Suites réelles et suites complexes

L'axe réel est orienté et gradué, la plan complexe est le plan muni d'un repère orthonormé direct.

I. Des définitions de base déjà rencontrées

1 Une suite réelle (resp. complexe) u est une relation qui associe un réel (resp. complexe) u_nà chaque entier naturel $n \geq n_0$ où $n_0 \in \mathbb{N}$ $fixé$. C'est donc une application de $A = \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots\ldots\}$ dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Comme A est totalement discret, une suite ne peut pas être continue ou dérivable, n'a pas de limite en un réel mais pourra avoir une limite en $+\infty$.
u est encore notée $(u_n)_{n \geq n_0}$. Parfois il est assez visuel de la noter $u = (u_0, u_1, u_2, \ldots \ldots \ldots)$.
On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ $(resp. \mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ l'ensemble des suites réelles (resp. complexes)

- Une suite réelle est représentée sur l'axe réel par le « nuage » rectiligne formé des points d'abscisse u_n tels que $n \geq n_0$.
- Une suite complexe est représentée dans le plan complexe par les points de coordonnées $(Re(u_n), Im(u_n))$ tels que $n \geq n_0$.
- La suite u est bien définie à partir de n_0 lorsque $\forall n \geq n_0, u_n$ existe.
- **Deux suites u et v sont égales lorsque : u et v sont définies à partir du même rang n_0 et $\forall n \geq n_0, u_n = v_n$.
- **A partir des suites u et v, on définit les suites : $\alpha u = (\alpha u_n)_{n \geq n_0}$ où α constante, $u + v = (u_n + v_n)_{n \geq n_0}, et\ uv = (u_n v_n)_{n \geq n_0}$
- **La suite u complexe ou réelle est bornée lorsqu'il existe M réel $/\forall n \geq n_0, |u_n| \leq M$.
- La suite réelle u est majorée lorsque :$\exists m \in \mathbb{R}/\forall n \geq n_0, u_n \leq m$. On dit que m est un majorant de u. m ne dépend pas de n.
- La suite réelle u est minorée lorsque :$\exists m' \in \mathbb{R}/\forall n \geq n_0, u_n \geq m'$ .On dit que m' est un minorant de u. m' ne dépend pas de n.
- La suite réelle est croissante lorsque : $\forall n \geq n_0, u_n \leq u_{n+1}$.
- La suite réelle u est décroissante lorsque : $\forall n \geq n_0, u_n \geq u_{n+1}$.
- La suite réelle u est strictement croissante lorsque : $\forall n \geq n_0, u_n < u_{n+1}$.
- La suite réelle u est strictement décroissante lorsque : $\forall n \geq n_0, u_n > u_{n+1}$.
- **La suite réelle u est constante lorsque $\forall n \geq n_0, u_n = u_{n+1}$ ie. lorsque $\forall n \geq n_0, u_n = u_{n_0}$.
- **u vérifie une propriété P à partir d'un certain rang lorsqu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_1, u_n$ vérifie P.
- **La suite réelle u est stationnaire lorsque u est constante à partir d'un certain rang.

Indépendant de n

DESORMAIS, nos suites seront définies sur tout $\mathbb{N}$ pour simplifier les preuves.

2**Exemple** : Montrer que la suite u définie par : : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{n}{2n+2} u_n + \frac{3n+6}{2n+2}$ est stationnaire.

$u_3 = u_2 = u_1 = 3$. Conjecture $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 3$. Prouvons cette conjecture par récurrence sur n.

Init° : $u_1 = 3$

Propag° : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Je suppose que $u_n = 3$. Alors $u_{n+1} = \frac{n}{2n+2} u_n + \frac{3n+6}{2n+2} = \frac{n}{2n+2} 3 + \frac{3n+6}{2n+2} = \frac{6n+6}{2n+2} = 3\ OK!$

CCL : le théorème de récurrence assure que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 3$. Il en découle que u est stationnaire.

3**Prop** : Une suite réelle bornée est une suite majorée et minorée.
** Une suite bornée (resp. minorée ou majorée) à partir d'un certain rang est bornée (resp. minorée ou majorée).
**Un produit fini et une combinaison linéaire de suites bornées sont des suites bornées.

↪**Démo**

II. Les définitions des limites finies ou infinies.

4****Def :** La suite réelle (resp. complexe) (u_n) tend vers le réel (resp. complexe) L quand $n \to +\infty$ lorsque :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - L| \leq \varepsilon).$$

On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$ ou encore $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} L$.

Cela signifie que les réels u_n sont aussi proches que je le veux de L dès que n est suffisamment grand. Dans le cas d'une suite réelle , on peut remplacer $|u_n - L| \leq \varepsilon$ par $u_n \in [L - \varepsilon, L + \varepsilon]$

5**Def :**La suite réelle (u_n) tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$ lorsque $\forall A \in \mathbb{R}^{+*}, \exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \geq A$).
On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ou encore $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

Cela signifie que les réels u_n sont aussi grands que je le souhaite à condition de prendre n suffisamment grand . Attention, une suite qui tend vers $+\infty$, n'est par forcément croissante.

6**Def :**La suite réelle (u_n) tend vers $-\infty$ quand $n \to +\infty$ lorsque : $\forall B \in \mathbb{R}^{-*}, \exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \leq B$).
On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ ou encore $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$.

7****Def :**
- Une suite convergente est une suite ayant une limite finie.
- Une suite divergente est une suite non convergente i.e. une suite de **limite infinie ou sans limite** .

8NB : Trois cas possibles pour une suite réelle u : u a une limite finie ou bien u a une limite infinie ou bien u n'a pas de limite.
Deux cas possibles pour une suite complexe u : u a une limite finie ou bien u n'a pas de limite.

9Application soit $a \in]1,+\infty[$ et $b \in \mathbb{C}/\ |b| < 1$. Montrer grâce aux définitions que $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b^n = 0$.

- Montrons que $\forall A \in \mathbb{R}^{+*}, \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \geq n_0, a^n \geq A$.

Fixons $A \in \mathbb{R}^{+*}$.Soit n un entier naturel. $a^n \geq A \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{car\ a^n>0\ et\ A>0 \\ et \ln strictement\ croissante}} \ln(a^n) \geq \ln(A) \Leftrightarrow n\ln(a) \geq \ln(A) \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{car\ a>1 \\ donc \ln(a)>0}} n \geq \frac{\ln(A)}{\ln(a)}$.

Posons $n_0 = \left\lfloor \frac{\ln(A)}{\ln(a)} \right\rfloor + 1$. Alors $\forall n \geq n_0, n \geq \frac{\ln(A)}{\ln(a)}$ $donc\ a^n \geq A$. J'en conclus que $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.

- Montrons que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \geq n_0, |b^n| \leq \varepsilon$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. $|b^n| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |b|^n \leq \varepsilon \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{car\ |b|^n>0\ et\ \varepsilon>0 \\ et \ln strictement\ croissante}} \ln(|b|^n) \leq \ln(\varepsilon) \Leftrightarrow n\ln(|b|) \leq \ln(\varepsilon) \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{car\ |b|<1 \\ donc \ln(|b|)<0}} n \geq \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(|b|)}$.

Posons $n_0 = \left\lfloor \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(|b|)} \right\rfloor + 1$. Alors $\forall n \geq n_0, n \geq \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(|b|)}$ donc $|b^n| \leq \varepsilon$. J'en conclus que $\lim\limits_{n\to+\infty} b^n = 0$.

10<u>Exemple :</u> Montrons que : une suite de nombres entiers est convergente **sietssi** elle est stationnaire.

$\Leftarrow$évident

$\Rightarrow$ Soit u une suite de nombres entiers convergente de limite finie L. Montrons que u est stationnaire.

Posons $\varepsilon = \frac{1}{4} \in \mathbb{R}^{+*}$. Il existe un entier N tel que $\forall n \geq N, |u_n - L| \leq \frac{1}{4}$.

$\forall n \geq N, |u_{n+1} - u_n| = |(u_{n+1} - L) - (u_n - L)| \leq |(u_{n+1} - L)| + |(u_n - L)| \leq \frac{1}{2}$. Comme u_n et u_{n+1}sont entiers et leur distance est strictement inférieure à 1 dès que $n \geq N$, nécessairement $\forall n \geq N, u_n = u_{n+1}$. Ainsi, la suite (u_n) est staionnaire, constante à partir du rang N . J'en déduis que $\forall n \geq N, u_n = u_N = L$.

11Théorème CARACTERE BORNÉ :

- ✓ **Toute suite convergente est bornée.
- ✓ Soit $u = (u_n)$ une suite réelle qui tend vers un réel L. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. si $a < L < b$ alors $\exists n_1 \in \mathbb{N}/\forall n \geq n_1, a \leq u_n \leq b$.
- ✓ Toute suite réelle de limite strictement positive (resp.négative) est strictement positive (resp. négative) à partir d'un certain rang.
- ✓ Toute suite qui tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) n'est pas majorée (resp. minorée) ,mais est minorée (resp. majorée).

12UNICITE DE LA LIMITE** : La limite d'une suite, si elle existe, est unique.

13LIMITE FINIE** : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ où L finie **sietssi** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - L = 0$ **sietssi** $u_n = L + o_{+\infty}(1)$ **sietssi** $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - L| = 0$

sietssi il existe une suite réelle (ε_n) telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ et $\forall n, |u_n - L| \leq \varepsilon_n$.

14LIMITE PAR ENCADREMENT (Théorème de gendarmes) Toute suite réelle encadrée par deux suites de même limite finie tend aussi vers cette limite. Toute suite réelle supérieure à une suite de limite $+\infty$ tend vers $+\infty$. Toute suite réelle inférieure à une suite de limite $-\infty$ tend vers $-\infty$.

15Exemples: 1.Montrer qu'il existe un entier naturel N tel que : $\forall n \geq N, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \in \left[\frac{5}{2}, 3\right]$.

Posons $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$: $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \overset{car\ 1+\frac{1}{n}>0}{\cong} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}$. Or, $\lim\limits_{t\to0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$donc par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e \in \left]\frac{5}{2}, 3\right[$. Alors, comme $e \in \left]\frac{5}{2}, 3\right[$, il existe un entier naturel N tel que : $\forall n \geq N, u_n \in \left[\frac{5}{2}, 3\right]$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=n^2}^{n^2+n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$. Montrer que u converge et déterminer sa limite.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall k \in [\![n^2, n^2+n]\!]$, $\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}$. Donc, $\sum_{k=n^2}^{n^2+n} \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2+n}} \leq \sum_{k=n^2}^{n^2+n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \sum_{k=n^2}^{n^2+n} \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}$

Donc, $\frac{n^2+n-n^2+1}{\sqrt{n^2+n^2+n}} \leq \sum_{k=n^2}^{n^2+n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{n^2+n-n^2+1}{\sqrt{n^2+n^2}}$ $puis$ $\frac{n+1}{\sqrt{2n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n+1}{\sqrt{2n^2}}$. Or, $\frac{n+1}{\sqrt{2n^2+n}} \sim_{+\infty} \frac{n}{\sqrt{2n^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{n+1}{\sqrt{2n^2}} \sim_{+\infty} \frac{n}{\sqrt{2n^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc les deux suites qui encadrent (u_n), ont la même limite $\frac{1}{\sqrt{2}}$. J'en déduis que (u_n) converge aussi vers $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3) Soit u et v deux suites réelles telles que : $\forall n, 0 \leq u_n \leq a$ et $0 \leq v_n \leq b$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = a + b$. Montrer, par encadrement que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = b$.

$\forall n, 0 \underset{car\ u_n \leq a}{\leq} a - u_n \underset{car\ b - v_n \geq 0}{\leq} (a - u_n) + (b - v_n) = a + b - (u_n + v_n)$. Alors la suite $(a - u_n)$ étant encadrée par deux suites de limite nulle, le théorème de limite par encadrement assure que $\lim\limits_{n\to+\infty} a - u_n = 0$ $i.e.$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$. Alors comme $\forall n, v_n = a + b - u_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a + b - a = b$.

III. <u>Densité</u>

16Déf : Soit A et B deux ensembles de $\mathbb{R}$ tels que $A \subset B$. A est dense dans B lorsqu'entre deux éléments distincts de B se trouve toujours au moins un élément de A.

17Caractérisation :Soit B un interavlle non trivial $A \subset B$.
A est dense dans B sietssi tout élément de B est limite d'une suite d'éléments de A.

18Théorème : $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

IV. Bornes sup/inf : définition et caractérisation séquentielle

20Rappel : Définition d'un maximum et d'un minimum d'une partie. Soit A une partie de $\mathbb{R}$**.** m est appelé le **plus petit élément** ou **minimum** de A lorsque m minore A et m est élément de A . m' est appelé le **plus grand élément** ou **maximum** de A lorsque m' majore A et m' est élément de A . On note, le cas échéant, $m = \min(A)$ et $m' = \max(A)$.

Si A est un ensemble de réels minoré (resp. majoré) alors A n'a pas forcément de minimum (resp. de maximum). ex : $A =]1, +\infty[$est minoré par -3 mais aucun minorant de A n'appartient à A . Donc A n'a pas de minimum. Par contre, on constate que parmi tous les minorants de A, l'un d'entre eux est plus près de A que les autres : il s'agit de 1. 1 est le plus grand minorant de A . 1 est appelé la borne inférieure de A .

21Théorème(admis)-Définition :

1) Si A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, non vide et majorée alors l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément appelé la borne supérieure de A et noté $\sup(A)$.

2) Si A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, non vide et minorée alors l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément appelé la borne inférieure de A et noté $\inf(A)$.

22Par définition, si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée alors $\sup(A)$ est le plus petit réel qui majore A.
Par convention : Si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et non majorée, on dira que $\sup(A) = +\infty$.
Par définition, si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée alors $\inf(A)$ est le plus grand réel qui minore A.
Par convention : Si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et non minorée, on dira que $\inf(A) = -\infty$.

23Prop : 1. Si A a un plus grand élément alors A a une borne supérieure finie et $\sup(A) = max(A)$.
2. Si A admet une borne supérieure finie et $\sup(A) \notin A$ alors A n' admet pas de maximum.
3. Si A a un plus petit élément alors A a une borne inférieure finie et $\inf(A) = min(A)$.
4. Si A admet une borne inférieure finie et $\inf(A) \notin A$ alors A n' admet pas de minimum.

24<u>Théorème de caractérisation de la borne supérieure avec des epsilon</u> :

- Soit M un réel et A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. $M = supA$ **si et ssi** $\begin{cases} \forall a \in A, a \leq M \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists a_\varepsilon \in A \ / \ M - \varepsilon < a_\varepsilon. \end{cases}$
- Soit m un réel et A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. $m = inf A$ **si et ssi** $\begin{cases} \forall a \in A, a \geq m \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists a_\varepsilon \in A \ / \ m + \varepsilon > a_\varepsilon. \end{cases}$

25<u>Théorème de caractérisation de la borne supérieure avec les suites</u> : Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- Soit $M \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. $M = \sup(A)$ <u>sietssi</u> $\begin{cases} M \text{ majore } A \text{ et} \\ \text{il existe une suite d'éléments de } A \text{ de limite } M. \end{cases}$
- Soit $m \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. $m = \inf(A)$ <u>sietssi</u> $\begin{cases} m \text{ minore } A \text{ et} \\ \text{il existe une suite d'éléments de } A \text{ de limite } m. \end{cases}$

26Exercices :

1) Soit $A = \left\{1 - \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq 1 - \frac{1}{n} < 1$. Donc A est bornée, 0 est un minorant de A et 1 est un majorant de A . De plus, $0 = 1 - \frac{1}{1} \in A$. Donc $0 = \min(A)$.
Enfin, la suite $\left(1 - \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de A qui converge vers 1. J'en déduis que $1 = \sup(A)$. Comme $1 \notin A$, A n'a pas de maximum.

2) Déterminons les bornes sup et inf de $A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{p+n} / (p,n) \in \mathbb{N}^{*2}\right\}$.

A est une partie non vide de $\mathbb{R}$. Et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}^*, -1 \leq (-1)^n \leq 1$ et $0 < \frac{1}{p+n} \leq \frac{1}{2}$donc, $-1 < (-1)^n + \frac{1}{p+n} \leq \frac{3}{2}$. Donc A est bornée. Ainsi, A admet une bornée sup. et une borne inf. finies.
(-1) minore A . Posons $v_n = (-1)^{2n+1} + \frac{1}{n+(2n+1)}$. Alors (v_n) est une suite d'éléments de A telle que : $\lim_{n\to+\infty} v_n = -1$. Donc, le théorème de caractérisation séquentielle de la borne sup permet d'affirmer que $\inf(A) = -1$.
Si n impair alors $(-1)^n + \frac{1}{p+n} = -1 + \frac{1}{p+n} < 0$. Si n pair alors $n \geq 2$ donc $\forall p \in \mathbb{N}^*, 1 + \frac{1}{3} \geq 1 + \frac{1}{p+2} \geq (-1)^n + \frac{1}{p+n} > 0$. Donc, $\frac{4}{3}$ majore A et $\frac{4}{3} = (-1)^2 + \frac{1}{1+2} \in A$. Ainsi, $\sup(A) = \max(A) = \frac{4}{3}$.

3) Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et bornée et λ un réel non nul. On définit $\lambda A = \{\lambda a / a \in A\}$. Justifier que A et λA admettent des bornes supérieures et inférieures finies et trouver une relation entre leurs bornes sup et inf.

A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et bornée donc $\sup(A)$ et $\inf(A)$ existent et sont finis et $\forall a \in A, \inf(A) \leq a \leq \sup(A)$.
Alors si $\lambda > 0$, $\forall a \in A, \lambda\inf(A) \leq \lambda a \leq \lambda\sup(A)$; et si $\lambda < 0$, $\forall a \in A, \lambda\inf(A) \geq \lambda a \geq \lambda\sup(A)$. Donc, λA est bornée. De plus, A étant non vide, A contient au moins un élément a_0, alors λa_0 est un élément de λA qui est donc non vide. J'en déduis que $\sup(\lambda A)$ et $\inf(\lambda A)$ existent et sont finies.
<u>Montrons</u> que $\sup(\lambda A) = \begin{cases} \lambda \sup(A) & si\ \lambda > 0 \\ \lambda \inf(A) & si\ \lambda < 0 \end{cases}$ et $\inf(\lambda A) = \begin{cases} \lambda \sup(A) & si\ \lambda < 0 \\ \lambda \inf(A) & si\ \lambda > 0 \end{cases}$.
<u>Supposons $\lambda < 0$.</u> Alors $\lambda\inf(A)$ majore λA et $\lambda\sup(A)$ minore λA. De plus, d'après la caractérisation séquentielle des bornes, il existe une suites (u_n) et (v_n) telles que : $\forall n, \begin{cases} u_n \in A \\ v_n \in A \end{cases}$ et $\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} u_n = \sup(A) \\ \lim_{n\to+\infty} v_n = \inf(A) \end{cases}$. Alors, $\forall n, \begin{cases} \lambda u_n \in \lambda A \\ \lambda v_n \in \lambda A \end{cases}$ et $\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda\sup(A) \\ \lim_{n\to+\infty} \lambda v_n = \lambda\inf(A) \end{cases}$. Donc, (λu_n) et (λv_n) sont deux

suites d'éléments de λA qui tendent vers $\lambda\sup(A)$ et $\lambda\inf(A)$.Alors, la caractérisation séquentielle des bornes permet de conclure que $\lambda\inf(A) = sup(\lambda A)\ et\ \lambda\sup(A) = inf(\lambda A)$.
De même on montre le cas $\lambda < 0$.

4) Soit $A = \left\{\frac{x+2y}{x+y+1} / (x,y) \in [0,1]^2\right\}$. Déterminer $\sup(A)\ et\ \inf(A)$.

Tout d'abord, A est non vide car $0 = \frac{0+2\times 0}{0+0+1} \in A$. De plus, $\forall (x,y) \in [0,1]^2, 0 < 1 \leq x+y+1 \leq 3$ donc $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x+y+1} \leq 1\ et\ 0 \leq x+2y \leq 3$ et par suite, $0 \leq \frac{x+2y}{x+y+1} \leq 3$. J'en déduis que A est bornée.
J'en conclus que $Sup(A)$ et $\inf(A)$ existent et sont finis. De plus, 0 minore A et $0 \in A$. Donc $0 = \min(A) = \inf(A)$.
Soit $x \in [0,1]$. Soit $f_x : (y \mapsto \frac{x+2y}{x+y+1})$. f_x est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall y \in [0,1], f_x'(y) = \frac{2(x+y+1)-(x+2y)}{(x+y+1)^2} = \frac{x+2}{(x+y+1)^2} > 0$. Donc f_x est strictement croissante sur $[0,1]$. Alors $f_x(1) = max_{[0,1]} f_x$; autrement dit, $\forall x \in [0,1]$, $f_x(1) = \frac{x+2}{x+2} = 1 = max_{[0,1]} f_x = max\left\{\frac{x+2y}{x+y+1} / y \in [0,1]\right\}$. J'en déduis que 1 mjore A et $1 \in A$. J'en conclus que $1 = maxA = max\left\{\frac{x+2y}{x+y+1} / x \in [0,1]\ et\ y \in [0,1]\right\}$.

V. Autres propriétés essentielles.

27 Théorème d'OPERATION SUR LES LIMITES :

- Le produit d'une suite de limite nulle et d'une suite bornée est une suite de limite nulle.
- Soit u et v deux suites telles que $\lim_{n\to+\infty} u_n = L\ et\ \lim_{n\to+\infty} v_n = L'$. Alors,

✓ $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = |L|$.
✓ pour tout scalaire $\boldsymbol{\lambda}$ non nul , $\lim_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda L$
✓ si $L + L'$ n'est pas une FI alors $\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = L + L'$.
✓ si LL' n'est pas une FI alors $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = LL'$.
✓ si L/L' n'est pas une FI et v_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang alors $\lim_{n\to+\infty} u_n/v_n = L/L'$.
✓ si $L' = 0$ et $v_n > 0\ (resp < 0)$ à partir d'un certain rang ($v_n\ réel$) alors $\lim_{n\to+\infty} 1/v_n = +\infty\ (resp . -\infty\ )$.

- La somme d'une suite bornée et d'une suite de limite infinie est une suite de limite infinie.

28 LIMITE D'UNE SUITE MONOTONE : Toute suite réelle monotone a toujours une limite. Une suite réelle u croissante a une limite qui est $sup\{u_n / n \in \mathbb{N}\}$, cette limite est finie si u est majorée et vaut $+\infty$ sinon. Une suite u décroissante a toujours une limite $inf\{u_n / n \in \mathbb{N}\}$ qui est finie si u minorée et vaut $-\infty$ sinon.

29 COMPOSITION : Soit f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que à partir d'un certain rang, $f(u_n)\ existe$.
✓ Si $\lim_{t\to L} f(t) = m\ et\ \lim_{n\to+\infty} u_n = L\ et$ alors $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = m.$
✓ Si $f(t) \sim_{t\to L} g(t)\ et\ \lim_{n\to+\infty} u_n = L\ et$ alors $f(u_n) \sim_{n\to+\infty} g(u_n)$.
✓ Si $f(t) = \sum_{k=0}^{p} a_k t^k + o_0(t^p)\ et\ \lim_{n\to+\infty} u_n = 0\ et$ alors $f(u_n) = \sum_{k=0}^{n} a_k (u_n)^k + (u_n)^p \underbrace{o_{+\infty}(1)}_{\substack{une\ suite\ de\ limite \\ nulle\ en\ +\infty}}$.

30 NB : 1. $\lim_{n\to+\infty} u_n = L \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} |u_n| = |L|$. La réciproque est fausse pour $L \neq 0$. (pour $L = 0$, on retrouve $\lim_{n\to+\infty} u_n = L \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |u_n - L| = 0$)
2. $\forall n, {u_n}^{v_n} = e^{v_n \ln(u_n)}$. Ces suites donnent les FI : $1^{+\infty}, 0^0, +\infty^0$ ... pour lever ces indéterminées, il faut étudier $h_n = v_n \ln(u_n)$.

31 NB : dès que vous savez que votre suite u une limite, donnez un nom à cette limite. Pour trouver sa valeur, il suffit souvent de passer à la limite dans la relation (implicite ou récurrente) vérifiée par u.

32 Exemples :
1)Soient u et v deux suites réelles convergentes. On note $M_n = \max(u_n, v_n)\ et\ m_n = \min(u_n, v_n)$. Justifier que : $(M_n)\ et\ (m_n)$ sont convergentes et exprimer leur limite en fonction de celles de u et de v.
Notons L le limite de u et L' celle de v.
$\forall n, \max(u_n, v_n) = \frac{u_n+v_n+|u_n-v_n|}{2}\ et\ \min(u_n, v_n) = \frac{u_n+v_n-|u_n-v_n|}{2}$. D'après le théorème d'opérations sur les limites, comme $\frac{L+L'+|L-L'|}{2}$ et $\frac{L+L'-|L-L'|}{2}$ ne sont pas des formes indéterminées, $(M_n)\ et\ (m_n)$ sont convergentes et $\lim_{n\to+\infty} M_n = \frac{L+L'+|L-L'|}{2}$ et $\lim_{n\to+\infty} m_n = \frac{L+L'-|L-L'|}{2}$.
2)Soit u une suite définie par : $u_0 = 3,\ u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = nu_{n+1} + 2u_n$. Montrer que u est divergente.
On montre par récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0 : u_0 > 0,\ u_1 > 0\ et\ \forall n, (u_{n+1} > 0, u_n > 0 \Longrightarrow u_{n+2} = nu_{n+1} + 2u_n > 0)$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+2} - u_{n+1} = \underbrace{(n-1)}_{\geq 0}\underbrace{u_{n+1}}_{>0} + \underbrace{2u_n}_{>0} > 0$. Donc, la suite u est strictement croissante à partir du 1. J'en déduis que la suite u admet une limite notée L telle que $L \in \mathbb{R}^{+*} \cup \{+\infty\}$. Alors $L = \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_{n+2}$.
Imaginons un instant $L \in \mathbb{R}^{+*}$. $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n} u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{2}{n} u_n$. Donc $0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} u_{n+2} = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} + \frac{2}{n} u_n = L + 0$. Donc $L = 0$ ce qui est impossible. Ainsi, $L = +\infty$.

33Théorème de Césaro (SAVOIR REFAIRE et connaitre le résultat) :

Soit u une suite réelle , L un réel et v la suite définie par $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

a. $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n = 0$. En déduire que : $\lim_{n\to+\infty} u_n = L \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n = L$.

b. $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

a. •Je suppose que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. $\forall n, |v_n| = \left|\frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k\right)\right| = \overset{1ère\ I.T}{\leqq} \sum_{k=0}^{n-1}|u_k|$. $(**)$

Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0, |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Donc $\forall n \geq n_0 + 1, \sum_{k=n_0}^{n-1}|u_k| \leq \sum_{k=n_0}^{n-1}\frac{\varepsilon}{2} = (n-n_0)\frac{\varepsilon}{2} \leq n\frac{\varepsilon}{2}$.

Alors, Donc $\forall n \geq n_0 + 1 > 0$, $\sum_{k=0}^{n-1}|u_k| = \sum_{k=0}^{n_0-1}|u_k| + \sum_{k=n_0}^{n-1}|u_k| \leq \sum_{k=0}^{n_0-1}|u_k| + n\frac{\varepsilon}{2}$. Et, $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|u_k| \leq \left(\frac{1}{n}\underbrace{\sum_{k=0}^{n_0-1}|u_k|}_{noté\ \alpha}\right) + \frac{\varepsilon}{2}$.

$\alpha = \sum_{k=0}^{n_0-1}|u_k|$ est indépendant de n , est donc une constante. Par conséquent, $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\alpha = 0$. Donc, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_1, \left|\frac{1}{n}\alpha\right| = \frac{1}{n}\alpha \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $N = \max(n_0, n_1)$. Alors $\forall n \geq N, \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|u_k| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Donc d'après l'inégalité (**),je peux affirmer que $\forall n \geq N,\ |v_n| \leq \varepsilon$ J'en conclus que la suite (v_n) converge vers 0.

••Je suppose ici que $\lim_{n\to+\infty} u_n = L. \in \mathbb{R}$ ($ou\ \mathbb{C}$). Posons $a_n = u_n - L$ et $b_n = v_n - L$.

Alors d'une part, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. D'autre part, $b_n = v_n - L = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k\right) - L = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k\right) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} L = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(u_k - L)\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k\right)$.

Donc, d'après ce qui précède, je peux affirmer que $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$. Cela signifie que $\lim_{n\to+\infty} v_n = L$.

b) Je suppose ici que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Montrons que $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Soit $A \in \mathbb{R}^{+*}$. Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0, u_n \geq 2A$. Donc $\forall n \geq n_0 + 1, \sum_{k=n_0}^{n-1} u_n \geq \sum_{k=n_0}^{n-1} 2A = (n-n_0)2A$.

Et $\frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n-1} u_n \geq \frac{(n-n_0)}{n}2A$. Alors, $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n-1} u_k \geq \frac{1}{n}\underbrace{\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k}_{=\alpha} + \frac{1}{n}(n-n_0)2A$.

Comme $\frac{1}{n}(n-n_0) \sim_{+\infty} 1$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}(n-n_0) = 1$ et par conséquent, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_1, \frac{1}{n}(n-n_0) \geq \frac{3}{4}$ et par suite, $\frac{1}{n}(n-n_0)2A \geq \frac{3}{2}A$.

De plus, $\alpha = \sum_{k=0}^{n_0-1}|u_k|$ est indépendant de n , est donc une constante. Par conséquent, $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\alpha = 0$. Donc, $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ / $\forall n \geq n_2, \left|\frac{1}{n}\alpha\right| \leq \frac{A}{2}$ donc $\frac{1}{n}\alpha > -\frac{A}{2}$. Posons $N = \max(n_0, n_1, n_2)$. Alors $\forall n \geq N, v_n \geq -\frac{A}{2} + \frac{3}{2}A = A$. J'en conclus que la suite (v_n) diverge et tend vers $+\infty$.

34PASSAGE A LA LIMITE DANS UNE INEGALITE : Si deux suites (réelles) u et v ont chacune une limite notée respectivement L et L' et qu' à $partir\ d'un\ certain\ rang, u_n \leq v_n$ alors $L \leq L'$.

Par contraposée, Si deux suites (réelles) u et v ont chacune une limite notée respectivement L et L' telles que $L > L'$ alors à partir d'un certain rang, $u_n > v_n$.

35MISES EN GARDE : il ne faut pas confondre cette propriété et le théorème des gendarmes. Le théorème des gendarmes permet de prouver (sous hypothèse) qu'une suite converge (et de déterminer cette limite). La passage à la limite dans une inégalité permet de comparer des limites de suites dont on connait l'existence des limites.

36Exemples : Soit u une suite définie par : $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

a. Montrer que u admet une limite.

b. Montrer que $\forall n, u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$. En déduire la limite de la suite u.

$\forall n > 0,\ u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} > 0$. La suite u est donc croissante et par suite admet une limite $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

$\forall n > 0,\ u_{2n} - u_n = \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$.

Imaginons un instant que $L \in \mathbb{R}$. Comme (u_{2n}) est extraite de u, $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = L$ et par suite $\lim_{n\to+\infty} u_n - u_{2n} \underbrace{=}_{\substack{pas\ de\ FI \\ car\ L\ est\ réel}} L - L = 0$. Alors en passant à la limite dans l'inégalité $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$, j'aboutis à l'absurdité $0 \geq \frac{1}{2}$. j'en conclus que L ne peut pas être réel et ainsi, $L = +\infty$.

VI. Comparaison des suites

37Comparer au sens (négligeable , dominée ou équivalent) deux suites , tout comme chercher la limite d'une suite, n'a de sens que pour $n \to +\infty$. On ne précise donc pas toujours que $n \to +\infty$.

1. Définitions

38Définition Soit u et v deux suites réelles.

1. On dit que u est négligeable devant v (au voisinage de $+\infty$) lorsqu'il existe une suite ε telle que : $\lim_{n\to+\infty}\varepsilon_n = 0$ et à partir d'un certain rang ,$u_n = v_n \times \varepsilon_n$. On note alors $u_n = o_{+\infty}(v_n)$ ou $u_n = o(v_n)$ ou $u = o(v)$ ou $u_n \ll_{+\infty} v_n$.

2. On dit que u est équivalente à v (au voisinage de $+\infty$) lorsqu'il existe une suite φ telle que : $\lim_{n\to+\infty}\varphi_n = 1$ et à partir d'un certain rang, $u_n = v_n \times \varphi_n$. On note alors $u_n \sim_{+\infty} v_n$ ou $u_n \sim v_n$.

3. On dit que u est dominée par v (au voisinage de $+\infty$) lorsqu'il existe une suite b telle que : à partir d'un certain rang ,$u_n = v_n \times b_n$ et b est bornée , c'est-à-dire lorsqu'il existe un réel M tel que $\forall n, |u_n| \leq M|v_n|$. On note $u_n = O_{+\infty}(v_n)$ ou $u_n = O(v_n)$.

38Exemple : $u_n = ln(n^2 - n + sin(n)) = 2ln(n)\left(1 + \frac{1}{2ln(n)}ln\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{sin(n)}{n^2}\right)\right) \sim_{+\infty} 2ln(n)$.

39Caractérisation : si v ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors :

1. $u_n = o(v_n) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.
2. $u_n \sim v_n \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. ATTENTION : $u_n \sim v_n \not\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0.$
3. $u_n = O(v_n) \Leftrightarrow \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée.

40Exemples : 1) Soit $u_n = \sum_{k=0}^{n} k!$. Montrer par encadrement que : $u_n \sim_{+\infty} n!$.

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1,2,3\}$, $\frac{u_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{n!} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} + \frac{(n-1)!}{n!} + \frac{n!}{n!} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} + \frac{1}{n} + 1$.

Or, $\forall k \in [\![0, n-2]\!]$, $0 \le \frac{k!}{n!} \le \frac{1}{n(n-1)}$. Donc, $0 \le \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} \le \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{n-1}{n(n-1)} = \frac{1}{n}$. Il en découle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} = 0$ et ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n!} = 1$. J'en conclus que $u_n \sim_{+\infty} 1$.

2)Soit u la suite définie par $\forall n, u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} si\ n\ pair \\ -\frac{2}{n^2}\ si\ n\ impair \end{cases}$. Montrons que $u_{n+1}\ et\ u_n$ ne sont pas équivalentes. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Posons $t_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \frac{-2n}{(n+1)^2} si\ n\ pair \\ \frac{-n^2}{2(n+1)}\ si\ n\ impair \end{cases}$. Alors, $t_{2n} = \frac{-4n}{(2n+1)^2} \sim_{+\infty} -\frac{1}{n}\ et\ t_{2n+1} = \frac{-(2n+1)^2}{2(2n+2)} \sim_{+\infty} -n$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} t_{2n+1} = -\infty\ et\ \lim\limits_{n\to+\infty} t_{2n} = 0$,

Comme $(t_{2n})\ et\ (t_{2n+1})$ ont des limites différentes, la suite (t_n) n'a pas de limite. Ainsi, les suites $(u_{n+1})\ et\ (u_n)$ ne sont pas équivalentes.

Par contre, $\forall n, u_{2n} = \frac{1}{2n}\ et\ u_{2n+1} = \frac{-2}{(2n+1)^2}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Et par conséquent, toute suite extraite de u tend aussi vers 0 . Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

41Exemples de référence et autres écritures.

1. $u_n = o(0) \Leftrightarrow u_n = O(0) \Leftrightarrow u_n \sim 0 \Leftrightarrow à\ partir\ d'uncertain\ rang, u_n = 0.$
CELA N'ARRIVE QUASIMENT JAMAIS .... Donc ***vous ne devez jamais écrire à $u_n \sim 0$.***
2. $o(1)$ désigne une suite de limite nulle *et* $O(1)$ désigne une suite bornée .
3. Si $u_n \sim v_n$ alors $v_n \sim u_n$ et on dit que u et v sont équivalentes.

2. Comparaison de suites de référence

42Prop : Soit u une suite réelle, strictement positive et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L$

si $L \in]0,1[$ alors $u_n = O\left(\left(\frac{L+1}{2}\right)^n\right)$ $et \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.$

si $L \in]1, +\infty[$ alors $\left(\frac{L+1}{2}\right)^n = O(u_n)\ et \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$

43Exercice : redémontrer la propriété précédente en remplaçant la condition $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L\ par\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = L.$

44Théorème: Pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{R}^{+*})^3$ et pour tout $a \in]1, +\infty[$,

$(\ln(n))^\beta \ll_{+\infty} (n^\alpha)) \ll_{+\infty} n^\alpha \ll_{+\infty} a^n \underbrace{=}_{\gamma=ln(a)>0} e^{\gamma n} \ll_{+\infty} n! \ll_{+\infty} n^n$ ❤❤❤

3. Propriétés

45Autre écriture d'une fonction négligeable : $o(u_n) = u_n o_{+\infty}(1)$

46Autre écriture d'un équivalent : $u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n = v_n + o(v_n) = v_n(1 + o_{+\infty}(1))$

47Théorème : équivalent et limite /signe

- Si $u_n \sim v_n$ alors à partir d'un certain rang, $u_n\ et\ v_n$ ont le même signe strict.
- Si $u_n \sim v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ $(L\ finie\ ou\ inifinie)$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L$
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ tel que L réel non nul alors $u_n \sim L.$

48Théorème de comparaison et d'OPERATIONS : Remplacer , dans la version « fonction », $\boldsymbol{f}$ par $\boldsymbol{u_n}$, $\boldsymbol{g\ par\ v_n, h\ par\ w_n\ et\ a\ par\ +\infty}$ (sauf pour la composition à droite !!! car on ne compose pas les suites).

- Soit $u, v, w, A\ et\ B$ des suites.
- $u_n = o(v_n)$ et $v_n \sim w_n \Longrightarrow u_n = o(w_n)$. De même, $u_n \sim v_n$ et $v_n = o(w_n) \Longrightarrow u_n = o(w_n)$.
- $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n \Longrightarrow u_n \sim w_n$.
- toute combinaison linéaire finie de $o(v_n)$ est $o(v_n)$.
- $u_n \sim v_n$ et $A_n \sim B_n \Longrightarrow A_n u_n \sim B_n v_n$.
- $u_n \sim v_n$ et $A_n \sim B_n$ et à partir d'un certain rang, $A_n \neq 0 \Longrightarrow \frac{u_n}{A_n} \sim \frac{v_n}{B_n}$.
- $u_n \sim v_n$ et à partir d'un certain rang, $(u_n)^\alpha$existe $\Longrightarrow (u_n)^\alpha \sim (v_n)^\alpha$.
- Si $f(x) \sim_a g(x)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ alors $f(u_n) \sim_{+\infty} g(u_n)$.

- Si f admet le $DL_p(0)$ suivant : $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + +a_px^p + o_{x\to 0}(x^p)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors $\forall n$ *assez grand*, $f(u_n) = a_0 + a_1u_n + a_2{u_n}^2 + \cdots + +a_p{u_n}^p + o_{n\to+\infty}({u_n}^p)$. (c'est un développement asymptotique de la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$)

49 Dans la recherche d'équivalent : Produit, quotient, puissance indépendante de n, composition à droite sont **autorisés**

50 Dans la recherche d'équivalent : il est **interdit** de sommer $u_n \sim v_n \nRightarrow u_n + w_n \sim v_n + w_n$ ni de mettre à une puissance qui « bouge » : $u_n \sim v_n \nRightarrow {u_n}^{w_n} \sim {v_n}^{w_n}$

51**Exemples** : 1) Equivalent simple de $e^{\frac{\sin(n)}{n}} - 1$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$; donc, $e^{\frac{\sin(n)}{n}} - 1 \sim \frac{\sin(n)}{n}$. Je ne peux pas aller plus loin !

2) Equivalent simple de $\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1$. Donc, $\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1$. Et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$; Donc, $\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \sim -\frac{1}{2n^2}$. Ainsi, $\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim -\frac{1}{2n^2}$.

3) Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)^n$.

$\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)^n = e^{n\ln\left[\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right]}$. Comme $\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1} \sim_{+\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1} = 1$. De plus, $\ln(X) \sim_1 (X-1)$ donc par composition à droite, $\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right) \sim_{+\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1} - 1\right) = \frac{2n}{n^2-n+1} \sim_{+\infty} \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$. Donc, $n\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right) \sim_{+\infty} 2$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right) = 2$. Et ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)^n = e^2$.

4) Trouver un équivalent simple de $t_n = \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)^n - 1$.

$\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)^n = e^{n\ln\left[\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right]}$. Et $h_n = n\ln\left[\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right] = n[\ln[n^2+n+1] - \ln[n^2+n-1]] = n\left\{\ln\left[n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right] - \ln\left[n^2\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)\right]\right\}$

$h_n = n\left\{2\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) - 2\ln(n) - \ln\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)\right\} = n\left\{\ln\left(1+\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}_{=u_n}\right) - \ln\left(1+\left(\underbrace{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}_{=v_n}\right)\right)\right\}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t)$ *tq* $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0$,

$\ln(1+u_n) = u_n - \frac{{u_n}^2}{2} + u_n^2\varepsilon(u_n)$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon(u_n) = 0$ et $\ln(1+v_n) = v_n - \frac{{v_n}^2}{2} + v_n^2\varepsilon(v_n)$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon(v_n) = 0$.

De plus, $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ et $u_n^2 = \frac{1}{n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $v_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$ et $v_n^2 = \frac{1}{n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Donc, $h_n = n\left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\} = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Donc, Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} h_n$ et $e^t = 1 + t + o_0(t)$, $e^{\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} = 1 + \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. *Et ainsi*, $t_n \sim_{+\infty} \frac{2}{n}$.

5) Soit $a \in [0,1]$ et u la suite définie par : $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}$. Montrer que u tend vers 1 et $u_n - 1 \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$.

Tout d'abord, on remarque que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,2]$. En effet, $(init)$ $u_0 = a \in [0,1]$ *et* $u_1 = 1 + a \in [1,2]$. $(Propag)$ *Fixons* $n \in \mathbb{N}^*$; *alors*, $u_n \in [0,2] \Longrightarrow u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1} \in \left[1, 1 + \frac{2}{n+1}\right] \underbrace{\subseteq}_{car\, n\geq 1} [1,2]$. Le théorème de récurrence simple permet alors de conclure.

La suite u est donc bornée ; comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n+1} = 0$ et ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = 1$ ce qui signifie aussi que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Ensuite, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n - 1 = \frac{u_{n-1}}{n}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n-1} = 1$ i.e. $u_{n-1} \sim_{+\infty} 1$. Et par conséquent, $\frac{u_{n-1}}{n} \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$ et ainsi, $u_n - 1 \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$.

6) Déterminons un équivalent simple de $u_n = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) - 1$.

Soit $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$. f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \neq 0$. Donc, $f(x) - f(0) \sim_0 2(x-0)$ i.e. $\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - 1 \sim_0 2x$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) - 1 \sim_0 \frac{2}{n}$.

VII. Suites extraites

57****Def :** (v_n) est une suite extraite de la suite (u_n) lorsqu' il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que : $\forall n, v_n = u_{\varphi(n)}$

58**NB :** Nécessairement, une telle fonction φ vérifie : $\varphi(n) \geq n$.

59**Exemples:** les suites $(u_{n+1}), (u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{n^2}), (u_{3n}), (u_{6n+1})$ sont extraites de (u_n).

60****Théo :** Si la suite (u_n) tend vers L alors toute suite extraite de (u_n) tend aussi vers L.

61**Exemple :** Etudier la convergence de $u_n = 2^n + (-2)^n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.

$u_{2n} = 2^{2n} + (-2)^{2n}\sin\left(2n\frac{\pi}{2}\right) = 4^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Et $u_{4n+1} = 2^{4n+1} + (-2)^{4n+1}\sin\left((4n+1)\frac{\pi}{2}\right) = 2\times 16^n - 2\times 16^n = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Comme deux suites extraites de u n'ont pas la même limite, u n'a pas de limite.

La réciproque est vraie d'après le théorème suivant :

62****Théo:** $(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L)$ *si etssi* $(\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = L$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = L)$.

De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ *si etssi* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{3n} = L = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{3n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{3n+2}$.

63**Exemples :** 1) Montrer que si u est croissante telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Soit u une suite réelle croissante telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = +\infty$. Alors comme u est croissante, lors $\forall n, u_{2n} \leq u_{2n+1}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = +\infty$. Donc le théorème des gendarmes assurent que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = +\infty$. Les suites extraites (u_{2n+1})*et* (u_{2n}) ayant la même limite, u tend aussi vers cette limite commune i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

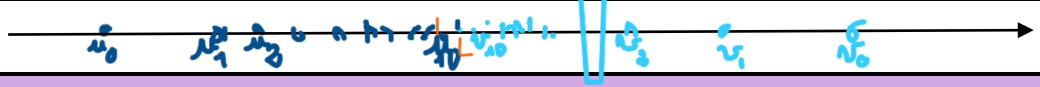
2) Montrer que si $(u_{2n}), (u_{3n})$ *et* (u_{2n+1}) convergent alors (u_n) converge.

Soit u une suite telle que : $(u_{2n}),(u_{3n})$ et (u_{2n+1}) convergent. Notons L_1 la limite de $(u_{2n}), L_2$ la limite de (u_{3n}) et L_3 la limite de (u_{2n+1}).
La suite (u_{6n}) étant extraite à la fois de (u_{2n}) mais aussi de (u_{3n}) tend à la fois vers L_1 et vers L_2. Par unicité de la limite d'une suite, $L_1 = L_2$.
La suite (u_{6n+3}) étant extraite à la fois de (u_{2n+1}) mais aussi de (u_{3n}) tend à la fois vers L_3 et vers L_2. Par unicité de la limite d'une suite, $L_3 = L_2$.
J'en déduis que $L_1 = L_2$. Les suites extraites $(u_{2n+1})et$ (u_{2n}) ayant la même limite finie, u converge aussi vers cette limite commune i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L_1 = L_2 = L_3$.

VIII. Suites adjacentes

64Déf.: Deux suites réelles u et v sont adjacentes lorsque l'une est croissante , l'autre est décroissante et $u - v$ tend vers 0 .

Représentation :



65Théorème :

1. Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite finie.
2. Si u et v sont adjacentes de même limite L telle que u croissante et v décroissante alors : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \le v_n - L \le v_n - u_n$ et $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$, $u_0 \le u_1 \le \cdots \le u_n \le u_{n+1} \le \cdots \le L \le \cdots v_{p+1} \le v_p \le \cdots \le v_1 \le v_0$.

66 Exemples 1) Soit $\forall n, u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$, $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. Montrer que u et v sont adjacentes .

$u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$ et $v_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} = u_n - \frac{1}{n} \le u_n$. Donc, $v_n - u_n = -\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Comme $\forall n, v_n \le 0$, montrons que u décroit et v croit.

$v_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(n+1)+k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+(k+1)} = \sum_{j=2}^{n+2} \frac{1}{n+j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j} + \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}\right) = v_n + \left(\underbrace{\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}}_{\substack{\ge 0\ car \\ 2n+1 \le 2n+2}}\right) \ge v_n$. Donc v est croissante.

$u_{n+1} - u_n = \left(v_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(v_n + \frac{1}{n}\right) = v_{n+1} - v_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n} = \frac{2(n+1)n + (2n+1)n - (2n+1)(2n+2)}{2(2n+1)n(n+1)} = \frac{-2}{2(2n+1)n(n+1)} < 0$. Donc u est décroissante.
J'en conclus que u et v sont adjacentes.

2)Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n}$ et $v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1}$.

a) Montrer que u et v sont adjacentes **.**
b) Donner une valeur approchée de la limite commune à 10^{-1} $près$ par défaut.
c) Trouver un équivalent simple de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

a) $\forall n \in \mathbb{N}, v_n - u_n = 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ $donc$ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0. De\ plus\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n \ge v_n$. Montrons que u décroit et v croit. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$u_{n+1} - u_n = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1} - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + 2\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < 0$.

$$v_{n+1} - v_n = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+2} - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + 2\sqrt{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} > 0.$$

Donc, u décroit et v croit. Je peux donc conclure que u et v sont adjacentes et convergent donc vers une même limite finie notée L.

b) $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \le L \le u_n$. Donc , $0 \le L - v_n \le u_n - v_n = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$. Donc v_n est une valeur approchée de L à 10^{-1} près par défaut dès que n vérifie $\frac{1}{\sqrt{n}} \le 10^{-1}$. Or, $\frac{1}{\sqrt{n}} \le 10^{-1} \Leftrightarrow \sqrt{n} \ge 10 \Leftrightarrow n \ge 100$. Ainsi, v_{100} est une valeur approchée de L à 10^{-1} $près$ par défaut. On calcule v_{100} très facilement avec le programme en python ci-dessous :

```
from math import*
s=0
for i in range (1,101):
  s=s+(1/sqrt(i))
print(s-2*sqrt(101))
```

Réponse : -1.51 .

c) $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n} = u_n = L + o_0(1)$. Donc, $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) = 2\sqrt{n} + L + o_{+\infty}(1) \underbrace{\sim_{+\infty}}_{car\ \lim\limits_{n\to+\infty} 2\sqrt{n} = +\infty} 2\sqrt{n}$.

3) Soit $\forall n, S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

a) Montrer par encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. (on pourra montrer puis utiliser : $\forall k \ge 1$, $\frac{1}{k+1} \le \ln(k+1) - \ln(k) \le \frac{1}{k}$)
b) Montrer en utilisant les suites u et v qu'il existe un réel γ (appelé constante d'Euler) tel que : $S_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
c) Déterminer une valeur approchée de γ à 10^{-2} $près$.
d) Calculer la limite de $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(2k+1)}$.

a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $\forall x \in [k, k+1]$, $\frac{1}{k+1} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{k}$. Donc, $\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dx \le \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \le \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx$ i.e. $\frac{1}{k+1} \le [\ln(x)]_k^{k+1} \le \frac{1}{k}$.
Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $\frac{1}{k+1} \le \ln(k+1) - \ln(k) \le \frac{1}{k}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\frac{1}{k+1} \le \ln(k+1) - \ln(k) \le \frac{1}{k}$ donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \le \sum_{k=1}^{n} [\ln(k+1) - \ln(k)] \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Donc,
$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \le \ln(n+1) - \ln(1) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ i.e. $S_n - 1 + \frac{1}{n+1} \le \ln(n+1) \le S_n$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.
b) Montrons que u et v sont adjacentes : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \le u_n$. Donc prouvons que u est décroissante et v est croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. $u_n - v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) - \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln(n)\right] = \frac{1}{n}$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.
De plus, $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right] = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Donc,

$u_{n+1} - u_n \overset{\forall x\geq 0, \ln(1+x)\geq x-\frac{x^2}{2}}{\leq} \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} = \frac{1-n}{2n^2(n+1)} \leq 0$. Ainsi, (u_n) est décroissante.

De même, $v_{n+1} - v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln(n)\ \right] = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \overset{\forall x>0, \ln(1+x)\leq x}{\geq} 0$. Donc, (v_n) est croissante. J'en déduis que u et v sont adjacentes. Par conséquent, u et v sont convergentes vers une limite commune γ.

Alors, $u_n = \gamma + o_{+\infty}(1)$ i.e. $S_n - \ln(n) = \gamma + o_{+\infty}(1)$. Et ainsi, $S_n = \ln(n) + \gamma + o_{+\infty}(1)$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq \gamma \leq u_n$ donc $0 \leq \gamma - v_n \leq u_n - v_n = \frac{1}{n}$. Ainsi, $\gamma - v_n \leq 10^{-2}$ dès que $\frac{1}{n} \leq 10^{-2}$. Or, $\frac{1}{n} \leq 10^{-2} \Leftrightarrow n \geq 100$.

Donc, v_{100} est une valeur approchée de γ par défaut à 10^{-2}près. Calculons numériquement v_{100}:

```
from math import*
v=1
for i in range(2,100):
  v=v+1/i
v=v-log(100)
print(v)
```

```
0.572207331651529
```

d) $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(2k+1)} = \sum_{k=1}^{n} -\frac{2}{(2k+1)} + \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+1)} = S_n - 2\left(S_{2n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - 1\right)$

$T_n = S_n + 2 - 2\left(S_{2n+1} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) = S_n + 2 - 2\left(S_{2n+1} - \frac{1}{2} S_n\right) = 2 + 2(S_n - S_{2n+1})$

$T_n = 2 + 2(\ln(n) + \gamma + \varepsilon_n - \ln(2n+1) - \gamma - \varepsilon_{2n+1}) = 2 - 2\ln\left(2 + \frac{1}{n}\right) + 2(\varepsilon_n - \varepsilon_{2n+1})$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_{2n+1} = 0$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = 2 - 2\ln(2)$.

Vérifions numériquement ce résultat :

```
from math import*
v=0
for i in range(1,100000):
  v=v+1/(i*(2*i+1))
v=v-2+2*log(2)
print(v)
```

```
-5.000012503586504e-06
```

tout petit !
OK !

67Théo . Soit x un réel. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = 10^{-n}\lfloor 10^n x\rfloor$ *et* $v_n = 10^{-n}\lfloor 10^n x\rfloor + 10^{-n}$.
Alors, $\forall n$, $x - 10^{-n} \leq u_n \leq x < v_n \leq x + 10^{-n}$.
Les suites u *et* v sont adjacentes de limite commune x .
u_n est appelée la valeur décimale approchée de x *à* 10^{-n}près par défaut.

Démo : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n = \left(\frac{1}{10}\right)^n$. *Comme* $\left|\frac{1}{10}\right| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$. *De plus* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. Montrons que u croit et v décroit.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = 10^{-(n+1)}\lfloor 10^{(n+1)}x\rfloor - 10^{-n}\lfloor 10^n x\rfloor = 10^{-(n+1)}(\lfloor 10^{(n+1)}x\rfloor - 10\lfloor 10^n x\rfloor)$.

Or, $\lfloor 10^n x\rfloor \leq 10^n x < \lfloor 10^n x\rfloor + 1$ donc, $10\lfloor 10^n x\rfloor \leq 10^{n+1}x < 10\lfloor 10^n x\rfloor + 10$. L'entier $10\lfloor 10^n x\rfloor$ étant inférieur à $10^{n+1}x$, je peux affirmer que $10\lfloor 10^n x\rfloor \leq \lfloor 10^{(n+1)}x\rfloor$ puisque $\lfloor 10^{(n+1)}x\rfloor$ est le plus grand entier inférieur à $10^{n+1}x$. J'en déduis que $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Ainsi, u croit.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $v_{n+1} - v_n = 10^{-(n+1)}\lfloor 10^{(n+1)}x\rfloor + 10^{-(n+1)} - 10^{-n}\lfloor 10^n x\rfloor - 10^{-n} = 10^{-(n+1)}(\lfloor 10^{(n+1)}x\rfloor + 1 - 10\lfloor 10^n x\rfloor - 10) = 10^{-(n+1)}(\lfloor 10^{(n+1)}x\rfloor - 10\lfloor 10^n x\rfloor - 9)$.

Or, $10\lfloor 10^n x\rfloor \leq 10^{n+1}x < 10\lfloor 10^n x\rfloor + 10$. L'entier $10\lfloor 10^n x\rfloor$ +10 étant strictement supérieur à $10^{n+1}x$, je peux affirmer que $\lfloor 10^{(n+1)}x\rfloor + 1 \leq 10\lfloor 10^n x\rfloor + 10$ puisque $\lfloor 10^{(n+1)}x\rfloor + 1$ est le plus petit strictement supérieur à $10^{n+1}x$.

J'en déduis que $\lfloor 10^{(n+1)}x\rfloor \leq 10\lfloor 10^n x\rfloor + 9$ et par suite que $v_{n+1} - v_n \leq 0$. Ainsi, v décroit.

Je peux donc conclure que u et v sont adjacentes et convergent donc vers une même limite finie notée L.

Montrons que $L = x$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\lfloor 10^n x\rfloor \leq 10^n x < \lfloor 10^n x\rfloor + 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $10^{-n}\lfloor 10^n x\rfloor \leq x < 10^{-n}\lfloor 10^n x\rfloor + 10^{-n}$ i.e. $u_n \leq x < v_n$.

Attention, quand on passe à la limite dans une inégalité, l'inégalité stricte entre les suites devient large sur les limites (le passage à la limite ne conserve pas les inégalités strictes)

Les trois suites de cette inégalité ayant une limite, je peux passer à la limite dans cette inégalité et j'obtiens : $L \leq x \leq L$. Ainsi, $L = x$.

68Conséquence . Tout réel est la limite d'une suite de nombres rationnels et d'une suite de nombres irrationnels. (démo du théo 18)

69Théorème des segments emboîtés: Soit (I_n)une suite de segments telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \subset I_n$ et la longueur de I_n tend vers 0.
Alors il existe un unique point commun à tous les I_n.

IX. **Suites de nombres complexes ou suites complexes.

52Def :** La suite complexe (u_n) tend vers le nombre complexe L quand $n \to +\infty$ lorsque :
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - L| \leq \varepsilon)$.On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ ou encore $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$.

53NB : Une suite complexe n'a pas de limite infinie.

54Prop :** u_n tend vers le complexe L qd $n \to +\infty$ **sietssi** $\lim\limits_{n\to+\infty} Re(u_n) = Re(L)$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} Im(u_n) = Im(L)$. **Démo.**

55Prop :** Toutes les définitions ou propriétés étoilées (**) sont valables pour des suites complexes. Toutes les propriétés nécessitant la monotonie ou caractère majoré ou minorée d'une suite réelle ne sont pas valables pour les suites complexes.

56SAVOIR REFAIRE** Soit u une suite complexe, L un complexe et M un réel tel que $M \in [0,1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - L| \leq M|u_n - L|$.
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$.

Démo : On montre facilement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - L| \leq \underbrace{M^n|u_0 - L|}_{\varepsilon_n}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$, le cours assure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$.