pi}{4}x + \left(\frac{\pi}{4} + 1\right)\right] < 0$ au voisinage de $+\infty$. J'en conclus que la droite d'équation $y = \frac{\pi}{4}x + \left(\frac{\pi}{4} + 1\right)$ est asymptote à Cf en $+\infty$ et Cf est sous cette asymptote au voisinage de $+\infty$.

$$f(x) = \frac{1-x+4x^2}{2x-3} e^{\frac{1}{x-3}}$$

$$\text{Posons } g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$$

Alors, $tg(t) = t \frac{1-\frac{1}{t}+4\frac{1}{t^2}}{2\frac{1}{t}-3} e^{\frac{1}{\frac{1}{t}-3}} = \frac{t^2-t+4}{2-3t} e^{\frac{t}{1-3t}}$. Cherchons un $DL(0)$ (ordre 2 ou 3 : il faut un terme significatif après l'ordre 1) de $tg(t)$:

$$tg(t) = (4-t+t^2) \frac{1}{2(1-\frac{3}{2}t)} e^{t(1+3t+o_0(t))} = \frac{1}{2}(4-t+t^2)\left(1+\frac{3}{2}t+\frac{9}{4}t^2+o_0(t^2)\right) e^{t+3t^2+o_0(t^2)}$$

$$= \frac{1}{2}(4+5t+\frac{17}{2}t^2+o_0(t^2))\left(1+(t+3t^2)+\frac{t^2}{2}+o_0(t^2)\right)$$

$$= \frac{1}{2}(4+5t+\frac{17}{2}t^2+o_0(t^2))\left(1+t+\frac{7t^2}{2}+o_0(t^2)\right)$$

$$= \frac{1}{2}(4+9t+\frac{55}{2}t^2+o_0(t^2)) = 2+\frac{9}{2}t+\frac{55}{4}t^2+o_0(t^2).$$

Donc, $\frac{1}{x}f(x) = 2 + \frac{9}{2} + \frac{55}{4x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Et finalement, $f(x) = 2x + \frac{9}{2} + \frac{55}{4x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Et par conséquent, $f(x) - \left[2x + \frac{9}{2}\right] \sim_{+\infty} \frac{55}{4x}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{55}{4x} = 0$ et pour $x > 0$, $\frac{55}{4x} > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \left[2x + \frac{9}{2}\right] = 0$ et $f(x) - \left[2x + \frac{9}{2}\right] > 0$ au voisinage de $+\infty$. J'en conclus que la droite d'équation $y = 2x + \frac{9}{2}$ est asymptote à Cf en $+\infty$ et Cf est au-dessus de l'asymptote au voisinage de $+\infty$.

9. Déterminer le DL d'une bijection réciproque

$DL_5(0)$ 5 de φ^{-1} où $\varphi: (x \mapsto xe^{x^2})$

φ est de classe C^∞ et, en particulier, continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall x, \varphi'(x) = (1+2x^2)e^{x^2} > 0$. Donc φ est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Alors le TBCSM assure que φ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\varphi(\mathbb{R}) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$. Comme $\forall x, \varphi'(x) \neq 0$ et φ est de classe C^∞ , φ^{-1} est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Alors le théorème de Taylor-Young assure que φ^{-1} admet un $DL(0)$ à tout ordre.

Déterminons alors les réels a, b, c, d, e et f tels que :

$\varphi^{-1}(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + o_0(x^5)$. Comme φ est impaire, φ^{-1} est impaire et par conséquent, $a = c = e = 0$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0$ et $\varphi(x) = x(1+x^2+\frac{x^4}{2}+o_0(x^4)) = x+x^3+\frac{x^5}{2}+o_0(x^5)$, $\varphi^{-1}(\varphi(x)) = b\varphi(x) + d\varphi(x)^3 + f\varphi(x)^5 + o_0(x^5)$

$$\text{avec } \varphi(x) = x + x^3 + \frac{x^5}{2} + o_0(x^5),$$

$$(\varphi(x))^2 = x^2 + 2x^4 + o_0(x^5),$$

$$(\varphi(x))^3 = \varphi(x)(\varphi(x))^2 = x^3 + 3x^5 + o_0(x^5),$$

$$(\varphi(x))^5 = (\varphi(x))^3(\varphi(x))^2 = x^5 + o_0(x^5).$$

$$\text{Donc, } x = b(x + x^3 + \frac{x^5}{2}) + d(x^3 + 3x^5) + fx^5 + o_0(x^5) = bx + (b+d)x^3 + (\frac{b}{2} + 3d + f)x^5 + o_0(x^5).$$

Alors par unicité de la partie principale du DL en 0 de x , $b = 1, d + b = 0$ et $\frac{b}{2} + 3d + f = 0$. Donc $b = 1, d = -1$ et $f = \frac{5}{2}$.

Ainsi, le $DL_5(0)$ de φ^{-1} est : $\varphi^{-1}(x) = x - x^3 + \frac{5}{2}x^5 + o_0(x^5)$.

10. Déterminer le DL d'une fonction dont l'expression est sous forme intégrale

Soit $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt$. Déterminer son DL en 0 à l'ordre 10. Qu'en déduit-on sur f ?

$$\text{Posons } \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}.$$

φ est de classe C^∞ et, en particulier, continue sur $\mathbb{R}$. Donc φ admet une primitive H sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Par conséquent, f est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x$,

$f(x) = H(x^2) - H(x)$. Cette expression de f permet alors d'affirmer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x, f'(x) = 2xH'(x^2) - H'(x)$

$$H'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}.$$

$$\text{Par conséquent, } f'(x) = 2x(1+x^8)^{-\frac{1}{2}} - (1+x^4)^{-\frac{1}{2}} = 2x\left(1 - \frac{1}{2}x^8 + o_0(x^8)\right) - \left(1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{8}x^8 + o_0(x^9)\right)$$

$$f'(x) = -1 + 2x + \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{8}x^8 - x^9 + o_0(x^9).$$

Alors le théorème d'intégration terme à terme des DL assure que : $f(x) = \underbrace{f(0)}_{=0} - x + x^2 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{24}x^9 - \frac{1}{10}x^{10} + o_0(x^{10})$.

Soit a un réel et $f_a: (x \mapsto \frac{1-ax+x^2}{\sqrt{1+x^2}} e^{\text{Arctan}(x)})$.

1. a. Déterminer un équivalent simple de f_a au voisinage de 0.
- b. Donner l'équation de la tangente à C_{f_a} en 0 et la position, au voisinage de 0, de la courbe C_{f_a} par rapport à cette tangente (suivant les valeurs de a).
2. a. Déterminer un équivalent simple de f_a au voisinage de $+\infty$.
- b. Montrer que C_{f_a} a deux asymptotes obliques et étudier la position, au voisinage de $\pm\infty$, de C_{f_a} par rapport à ses asymptotes (suivant les valeurs de a).
- c. Vérifier que ces deux asymptotes se coupent orthogonalement sur (Ox) .

1. a. $\lim_{x \rightarrow 0} f_a(x) = 1 \in \mathbb{R}^*$. Donc $f_a(x) \sim_0 1$.

b. Cherchons un DL en 0 d'ordre suffisant pour faire apparaître un terme significatif supplémentaire par rapport à un DL_1 .

$$\frac{1-ax+x^2}{\sqrt{1+x^2}} = (1-ax+x^2)(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = (1-ax+x^2)\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^3)\right) = 1 - ax + \frac{1}{2}x^2 + \frac{a}{2}x^3 + o_0(x^3).$$

$$e^{\text{Arctan}(x)} = e^{x - \frac{x^3}{3} + o_0(x^3)} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)^3 + o_0(x^3) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)x^3 + o_0(x^3)$$

$$e^{\text{Arctan}(x)} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o_0(x^3).$$

$$\text{Donc, } f_a(x) = \left(1 - ax + \frac{1}{2}x^2 + \frac{a}{2}x^3 + o_0(x^3)\right)\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o_0(x^3)\right)$$

$$f_a(x) = 1 + (1-a)x + (1-a)x^2 + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)x^3 + o_0(x^3). \text{ Ainsi, } f_a(x) \stackrel{(**)}{\sim} 1 + (1-a)x + (1-a)x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o_0(x^3).$$

Donc, l'équation de la tangente à C_{f_a} en 0 est $y = 1 + (1-a)x$.

Et si $a \neq 1$ alors $f_a(x) - 1 - (1-a)x \sim_0 (1-a)x^2$. Donc au voisinage de 0, $f_a(x) - 1 - (1-a)x > 0$ si $a < 1$ et $f_a(x) - 1 - (1-a)x < 0$ si $a > 1$. Donc, si $a > 1$ alors C_{f_a} est sous sa tangente en 0 et si $a < 1$ alors C_{f_a} est au-dessus de sa tangente en 0.

Et si $a = 1$ alors la tangente à C_{f_1} en 0 est horizontale d'équation $y = 1$ et $f_1(x) - 1 \sim_0 \frac{1}{3}x^3$. Donc si $x > 0$ et x au voisinage de 0, $f_1(x) - 1 > 0$

et si $x < 0$ et x au voisinage de 0, $f_1(x) - 1 < 0$. Donc C_{f_1} traverse sa tangente en 0 et est au-dessus de cette tangente au voisinage de 0^+ et en dessous au voisinage de 0^- .

2. a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\text{Arctan}(x)} = e^{\frac{\pi}{2}} \in \mathbb{R}^*$. Donc $e^{\text{Arctan}(x)} \sim_{+\infty} e^{\frac{\pi}{2}}$. De plus, $\frac{1-ax+x^2}{\sqrt{1+x^2}} \sim_{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2}} \stackrel{\substack{\text{car } x>0 \text{ donc} \\ \sqrt{x^2}=|x|=x}}{=} x$. Ainsi, $f_a(x) \sim_{+\infty} e^{\frac{\pi}{2}}x$. De

$$\text{même } f_a(x) \sim_{-\infty} -e^{-\frac{\pi}{2}}x$$

- b. Posons $g(t) = t f_a\left(\frac{1}{t}\right)$

Alors, pour t au voisinage de 0^+ ,

$$tg(t) = t \frac{1 - \frac{a}{t} + \frac{1}{t^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}} e^{\text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)} = t \frac{\frac{t^2 - at + 1}{t^2}}{\sqrt{\frac{t^2 + 1}{t^2}}} e^{\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(t)} \stackrel{t>0 \text{ donc } \sqrt{t^2}=t}{=} t \frac{t^2 - at + 1}{t^2} e^{\frac{\pi}{2}} e^{-\text{Arctan}(t)} = e^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - at + t^2}{\sqrt{1 + t^2}} e^{\text{Arctan}(-t)}$$

$$tg(t) = e^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - (-a)(-t) + t^2}{\sqrt{1 + t^2}} e^{\text{Arctan}(-t)} = e^{\frac{\pi}{2}} f_a(-t) \stackrel{\substack{\text{d'après } (**) \\ \text{avec } \lim_{t \rightarrow 0} -t = 0}}{=} e^{\frac{\pi}{2}} [1 + (1 - (-a))(-t) + (1 - (-a))(-t)^2 + \frac{1}{3}(-t)^3 + o_0(t^3)].$$

$$\text{Ainsi, } tg(t) = e^{\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}}(1+a)t + e^{\frac{\pi}{2}}(1+a)t^2 - \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{3}t^3 + o_0(t^3). \text{ Donc, } \frac{1}{x}f(x) = \frac{1}{x}g\left(\frac{1}{x}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} - (1+a)\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{x} + (1+a)\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{x^2} - \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{3x^3} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

$$\text{Ainsi, } f(x) = e^{\frac{\pi}{2}}x - e^{\frac{\pi}{2}}(1+a) + e^{\frac{\pi}{2}}(1+a)\frac{1}{x} - \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{3}\frac{1}{x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

J'en déduis que si $a \neq -1$ alors $f(x) - (e^{\frac{\pi}{2}x} - e^{\frac{\pi}{2}(1+a)}) \sim_{+\infty} (1+a) \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{x}$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+a) \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{x} = 0$ et $\begin{cases} (1+a) \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{x} > 0 \text{ si } a > -1 \\ (1+a) \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{x} < 0 \text{ si } a < -1 \end{cases}$,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - e^{\frac{\pi}{2}x} = 0$ et $\begin{cases} f(x) - e^{\frac{\pi}{2}x} > 0 \text{ si } a > -1 \\ f(x) - e^{\frac{\pi}{2}x} < 0 \text{ si } a < -1 \end{cases}$ (puisque des fonctions équivalentes au voisinage de a ont en commun

limite en a et signe au voisinage de a). De même, si $a = -1$ alors $f(x) - e^{\frac{\pi}{2}x} \sim_{+\infty} -\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{3x^2}$. Et par suite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - e^{\frac{\pi}{2}x} = 0$ et $f(x) - e^{\frac{\pi}{2}x} < 0$.

Ainsi la droite d'équation $y = e^{\frac{\pi}{2}x} - e^{\frac{\pi}{2}(1+a)}$ est asymptote à Cf en $+\infty$ et Cf est $\begin{cases} \text{au-dessus de cette asymptote si } a > -1 \\ \text{en-dessous de cette asymptote si } a \leq -1 \end{cases}$.

Alors, pour t au voisinage de 0^- ,

$$tg(t) = t \frac{1 - \frac{a+1}{t^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}} e^{\text{Arctan}(\frac{1}{t})} = t \frac{t^2 - at + 1}{\sqrt{t^2 + 1}} e^{-\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(t)} \stackrel{t < 0}{=} t \frac{t^2 - at + 1}{-\frac{1}{t}\sqrt{1+t^2}} e^{-\frac{\pi}{2}} e^{-\text{Arctan}(t)} = -e^{-\frac{\pi}{2}} \frac{1 - at + t^2}{\sqrt{1+t^2}} e^{\text{Arctan}(-t)} = -e^{-\frac{\pi}{2}} f_{-a}(-t)$$

donc $\sqrt{t^2} = -t$

Donc, en utilisant les mêmes calculs que précédemment, je peux en déduire que :

$$f(x) = -e^{-\frac{\pi}{2}x} + e^{-\frac{\pi}{2}(1+a)} - e^{-\frac{\pi}{2}(1+a)} \frac{1}{x} + \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{3} \frac{1}{x^2} + o_{-\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Ainsi la droite d'équation $y = -e^{-\frac{\pi}{2}x} + e^{-\frac{\pi}{2}(1+a)}$ est asymptote à Cf en $-\infty$ et Cf est $\begin{cases} \text{au-dessus de cette asymptote si } a \leq -1 \\ \text{en-dessous de cette asymptote si } a > -1 \end{cases}$.

d. L'asymptote à Cf en $+\infty$ a pour coefficient directeur (pente) $e^{\frac{\pi}{2}}$ donc le vecteur $\vec{u} = \vec{i} + e^{\frac{\pi}{2}}\vec{j}$ est directeur de l'asymptote $+\infty$.

L'asymptote à Cf en $-\infty$ a pour coefficient directeur (pente) $-e^{-\frac{\pi}{2}}$ donc le vecteur $\vec{v} = \vec{i} - e^{-\frac{\pi}{2}}\vec{j}$ est directeur de cette asymptote en $-\infty$.

Alors, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 1 + e^{\frac{\pi}{2}} \times (-e^{-\frac{\pi}{2}}) = 1 - 1 = 0$. J'en conclus que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et ainsi les deux asymptotes sont perpendiculaires.

De plus, l'asymptote en $+\infty$ coupe l'axe des abscisses au point $A(x, 0)$ tel que $0 = e^{\frac{\pi}{2}x} - e^{\frac{\pi}{2}(1+a)}$ i.e. $x = 1 + a$. Et l'asymptote en $-\infty$ coupe l'axe des abscisses au point $A'(x, 0)$ tel que $0 = -e^{-\frac{\pi}{2}x} + e^{-\frac{\pi}{2}(1+a)}$ i.e. $x = 1 + a$. Donc, $A = A'$ et ainsi, les deux asymptotes se coupent perpendiculairement au point A de la droite des abscisses.

D'AUTRES EXEMPLES

Soit $f: (x \mapsto (1 - \tan(x))^{\frac{1}{x}})$. Cherchons un équivalent puis la limite de f en 0.

$f(x) = e^{\frac{1}{x} \ln(1 - \tan(x))}$. Posons $h(x) = \frac{1}{x} \ln(1 - \tan(x))$.

$\lim_{x \rightarrow 0} -\tan(x) = 0$ et $\ln(1+t) \sim_{t \rightarrow 0} t$. Donc, par la composition à droite, $\ln(1 - \tan(x)) \sim_{x \rightarrow 0} -\tan(x)$.

Comme $\tan(x) \sim_{x \rightarrow 0} x$, $-\tan(x) \sim_{x \rightarrow 0} -x$ (produits d'équivalents). Donc, $\ln(1 - \tan(x)) \sim_{x \rightarrow 0} -x$. Par suite, $h(x) \sim_{x \rightarrow 0} -1$. Par conséquent,

$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -1$ et par suite, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{e}$. Comme $\frac{1}{e} \neq 0$, le cours assure que $f(x) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e}$.

Soit $f: x \mapsto (sh(x))^{\sin(x)}$. Cherchons un équivalent puis la limite de f en 0.

$f(x) = e^{\sin(x) \ln(sh(x))}$. Posons $h(x) = \sin(x) \ln(sh(x))$.

$e^x - 1 \sim_0 x$ signifie que $e^x - 1 = x + o_0(x)$ (transformation d'une équivalent en égalité)

et par suite $e^x = 1 + x + o_0(x)$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} -x = 0$, $e^{-x} - 1 \sim_0 -x$ (composition à droite) et par suite $e^{-x} = 1 - x + o_0(x)$.

$\ln(sh(x)) = \ln(e^x - e^{-x}) - \ln(2) = \ln(1 + x + o_0(x) - (1 - x + o_0(x))) - \ln(2)$

$= \ln(2x + o_0(x)) - \ln(2)$ (car le cours assure que $o_0(x) - o_0(x) = o_0(x)$)

$= \ln(2x(1 + o_0(1))) - \ln(2) = \ln(2) + \ln(x) + \ln(1 + o_0(1)) - \ln(2)$

Donc, $\ln(sh(x)) \sim_0 \ln(x)$ car $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + o_0(1)) = 0$. De plus, $\sin(x) \sim_0 x$.

Donc, $h(x) \sim_0 x \ln(x)$ (produit d'équivalents). Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) \stackrel{CC}{=} 0$ (limite con

découle $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. Comme $1 \neq 0$, le la limite finie non nulle donne l'équivalent assure que $f(x) \sim_{x \rightarrow 0} 1$.

Equivalent en 1 de $f(x) = x^x - x$.

$$f(x) = x^x - x = f(x) = x(x^{x-1} - 1) \stackrel{\substack{\sim_1 \\ \text{car } x \sim_1 1 \\ \text{(produit)} \\ \text{d'équivalents}}}{\sim_1} x^{x-1} - 1 = e^{(x-1)\ln(x)} - 1 \stackrel{\substack{\sim_1 \\ \text{car } \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)\ln(x) = 0 \\ \text{et } e^t - 1 \sim_0 t \\ \text{(composition à droite!!)}}}{\sim_1} (x-1)\ln(x) \sim_1 (x-1)^2.$$

$DL_7\left(\frac{\pi}{2}\right)$ de $f(x) = \sqrt[3]{7 + \sin(x)}$

Posons $t = x - \frac{\pi}{2}$ et $g(t) = f(x)$. Alors $g(t) = f\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt[3]{7 + \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt[3]{7 + \cos(t)} = \sqrt[3]{8 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \frac{t^6}{720} + o_0(t^7)}$

$$g(t) = \sqrt[3]{8\left(1 - \frac{t^2}{16} + \frac{t^4}{24 \times 8} - \frac{t^6}{720 \times 8} + o_0(t^7)\right)} = 2\left(1 + \underbrace{\left[-\frac{t^2}{16} + \frac{t^4}{24 \times 8} - \frac{t^6}{720 \times 8} + o_0(t^7)\right]}_{u(t)}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Comme $\lim_{t \rightarrow 0} u(t) = 0$ et $(1+u)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}u + \frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})u^2}{2} + \frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})u^3}{6} + u^3 \varepsilon(u)$ tq $\lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon(u) = 0$,

$(1+u(t))^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}u(t) + \frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})u(t)^2}{2} + \frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})u(t)^3}{6} + \frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})(-\frac{8}{3})u(t)^4}{24} + u(t)^4 \varepsilon(u(t))$ et par composition $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(u(t)) = 0$ et

Pour obtenir un équivalent simple de $f(x)^{g(x)}$ au voisinage de a

1. J'écris $f(x)^{g(x)}$ sous forme exponentielle $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))}$.
2. Je cherche un équivalent simple de $g(x)$ et un autre de $\ln(f(x))$ et j'en fais leur produit.
3. Je transforme cet équivalent par une égalité $u \sim_a v \Rightarrow u = v + o_a(v)$.
4. Ensuite je réinjecte dans l'exponentielle et j'utilise les propriétés de l'exponentielle ou je calcule la limite.

ATTENTION : $u(x) \sim_a v(x) \nRightarrow u(x)^{a(x)} \sim_a v(x)^{a(x)}$
 $u(x) \sim_a v(x) \nRightarrow e^{u(x)} \sim_a e^{v(x)}$

$$\begin{cases} u(t) = -\frac{t^2}{16} + \frac{t^4}{24 \times 8} - \frac{t^6}{720 \times 8} + o_0(t^7) \\ u(t)^2 = \frac{t^4}{16^2} - \frac{t^6}{8 \times 24 \times 8} + o_0(t^7) \\ u(t)^3 = -\frac{t^6}{16^3} + o_0(t^7) \\ u(t)^4 = o_0(t^7) \text{ et } u(t)^4 \varepsilon(u(t)) = o_0(t^7) \end{cases} \quad . \text{ Donc, } (1 + u(t))^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3} \left(-\frac{t^2}{16} + \frac{t^4}{24 \times 8} - \frac{t^6}{720 \times 8} \right) - \frac{1}{9} \left(\frac{t^4}{16^2} - \frac{t^6}{8 \times 24 \times 8} \right) + \frac{5}{81} \left(-\frac{t^6}{16^3} \right) + o_0(t^7)$$

Donc, $g(t) = 2 - \frac{1}{24}t^2 + \frac{1}{384}t^4 - \frac{1}{829440}t^6 + o_0(t^7)$.

Ainsi, $f(x) = 2 - \frac{1}{24}(x - \frac{\pi}{2})^2 + \frac{1}{384}(x - \frac{\pi}{2})^4 - \frac{1}{829440}(x - \frac{\pi}{2})^6 + o_{\frac{\pi}{2}}((x - \frac{\pi}{2})^7)$

$DL_5(1)$ de $f(x) = e^{x^2-5x-4}$

Posons $t = x - 1$ et $g(t) = f(x)$.

Alors $g(t) = f(t+1) = e^{(t+1)^2-5(t+1)-4} = e^{t^2-3t-8} = e^{-8}e^{t^2-3t}$.

Comme $\lim_{t \rightarrow 0} t^2 - 3t = 0$ et $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + \frac{u^5}{120} + u^5 \varepsilon(u)$ et $\lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon(u) = 0$,

$e^{t^2-3t} = 1 + t^2 - 3t + \frac{(t^2-3t)^2}{2} + \frac{(t^2-3t)^3}{6} + \frac{(t^2-3t)^4}{24} + \frac{(t^2-3t)^5}{120} + \underbrace{(t^2-3t)^5}_{\sim_0 t^5} \varepsilon(u(t^2-3t))$ et $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t^2-3t) = 0$. Donc, $e^{t^2-3t} =$

$1 + t^2 - 3t + \frac{9t^2+t^4-6t^3}{2} + \frac{-27t^3+27t^4-9t^5}{6} + \frac{81t^4-108t^5}{24} + \frac{-243t^5}{120} + t^5 o_0(1)$.

Alors $g(t) = e^{-8}[1 - 3t + \frac{11}{2}t^2 + (-3 - \frac{9}{2})t^3 + (\frac{1}{2} + \frac{9}{2} + \frac{27}{8})t^4 + (-\frac{3}{2} - \frac{9}{2} - \frac{81}{40})t^5 + t^5 o_0(1)]$

Ainsi, $f(x) = e^{-8}[1 - 3(x-1) + \frac{11}{2}(x-1)^2 + (-\frac{15}{2})(x-1)^3 + (\frac{67}{8})(x-1)^4 + (-\frac{321}{40})(x-1)^5 + o_1((x-1)^5)]$.

$DL_4(0)$ de $f(x) = \ln(1 + \text{Arctan}(x) + \cos(x))$

$f(x) = \ln(1 + \text{Arctan}(x) + \cos(x)) = \ln\left(1 + x - \frac{x^3}{3} + o_0(x^4) + 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_0(x^4)\right)$

$f(x) = \ln\left(2 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24} + o_0(x^4)\right) = \ln(2) + \ln\left(1 + \underbrace{\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{48} + o_0(x^4)}_{u(x)}\right)$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$ et $\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + u^4 \varepsilon(u)$ et $\lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon(u) = 0$,

$\ln(1 + u(x)) = u(x) - \frac{u(x)^2}{2} + \frac{u(x)^3}{3} - \frac{u(x)^4}{4} + u(x)^4 \varepsilon(u(x))$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(u(x)) = 0$ et

$u(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{48} + o_0(x^4)$

$u^2(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{4} - \frac{5x^4}{48} + o_0(x^4)$

$u^3(x) = \frac{x^3}{8} - \frac{3x^4}{16} + o_0(x^4)$

$u^4(x) = \frac{x^4}{16} + o_0(x^4)$

Donc, $f(x) = \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{3x^2}{8} - \frac{x^4}{192} + o_0(x^4)$.

$DL_3(0)$ de $f(x) = \frac{\ln(\text{ch}(x))}{\sin(x) \text{sh}(x)}$

$\frac{\ln(\text{ch}(x))}{\sin(x) \text{sh}(x)} = \frac{\ln(1 + \underbrace{\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_0(x^5)}}{(x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^4))(x + \frac{x^3}{6} + o_0(x^4))} = \frac{\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_0(x^5)}{x^2 + o_0(x^5)} = \frac{x^2(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{12} + o_0(x^3))}{x^2(1 + o_0(x^3))} = \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + o_0(x^3)\right) \frac{1}{1 + o_0(x^3)} = \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + o_0(x^3)\right) (1 + o_0(x^3)) = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + o_0(x^3)$.

$DL_4(0)$ de $f(x) = \text{Arcsin}\left(x + \frac{1}{2}\right)$

Arcsin étant dérivable sur $] -1 ; 1[$, f est dérivable est $] -\frac{3}{2} ; \frac{1}{2}[$ et $\forall x \in] -\frac{3}{2} ; \frac{1}{2}[$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (x + \frac{1}{2})^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4} - x - x^2}}$.

Cherchons un $DL_3(0)$ de $f'(x)$: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4} - x - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4} \sqrt{1 - \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}x^2}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(1 + \underbrace{\left(-\frac{4}{3}x - \frac{4}{3}x^2\right)}_{u(x)}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Or $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$ et $(1 + t)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})t^2}{2} + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})t^3}{6} + t^3 \varepsilon(t)$ tq $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$. Donc,

$(1 + u(x))^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}u(x) + \frac{3}{8}u(x)^2 + \frac{5}{16}u(x)^3 + u(x)^3 \varepsilon(u(x))$ et $\begin{cases} u(x) = -\frac{4}{3}x - \frac{4}{3}x^2 \\ u^2(x) = \frac{16}{9}x^2 + \frac{32}{9}x^3 + o_0(x^3) \\ u^3(x) = \frac{64}{27}x^3 + o_0(x^3) \sim_0 \frac{64}{27}x^3 \\ u(x)^3 \varepsilon(u(x)) = o_0(x^3) \end{cases}$.

Alors, $(1 + u(x))^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \left(-\frac{4}{3}x - \frac{4}{3}x^2 \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{16}{9}x^2 + \frac{32}{9}x^3 \right) + \frac{5}{16} \cdot \frac{64}{27}x^3 + o_0(x^3) = 1 + \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}x^2 + \frac{20}{27}x^3 + o_0(x^3)$.

Donc, $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4}{3\sqrt{3}}x + \frac{8}{3\sqrt{3}}x^2 + \frac{40}{27\sqrt{3}}x^3 + o_0(x^3)$. Alors le TITT assure que :

$$f(x) = f(0) + \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{x^2}{2} + \frac{8}{3\sqrt{3}} \frac{x^3}{3} + \frac{40}{27\sqrt{3}} \frac{x^4}{4} + o_0(x^4) = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{3\sqrt{3}}x^2 + \frac{8}{9\sqrt{3}}x^3 + \frac{10}{27\sqrt{3}}x^4 + o_0(x^4)$$

$DL_2\left(\frac{\pi}{4}\right)$ de $f(x) = (\tan(x))^{\tan(2x)}$. Qu'en déduit-on sur f ?

Posons $t = x - \frac{\pi}{4}$ et $g(t) = f(x)$. Alors $x = t + \frac{\pi}{4}$ et $g(t) = f\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$ et $f(x) = g\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Cherchons un $DL_2(0)$ de g :

$$g(t) = f\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \left(\tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right)^{\tan\left(2\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right)} = e^{\tan\left(2\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right)\ln\left(\tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right)} = e^{\tan\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)\ln\left(\frac{\tan(t)+1}{1-\tan(t)}\right)}$$

$$\text{Posons } h(t) = \tan\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)\ln\left(\frac{\tan(t)+1}{1-\tan(t)}\right) = -\frac{[\ln(1+\tan(t)) - \ln(1-\tan(t))]}{\tan(2t)} = -\frac{\ln\left(1 + \left(t + \frac{t^3}{3} + o_0(t^3)\right)\right) - \ln\left(1 - \left(-t - \frac{t^3}{3} + o_0(t^3)\right)\right)}{2t + \frac{(2t)^3}{3} + o_0(t^3)}$$

$$h(t) = -\frac{\left[\left(t + \frac{t^3}{3}\right) - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o_0(t^3)\right] - \left[-\left(t + \frac{t^3}{3}\right) + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + o_0(t^3)\right]}{2t + \frac{(2t)^3}{3} + o_0(t^3)} = -\frac{2t + \frac{4}{3}t^3 + o_0(t^3)}{2t + \frac{8}{3}t^3 + o_0(t^3)} = -\frac{2t\left(1 + \frac{2t^2}{3} + o_0(t^2)\right)}{2t\left(1 + \frac{4}{3}t^2 + o_0(t^2)\right)}$$

$$h(t) = -\left(1 + \frac{2t^2}{3} + o_0(t^2)\right) \frac{1}{1 + \frac{4}{3}t^2 + o_0(t^2)} = -\left(1 + \frac{2t^2}{3} + o_0(t^2)\right) \left(1 - \frac{4}{3}t^2 + o_0(t^2)\right) = -1 + \frac{2}{3}t^2 + o(t^2).$$

$$\text{Donc, } g(t) = e^{-1 + \frac{2}{3}t^2 + o(t^2)} = e^{-1} e^{\frac{2}{3}t^2 + o(t^2)} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{2}{3}t^2 + o(t^2)\right).$$

$$\text{Donc, } f(x) = \frac{1}{e} + \frac{2}{3e} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + o_{\frac{\pi}{4}}\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right).$$

J'en déduis que :

1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x) = \frac{1}{e}$. Donc f est prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{4}$. On note $\tilde{f}$ son prolongement par continuité en $\frac{\pi}{4}$.

$$2) \forall x \neq \frac{\pi}{4}, \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{f(x) - \frac{1}{e}}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{2}{3e} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + o_{\frac{\pi}{4}}\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{2}{3e} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + o_{\frac{\pi}{4}}\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Donc, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = 0$. Ainsi, $\tilde{f}$ est dérivable en $\frac{\pi}{4}$ et $\tilde{f}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ et $y = \frac{1}{e}$ est l'équation de la tangente à $C\tilde{f}$ en $\frac{\pi}{4}$.

3) Son prolongement $\tilde{f}$ admet le $DL_2\left(\frac{\pi}{4}\right)$ suivant : $f(x) = \frac{1}{e} + \frac{2}{3e} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + o_{\frac{\pi}{4}}\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right)$ donc,

$f(x) - \frac{1}{e} \sim \frac{2}{3e} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2$. Par conséquent, $f(x) - \frac{1}{e}$ est du signe de $\frac{2}{3e} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2$ donc positif au voisinage de $\frac{\pi}{4}$. Donc Cf est au-dessus de sa tangente horizontale et $\tilde{f}$ admet en $\frac{\pi}{4}$ un minimum local.

Limite en 0 de $\frac{2}{\sin^2(x)} - \frac{1}{1 - \cos(x)}$.

$\frac{2}{\sin^2(x)} \sim 0 \frac{2}{x^2}$ et $\frac{1}{1 - \cos(x)} \sim 0 \frac{1}{\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{x^2}$. Donc, je ne peux pas conclure.

$$\frac{2}{\sin^2(x)} - \frac{1}{1 - \cos(x)} = \frac{2}{\left(x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^4)\right)^2} - \frac{1}{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o_0(x^4)} = \frac{2}{x^2 - \frac{x^4}{3} + o_0(x^4)} - \frac{2}{x^2 - \frac{x^4}{12} + o_0(x^4)} = \frac{2}{x^2} \left(\frac{1}{1 - \frac{x^2}{3} + o_0(x^2)} - \frac{1}{1 - \frac{x^2}{12} + o_0(x^2)} \right)$$

$$= \frac{2}{x^2} \left(\left(1 + \frac{x^2}{3} + o_0(x^2)\right) - \left(1 + \frac{x^2}{12} + o_0(x^2)\right) \right) = \frac{2}{x^2} \left(\frac{x^2}{4} + o_0(x^2) \right) \sim 0 \frac{1}{2}. \text{ Donc, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sin^2(x)} - \frac{1}{1 - \cos(x)} = \frac{1}{2}$$

Equivalent en 0 de $f(x) = \sin(\ln(1+x)) - \ln(1 + \sin(x))$.

$$f(x) = \sin(\ln(1+x)) - \ln(1 + \sin(x)) = \sin\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o_0(x^4)\right) - \ln\left(1 + x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^4)\right)$$

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^4}{12} - \left[x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right] + o_0(x^4) = \frac{x^4}{12} + o_0(x^4) \sim 0 \frac{x^4}{12}.$$

Equivalent en 0 de $f(x) = x^x - \sin(x)^{\sin(x)}$.

$$f(x) = x^x - \sin(x)^{\sin(x)} = e^{x \ln(x)} - e^{\sin(x) \ln(\sin(x))} = e^{x \ln(x)} - e^{(x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)) \ln\left(x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)\right)}$$

$$= e^{x \ln(x)} - e^{(x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)) \ln\left(x \left(1 - \frac{x^2}{6} + o_0(x^2)\right)\right)} = e^{x \ln(x)} - e^{(x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)) [\ln(x) + \ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + o_0(x^2)\right)]}$$

$$= e^{x \ln(x)} - e^{(x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)) [\ln(x) - \frac{x^2}{6} + o_0(x^2)]} = e^{x \ln(x)} - e^{x \ln(x) - \frac{x^3}{6} \ln(x) + o_0\left(\frac{x^3}{6} \ln(x)\right)} = e^{x \ln(x)} \left(1 - e^{-\frac{x^3}{6} \ln(x) + o_0\left(\frac{x^3}{6} \ln(x)\right)}\right)$$

$$f(x) \underset{\text{car } \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln(x)} = 1}{\sim 0} 1 - e^{-\frac{x^3}{6} \ln(x) + o_0\left(\frac{x^3}{6} \ln(x)\right)} \underset{\text{car } \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^3}{6} \ln(x) + o_0\left(\frac{x^3}{6} \ln(x)\right) = 0}{\sim 0} -\frac{x^3}{6} \ln(x) + o_0\left(\frac{x^3}{6} \ln(x)\right) \sim 0 -\frac{x^3}{6} \ln(x).$$

et $e^u - 1 \sim u$

Equivalent en $+\infty$ de $f(x) = (\ln(x))^2 \left[\sin\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) - \sin\left(\frac{1}{\ln(x+1)}\right) \right]$.

$$f(x) = (\ln(x))^2 \left[\sin\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) - \sin\left(\frac{1}{\ln(x+1)}\right) \right] = (\ln(x))^2 \left[2 \sin\left(\frac{1}{2\ln(x)} - \frac{1}{2\ln(x+1)}\right) \cos\left(\frac{1}{2\ln(x)} + \frac{1}{2\ln(x+1)}\right) \right]$$

$$\sim_{+\infty} (\ln(x))^2 2 \sin\left(\frac{\frac{1}{2\ln(x)} - \frac{1}{2\ln(x+1)}}{u(x)}\right) \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{2\ln(x)} + \frac{1}{2\ln(x+1)}\right) = 1. \text{ Or,}$$

$$u(x) = \frac{1}{2\ln(x)} - \frac{1}{2\ln(x+1)} = \frac{\ln(x+1) - \ln(x)}{2\ln(x)\ln(x+1)} = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{2\ln(x)\ln\left(x\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)} = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{2\ln(x)\left[\ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]}$$

$\begin{array}{l} \text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \text{et } \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \sim_0 u. \\ \sim_{+\infty} \\ \text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0 \\ \text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \\ \text{donc } \ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \sim_{+\infty} \ln(x). \end{array}$

$$\frac{1}{2\ln^2(x)} = \frac{1}{2x\ln^2(x)}.$$

En particulier, $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$. Par conséquent, $\sin(u(x)) \sim_{+\infty} u(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{2x\ln^2(x)}$. Et ainsi, $f(x) \sim_{+\infty} \ln^2(x) \frac{1}{x\ln^2(x)} = \frac{1}{x}$.

Limite en $+\infty$ de $\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x$.

$$\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x = e^{x \ln\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)}. \text{ Posons } t = \frac{1}{x} \text{ et } g(t) = f(x).$$

Alors $x = \frac{1}{t}$ et $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ et $f(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$. Déterminons la limite de g en 0.

$$g(t) = e^{\frac{1}{t} \ln(\sin(t) + \cos(t))} = e^{\frac{1}{t} \ln(1 + t + o_0(t))} = e^{\frac{1}{t} (t + o_0(t))} = e^{1 + o_0(1)}. \text{ Donc, } \lim_{t \rightarrow 0} g(t) = e \text{ et ainsi, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e.$$

Limite en $+\infty$ de $\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x \ln(x)}$.

$$\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x \ln(x)} = e^{x \ln(x) \ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)} = e^{x \ln(x) [\ln(\ln(1+x)) - \ln(\ln(x))]}.$$

Posons $t = \frac{1}{x}$ et $g(t) = f(x)$.

$$\text{Alors } g(t) = e^{\frac{1}{t} \ln\left(\frac{1}{t}\right) \left[\ln\left(\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)\right) - \ln\left(\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)\right]}.$$

$$h(t) = \frac{1}{t} \ln\left(\frac{1}{t}\right) \left[\ln\left(\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)\right) - \ln\left(\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)\right] = -\frac{1}{t} \ln(t) [\ln(\ln(1+t)) - \ln(t) - \ln(-\ln(t))]$$

$$h(t) = -\frac{1}{t} \ln(t) \left[\ln(-\ln(t)) + \ln\left(1 - \frac{\ln(1+t)}{\ln(t)}\right) - \ln(-\ln(t))\right]$$

$$= -\frac{1}{t} \ln(t) \ln\left(1 - \frac{\ln(1+t)}{\ln(t)}\right) \underset{\sim_0}{\sim} -\frac{1}{t} \ln(t) \left(-\frac{\ln(1+t)}{\ln(t)}\right) = \frac{\ln(1+t)}{t} \sim_0 1.$$

$$\begin{array}{l} \text{car } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{\ln(t)} = 0 \\ \text{et } \ln(1+u) \sim_0 u \end{array}$$

Donc, $\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = e$ et ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e \cdot \frac{2}{3e} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + o_{\frac{\pi}{4}} \left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right)$