Programme de colle 13

Chap 9 : Dérivées $n^{\text{ièmes}}$. Comparaison des fonctions. Développements limités.

I Dérivées $n$ièmes

- Définition de la dérivée $n$ième, de la classe $C^n\ ou\ C^\infty$. Ensembles $C^n(I,K),\ D^n(I,K) et\ C^\infty(I,K)$.
- Dérivées successives des fonctions usuelles :

$exp \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})\ \ et\ \ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, exp^{(n)}(x) = e^x$.

$ch \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})\ \ et\ \ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, ch^{(n)}(x) = \begin{cases} ch(x)\ si\ n\ pair \\ sh(x)\ si\ n\ impair \end{cases}$. Et $sh \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})\ \ et\ \ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, sh^{(n)}(x) = \begin{cases} sh(x)\ si\ n\ pair \\ ch(x)\ si\ n\ impair \end{cases}$.

$\cos et\ \ sin \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})\ \ et\ \ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} cos(x)\ si\ n\ pair \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} sin(x)\ si\ n\ impair \end{cases}$ $sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} sin(x)\ si\ n\ pair \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} cos(x)\ si\ n\ impair \end{cases}$

$ln \in C^\infty(\mathbb{R}^{+*},\mathbb{R})\ \ et\ \ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, ln^{(n)}(x) = \begin{cases} ln(x)\ si\ n = 0 \\ \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}\ si\ n \geq 1 \end{cases}$.

$f: \left(x \mapsto \frac{1}{x}\right) \in C^\infty(\mathbb{R}^*,\mathbb{R})\ \ et\ \ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$. $f: (x \mapsto x^\alpha) \in C^\infty(\mathbb{R}^{+*},\mathbb{R})\ \ et\ \ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f^{(n)}(x) = \begin{cases} \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}\ si\ n \geq 1 \\ x^\alpha\ si\ n = 0 \end{cases}$.

- Dérivées successives d'une combinaison linéaire et d'un produit (formule de Leibniz) de deux fonctions n-fois dérivables (ou de classe C^n) sur un même domaine.

Formule de Leibniz : Si $f = u \times v$ telles que u et v sont de classe C^n sur I $(n \in \mathbb{N})$ alors
f est de classe C^n sur I et $\forall x \in I, f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x)$

- Classe C^kd'un quotient, d'une composée, d'une bijection réciproque (admis) .
- **Critère de classe C^n ou C^∞ (admis pour $n = 1$) :** Soit I un intervalle et $a \in I$. et $\forall x \in I, f(x) = \begin{cases} g(x)\ si\ x \in I\backslash\{a\} \\ L_0\ si\ x = a \end{cases}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si g est de classe C^n sur $I\backslash\{a\}$ et $\lim_{x\to a} g(x) = L_0\ et\ \ \forall k \in [\![1,n]\!], \lim_{x\to a} g^{(k)}(x) = L_k$ existe et est finiealors f est de classe C^n sur l'intervalle I et $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\forall x \in I, f^{(k)}(x) = \begin{cases} g^{(k)}(x)\ si\ x \neq a \\ L_k\ si\ x = a \end{cases}$.

Si g est de classe C^∞ sur $I\backslash\{a\}$ et et $\lim_{x\to a} g(x) = L_0\ et\ \ \forall k \in \mathbb{N}^*, \lim_{x\to a} g^{(k)}(x)$ existe et est finie et alors f est de classe C^∞ sur l'intervalle I et $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in I, f^{(k)}(x) = \begin{cases} g^{(k)}(x)\ si\ x \neq a \\ L_k\ si\ x = a \end{cases}$.

II Comparaisons entre fonctions.

- Définitions d'une fonction négligeable devant une autre au voisinage de a , d'une fonction équivalente à une autre au voisinage de a , d'une fonction dominée par une autre au voisinage de a . Notations .
- Caractérisation par le quotient :

si f et g sont définies sur une même voisinage de a et g ne s'annule pas sur ce voisinage de a sauf éventuellement en a alors

- ✓ $f \sim_a g \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
- ✓ $f = o_a(g) \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
- ✓ $f = O_a(g) \Leftrightarrow \frac{f}{g} est\ bornée\ sur\ un\ voisinage\ de\ a.$

- Théorème de comparaison .

- ✓ $f \sim_a g\ ou\ f = o_a(g)\ \Rightarrow f = O_a(g)$
- ✓ $f = o_a(g)\ et\ g = o_a(h)\ \Rightarrow\ f = o_a(h)$.
- ✓ $f \sim_a g\ et\ g = o_a(h)\ \Rightarrow\ f = o_a(h)$.
- ✓ $f = o_a(g)\ et\ g \sim_a h\ \Leftrightarrow\ f = o_a(h)$.
- ✓ $f \sim_a g\ et\ g = o_a(h)\ \Leftrightarrow\ f = o_a(h)$.
- ✓ $f\ bornée\ au\ voisinage\ de\ a\ et\ \lim_{x\to a} g(x) = \infty \Rightarrow f = o_a(g)$

- Propriétés et opérations sur les fonctions négligeables :

- ✓ $o_a(1)$ désigne une fonction qui tend vers 0 en a.
- ✓ $o_a(g) = g \times o_a(1)$
- ✓ $o_a(fg) = f \times o_a(g) = fg \times o_a(1) = g \times o_a(f)$
- ✓ $o_a(g) + o_a(g) = o_a(g)$
- ✓ Pour tout réel λ non nul , $o_a(\lambda g) = o_a(g) = \lambda o_a(g)$
- ✓ Une somme finie ou combinaison linéaire (finie) de fonction négligeables devant g au voisinage de a est une fonction négligeable devant g au voisinage de a.

- Caractérisation et propriétés sur les équivalents :

- ✓ $f \sim_a g \Leftrightarrow f = g + o_a(g) \Leftrightarrow f - g = o_a(g). Autrement\ dit, g + o_a(g) \sim_a g.$
- ✓ $f \sim_a g\ et\ g \sim_a h\ \Rightarrow f \sim_a h.$
- ✓ $f \sim_a g \Rightarrow f$ et g ont le même signe strict sur un voisinage de a.
- ✓ $\begin{cases} f \sim_a g \\ \lim_{x\to a} g(x) = L \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = L.$
- ✓ $\lim_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}^* \Rightarrow f \sim_a L.$

✓ $\begin{cases} f \text{ est dérivable en } a \\ f'(a) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) - f(a) \sim_a f'(a)(x-a)$.

- Opérations autorisées sur les fonctions équivalentes : produit , quotient , puissance constante , composition à droite .

✓ $f \sim_a g$ et $u \sim_a v \Rightarrow f \times u \sim_a g \times v$.
✓ $f \sim_a g$ et $u \sim_a v$ et u ne s'annule pas au voisinage de a (sauf éventuellement en a) $\Rightarrow \frac{f}{u} \sim_a \frac{g}{v}$.
✓ $f \sim_a g$ et α constante réelle $\Rightarrow f^\alpha \sim_a g^\alpha$.
✓ $f \sim_a g$ et $\lim_{x \to b} u(x) = a \Rightarrow f(u(x)) \sim_b g(u(x))$.

- Opérations interdites sur les fonctions équivalentes : somme , puissance non constante , composition à gauche .

✓ $f \sim_a g$ et $u \sim_a v \Rightarrow f + u \sim_a g + v$.
✓ $f \sim_a g$ et α fonction non constante $\Rightarrow f(x)^{\alpha(x)} \sim_a g(x)^{\alpha(x)}$.
✓ $f \sim_a g \Rightarrow u(f(x)) \sim_a u(g(x))$.

- Exemples déjà rencontrés :
  ✓ Comparaison des fonctions puissances entre elles au voisinage de 0 et de $+\infty$: soit α et β *réels*

$\alpha < \beta \Rightarrow \begin{cases} x^\alpha \ll_{+\infty} x^\beta \\ x^\beta \ll_0 x^\alpha \end{cases}$.

  ✓ Comparaison des fonctions $(x \mapsto (x-a)^k)$ tel que $k \in \mathbb{Z}$ au voisinage de a . Soit n et m entiers.

$n < m \Rightarrow (x-a)^m \ll_a (x-a)^n$.

  ✓ Equivalent d'une fonction polynomiale au voisinage de $+\infty$ puis de 0.

Soit n et m entiers tels que $n \leq m$ et $a_0, ., a_n, .., a_m$ réels tels que $a_m \neq 0$ et $a_n \neq 0$. $\sum_{k=0}^m a_k x^k \sim_{+\infty} a_m x^m$ et $\sum_{k=n}^m a_k x^k \sim_0 a_n x^n$.

  ✓ Croissances comparées.

pour tous réels α, β *strictement positifs et* $a > 1$, $\ln(x)^\alpha \ll_{+\infty} x^\beta \ll_{+\infty} a^x$.

  ✓ Equivalents usuels obtenus par taux d'accroissement ou d'autres limites usuelles.

$e^x - 1 \sim_0 x$
$ln(1+x) \sim_0 x$
$ln(y) \sim_1 y - 1$
$\sin(x) \sim_0 x$
$\tan(x) \sim_0 x$
$sh(x) \sim_0 x$

$\text{Arctan}(x) \sim_0 x$
$Arcsin(x) \sim_0 x$
$(1+x)^\alpha - 1 \sim_0 \alpha x$ (où $\alpha \in \mathbb{R}^*$)
$cos(x) - 1 \sim_0 -\frac{1}{2} x^2$
$ch(x) - 1 \sim_0 \frac{1}{2} x^2$

- se ramener en 0.

Soit f définie au voisinage du réel x_0. Posons $g(t) = f(x_0 + t)$ i.e. $f(x) = g(x - x_0)$. Alors, $g(t) \sim_0 h(t) \Leftrightarrow f(x) \sim_{x_0} h(x - x_0)$
Soit f définie au voisinage de $\pm\infty$. Posons $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ i.e. $f(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$. Alors, $g(t) \sim_{0^\pm} h(t) \Leftrightarrow f(x) \sim_{\pm\infty} h\left(\frac{1}{x}\right)$

III Développements limités .

- **Définition** d'un développement limité en un réel et en particulier en 0. **Unicité** de ce DL.

Si au voisinage de $x_0, f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots .. + a_n(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \cdots .. + b_n(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n)$ alors $\forall k \in [\![0, n]\!], a_k = b_k$.

- **Propriétés des DL :**
  ✓ Equivalent

Si au voisinage de $x_0, f(x) = a_p(x - x_0)^p + \cdots .. + a_n(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n)$ *avec* $p \leq n$ *et* $a_p \neq 0$ alors $f(x) \sim_{x_0} a_p(x - x_0)^p$.

  ✓ « se ramener en 0 »

Soit f définie au voisinage du réel x_0. Posons $g(t) = f(x_0 + t)$ i.e. $f(x) = g(x - x_0)$. Alors,
g *admet le* $DL_n(0)$ *suivant* $g(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots .. + a_n t^n + o_0(t^n)$
$\Leftrightarrow f$ *admet le* $DL_n(x_0)$ *suivant* : $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots .. + a_n(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n)$

  ✓ Troncature

Si f admet le $DL_n(x_0)$ suivant: $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots .. + a_n(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n)$
alors f admet *le* $DL_{n-1}(x_0)$ *suivant*: $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots .. + a_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + o_{x_0}((x - x_0)^{n-1})$

  ✓ Développement limité en 0 d'une fonction paire ou impaire

Si f est paire et admet un $DL_n(0)$ alors ce $DL_n(0)$ est de la forme $f(t) = a_0 + a_2 t^2 + a_4 t^4 \ldots .. + \begin{cases} a_n t^n + o_0(t^n) \text{ si } n \text{ pair} \\ a_{n-1} t^{n-1} + o_0(t^n) \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$.

Si f est impaire et admet un $DL_n(0)$ alors ce $DL_n(0)$ est de la forme $f(t) = a_1 t + a_3 t^3 \ldots .. + \begin{cases} a_n t^n + o_0(t^n) \text{ si } n \text{ impair} \\ a_{n-1} t^{n-1} + o_0(t^n) \text{ si } n \text{ pair} \end{cases}$.

- **Développements limités usuels :**
  ✓ Développement limité en 0 de $\frac{1}{1-x}$ obtenu par somme géométrique puis de $\frac{1}{1+x}$ e

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n o_0(1) = \sum_{k=0}^n x^k + o_0(x^n)$.

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + x^n o_0(1) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o_0(x^n)$.

  ✓ **Théorème de Taylor-Young** et développement limité en 0 de $e^x, \cos(x), \sin(x), sh(x), ch(x), (1+x)^\alpha$.

Si f est de classe C^n un voisinage de x_0 contenant x_0 alors f admet le $DL_n(x_0)$: $f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}_{Q_n(x - x_0)} + \underbrace{o_{x_0}((x - x_0)^n)}_{reste}$.

Si f est de classe C^n sur un voisinage de 0 contenant 0 alors f admet le $DL_n(0)$: $f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}_{P_n(x)} + \underbrace{o_0(x^n)}_{reste}$.

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n o_0(1) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o_0(x^n)$.
$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} o_0(1) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_0(x^{2n+2})$.

$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} o_0(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o_0(x^{2n+1})$.

$\mathrm{sh}\,(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} o_0(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_0(x^{2n+2})$.

$\mathrm{ch}\,(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} o_0(1) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o_0(x^{2n+1})$.

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)..(\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n o_0(1)$.

- ✓ **Théorème d'intégration terme à terme** et développement limité en 0 de $\ln(1+x)$, $Arctan(x)$, $\underbrace{\tan(x)\ et\ Arcsin(x)}_{ordre\ 5\ uniquement}$.

•Si f est dérivable sur un voisinage de 0 contenant 0 et f' admet le $DL_n(0)$ suivant : $f'(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + o_0(x^n)$
alors f admet le $DL_{n+1}(0)$ suivant : $f(x) = f(0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o_0(x^{n+1})$.

•Si f est dérivable sur un voisinage de x_0 contenant x_0 et f' admet le $DL_n(x_0)$ suivant :

$$f'(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots + a_n (x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n)$$

alors f admet le $DL_{n+1}(x_0)$ suivant : $f(x) = f(x_0) + a_0 (x - x_0) + a_1 \frac{(x-x_0)^2}{2} + \dots + a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} + o_{x_0}((x - x_0)^{n+1})$.

$Arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o_0(x^{2n+1})$.

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + o_0(x^{n+1})$.

$Arcsin(x) = x + \frac{1}{6} x^3 \mp \frac{3}{40} x^5 + x^5 o_0(1)$.

$tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5 o_0(1)$.

- **Opérations sur les DL :** Combinaison linéaire et produit. Composition. Inverse et quotient.

Soit $\alpha\ et\ \beta$ deux constantes réelles . Si $f\ et\ g$ admettent les $DL_n(0)$ suivants : $f(x) = P(x) + o_0(x^n)$ et $g(x) = Q(x) + o_0(x^n)$
alors $\alpha f + \beta g\ et\ fg$ admettent chacune un $DL_n(0)$ et
$\alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha P(x) + \beta Q(x) + o_0(x^n)$.
$f(x) \times g(x) = [somme\ des\ termes\ de\ degré\ inférieur\ ou\ égal\ à\ n\ de\ \ P(x) \times Q(x)] + o_0(x^n)$.

Si f admet le $DL_n(0)$ et $\lim_{x\to 0} f(x) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ admet un $DL_n(0)$.
Si $f\ et\ g$ admettent des $DL_n(0)$ et $\lim_{x\to 0} f(x) \neq 0$ alors $\frac{g}{f}$ admet un $DL_n(0)$.

Si f admet le $DL_n(0)$ et $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ et g admet un $DL_n(0)$ alors $g \circ f$ admet le $DL_n(0)$.

- **Applications :**
  - ✓ Recherche de limite et d'équivalent
  - ✓ Caractérisation de la dérivabilité d'une fonction en un point a par son $DL_1(a)$ et position de la courbe par rapport à son asymptote

●Si f est définie en $x_0\ et\ au\ voisinage\ de\ x_0\ alors$
f admet le $DL_1(x_0)$ $f(x) = A + B(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0) \Leftrightarrow f$ est dérivable en x_0 , $f(x_0) = A$ et $f'(x_0) = B$.
●Si f est définie $au\ voisinage\ de\ x_0\ mais\ pas\ en\ x_0\ alors$
f admet le $DL_1(x_0)$ $f(x) = A + B(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0) \Leftrightarrow f$ est prolongeable par continuité en x_0 par la valeur A et son prolongement $\tilde{f}$ est dérivable en x_0 , $\tilde{f}(x_0) = A\ et\ \tilde{f}'(x_0) = B$.

  - ✓ Recherche d'asymptote et position de la courbe par rapport à son asymptote
  - ✓ Recherche de DL d'une fonction dont l'expression est définie par une intégrale.
  - ✓ Recherche de DL d'une bijection réciproque.

Questions de cours : CONNAITRE ET SAVOIR ENONCER TOUTES LES DEFINTIONS, PROPRIETES ET THEOREMES DU COURS.
<u>Savoir énoncer et démontrer les résultats suivants :</u>

1) Formule de Leibniz
2) Critère de classe C^n
3) **Compléter et démontrer :**
   a) $o_a(g) = g \times \dots.$
   b) $f \sim_a g \Leftrightarrow f = g + \dots\dots$
   c) Si $f \sim_a g$ alors $f\ et\ g$ ont en commun.. au voisinage de a et leur .... en a si elle existe.
   d) Si $f(t) \sim_a g(t)$ et $\lim_{x\to b} u(x) = a$ alors $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.$
   e) Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ tel que $\underline{L\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots}$ alors $f(x) \sim_a \dots\dots\dots$.
2) Obtention du $DL_{2n}(0)$ de $\cos(x)$ et du $DL_{2n+1}(0)$ de $\mathrm{sh}\,(x)$ par Taylor-Young.
3) Obtention du $DL_n(0)$ de $(1+x)^\alpha$ par Taylor − Young.
4) Obtention du $DL_n(0)$ de $\frac{1}{1-x}$ par somme géométrique
5) Obtention du $DL_n(0)$ de $\ln(1+x)$ par intégration terme è terme.
6) Obtention du $DL_n(0)$ $de\ Arctan(x)$ par intégration terme è terme.
7) Obtention du $DL_5(0)$ $de\ tan(x)$ par intégration terme è terme.