DL 8

Ex 1 Une Equation différentielle d'ordre 1 non linéaire

Soit $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0;1\}$ *et* l'équation de Bernoulli (B_n): $y'(x) + a(x)y(x) + b(x)y(x)^n = 0$

où a et b sont des fonctions réelles et continues sur un même intervalle I , y la fonction inconnue et x la variable de dérivation, élément de I . Cette équation de Bernoulli n'est pas linéaire.

Une solution de (B_n) sur I est toute fonction $y : I \to \mathbb{R}$, dérivable sur I et telle que :

$$\forall x \in I, y'(x) + a(x)y(x) + b(x)y(x)^n = 0$$

Soit y une fonction dérivable sur I et ne s'annulant pas sur I. On pose $z(x) = \frac{1}{y(x)^{n-1}}$.

1. Montrer que :

y est solution de (B_n) sur I **sietssi** z est solution sur I d'une équation différentielle linéaire (E_n) d'ordre 1.

(on ne demande pas ici de résoudre (E_n)).

2. Application :

a) Déterminer toutes les fonctions y qui sont dérivables et ne s'annulent pas sur $I =]1;+\infty[$ et qui vérifient : $\forall x \in I, -x^2y'(x) + xy(x) = y^2(x)$ (équation notée (B_2)) .

b) Montrer que pour chacune des fonctions f solutions de (B_2) sur I trouvées à la question précédente (i.e. f ne s'annulant pas sur I) , il existe un réel $\beta \in [1,+\infty[$ tel que $\forall x \in I, f(x) = \frac{x}{\ln(\beta x)}$.

c) Pour $\beta \in [1,+\infty[$, on note (C_β) la courbe d'équation $y = \frac{x}{\ln(\beta x)}$. Montrer que (C_β) est l'image de (C_1) par une homothétie de centre O dont on précisera le rapport.

Ex 2 Développements limités obtenus par résolution d'une équation différentielle

A. Deux équations différentielles linéaires liées

1. Soit l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et l'équation différentielle (E_1): $cos(t)z''(t) - 2sin(t)z'(t) - cos(t)z(t) = 0$.

   Résoudre (E_1) sur I en effectuant le changement de fonction $\varphi(t) = cos(t)z(t)$.

2. Soit $J =]-1,1[$ et (E_2): $(1 - x^2)y''(x) - 3xy'(x) - y(x) = 0$.

   B. Résoudre (E_2) sur J en effectuant le changement de variable $x = \sin(t)$.

C. Dans cette partie, on considère une <u>solution quelconque f de (E_2) sur J</u> .

3. Montrer que f est de classe C^∞ sur J .
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in J, (1 - x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n + 3)xf^{(n+1)}(x) - (n + 1)^2f^{(n)}(x) = 0$.
5. On pose $a_n = f^{(n)}(0)$. Etablir une relation entre a_{n+2} *et* a_n .
6. Exprimer a_{2p+1} *et* a_{2p} en fonction de respectivement $a_1 = f'(0)$ et $a_0 = f(0)$ et à l'aide de factorielles.

C. Application au DL.

7. En remarquant que h: $(x \to \frac{Arcsinx}{\sqrt{1-x^2}})$ est une solution de (E_2) , déterminer, grâce à Taylor Young et à ce qui précède, le développement limité de h à l'ordre $2n + 1$ au voisinage de 0 .
8. De même, déterminer le développement limité de g: $(x \to \frac{1}{\sqrt{1-x^2}})$ à l'ordre $2n$ au voisinage de 0 .
9. En déduire le développement limité de $Arcsin$ à l'ordre $2n + 1$ au voisinage de 0 .

Fin.