

Suites particulières

L'axe réel est orienté et gradué, le plan est muni d'un repère orthonormé direct.

I. Suites explicites

1 Def : Une suite u est dite explicite lorsqu'on connaît une expression du terme u_n en fonction de n .

2 Exemples : $u_n = (-1)^n n!$ ou $u_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (2k-1)(2k)$

Parmi ces suites, on trouve les suites de la forme $u_n = f(n)$ où f fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

3 Prop : Soit L un réel ou un infini et u telle que : $\forall n, u_n = f(n)$ où f fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- Si $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ alors $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- Si f est monotone alors u est monotone de même monotonie que f .
- Si f est bornée alors u est bornée.

4 NB : pour l'étude de ces suites $u_n = f(n)$, on pourra donc étudier f . Lorsque vous définissez f , indiquer clairement que sa variable est réelle en l'appelant x et non n , de façon à être autorisé à dériver f .

5 Exemple : Soit $A = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n / n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Déterminer $\sup A$ et $\inf A$.

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ et $\forall x \in [1, +\infty[, f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \stackrel{\text{par def}}{=} e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$ et $h(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

h est dérivable sur $[1, +\infty[$ et $\forall x \in [1, +\infty[, h'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{x}{x^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \left(\frac{1}{1+x}\right)$. Or, $\forall t \geq 0, \ln(1+t) \geq t - \frac{t^2}{2}$. Donc,

$\forall x \in [1, +\infty[, h'(x) \geq \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{x-1}{2x^2(x+1)} > 0$. Par conséquent, h est strictement croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$ donc $f = \exp \circ h$ est strictement croissante sur l'intervalle $] -1, +\infty[$ (comme composée de fonctions strictement croissantes). J'en déduis que la suite u est aussi strictement croissante. Il en découle que $\inf(A) = \min(A) = u_1 = \frac{3}{2}$, $\sup(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et enfin A n'a pas de max. Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \stackrel{\text{car } 1 + \frac{1}{n} > 0}{=} e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = e^{\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}$. Or, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ donc par composition, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$. Ainsi, $\sup(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$.

II. Suites récurrentes

6 Def : Une suite u est dite récurrente lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que u vérifie une relation qui exprime u_{n+p} en fonction de $u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+p-1}$. Une telle suite est dite récurrente d'ordre p .

Dans ce cas, pour déterminer les valeurs de tous les termes u_n , il faut et il suffit de connaître les valeurs de $u_0, u_1, \dots, u_{p-1}$.

7 NB : Une suite est récurrente d'ordre p est entièrement définie par sa relation de récurrence et ses p premiers termes.

8 Ex : Soit u la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+3} - n^2 u_{n+1} + \ln(n) u_n = \sqrt{n}$ et $u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = -1$. Calculons u_4 et u_5 . Déterminons une autre suite vérifiant la même relation de récurrence.

9 Parmi ces suites récurrentes, on retrouve les suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2, périodiques, récurrentes d'ordre 1 de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$... Cf ci-dessous !

III. Suites arithmétiques, géométriques – arithmético-géométriques (Rappel)

10 Def : (u_n) est une suite arithmétique lorsqu'il existe un réel ou complexe b tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \underbrace{u_{n+1} = u_n + b}_{\text{relation de récurrence}}$. b est sa raison.

11 Prop : Soit (u_n) est une suite arithmétique de raison b . Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \underbrace{u_n = u_0 + nb}_{\text{expression explicite}}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \begin{cases} -\infty & \text{si } b \text{ réel et } b < 0 \\ u_0 & \text{si } b = 0 \\ +\infty & \text{si } b \text{ réel et } b > 0 \end{cases}$.

12 Def : (u_n) est une suite géométrique lorsqu'il existe un réel ou complexe a tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = a u_n$. a est sa raison.

13 Prop : Soit (u_n) est une suite géométrique de raison a . Alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 a^n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } |a| < 1 \\ u_0 & \text{si } a = 1 \\ \text{sgn}(u_0) \infty & \text{si } a \text{ réel et } a > 1 \text{ et } u_0 \neq 0 \\ \text{n'existe pas} & \text{si } a \text{ réel et } a \leq -1 \end{cases} \text{ et } \sum_{k=0}^n u_k = \begin{cases} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} u_0 & \text{si } a \neq 1 \\ (n+1)u_0 & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

13 bis Exercice Soit $\forall n, S_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \right)$. En remarquant que $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1} dt$, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\ln(2)$.

14 Def : (u_n) est une suite arithmético-géométrique lorsqu'il existe deux réels ou cpxes a et b tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = a u_n + b$.

15 Méthode : On cherche alors LE réel L tel que : $L = aL + b$ (i.e. la suite constante qui vérifie la même relation de récurrence) puis on montre que la suite $(u_n - L)$ est géométrique de raison a . On peut alors écrire que : $u_n - L = a^n (u_0 - L)$.

IV. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

16 Théo (admis pour l'instant) :

On cherche toutes les suites $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, h_{n+2} + ah_{n+1} + bh_n = 0$ où a et b constantes.

Suite complexe : Soit a et b deux complexes fixés. Posons $(e.c) : r^2 + ar + b = 0$ équation caractéristique

Si $\Delta_{e.c} \neq 0$ i.e. $(e.c)$ a deux solutions complexes distinctes r_1 et r_2 alors les suites $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ complexes vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, h_{n+2} + ah_{n+1} + bh_n = 0$ sont les suites de la forme $(\alpha r_1^n + \beta r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que α et β deux constantes complexes.

Si $\Delta_{e.c} = 0$ i.e. $(e.c)$ a une solution complexe double r_0 alors les suites $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ complexes vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, h_{n+2} + ah_{n+1} + bh_n = 0$ sont les suites de la forme $((\alpha + \beta n)r_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que α et β deux constantes complexes.

Suite réelle : Soit a et b deux réels fixés. Posons $(e.c) : r^2 + ar + b = 0$.

Si $\Delta_{e.c} > 0$ i.e. $(e.c)$ a deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 alors les suites $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ réelles vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, h_{n+2} + ah_{n+1} + bh_n = 0$ sont les suites de la forme $(\alpha r_1^n + \beta r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que α et β deux constantes réelles.

Si $\Delta_{e.c} = 0$ i.e. $(e.c)$ a une solution réelle double r_0 alors les suites $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ réelles vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, h_{n+2} + ah_{n+1} + bh_n = 0$ sont les suites de la forme $((\alpha + \beta n)r_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que α et β deux constantes réelles.

Si $\Delta_{e.c} < 0$ i.e. $(e.c)$ a deux solutions complexes conjuguées $r = |r|e^{i\theta}$ et $\bar{r}$ alors les suites $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ réelles vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, h_{n+2} + ah_{n+1} + bh_n = 0$ sont les suites de la forme $((\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta))|r|^n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que α et β deux constantes réelles.

17 Rque : les constantes α et β se déterminent grâce aux valeurs des deux premiers termes de la suite : h_0 et h_1 .

18 Def : (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants lorsqu'il existe deux réels a et b et une suite v telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = v_n$.

19 NB : Une telle suite est entièrement définie par la relation de récurrence et ses deux premiers termes.

20 Prop : Soit deux réels a et b et une suite v . On note E l'ensemble des suites u vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = v_n$. S'il existe une suite t telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, t_{n+2} + at_{n+1} + bt_n = v_n$ alors les suites éléments de E sont toutes les suites de la forme : $(t_n + h_n)$ où h est une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, h_{n+2} + ah_{n+1} + bh_n = 0$.

21 Méthode pour étudier $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = v_n$.

1. **Limite** : si $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $L' = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et $L + aL + bL$ n'est pas une FI alors $L + aL + bL = L'$.

2. **Expression explicite de u** :

- Je cherche une suite t particulière vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, t_{n+2} + at_{n+1} + bt_n = v_n$. Bien souvent t «ressemble» à v .
- J'applique le théorème précédent pour donner toutes les suites h vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, h_{n+2} + ah_{n+1} + bh_n = 0$
- La suite u est alors de la forme : $u = h + t$. (Cf chapitre application linéaire § équations linéaires)

22 Exemples

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / u_0 = 1$ et $u_1 = 1 \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 2u_{n+1} + 4u_n = 0$. Déterminer u_n en fonction de n .

Posons $(e.c) : r^2 + 2r + 4 = 0$. Alors $\Delta_{(e.c)} = 4 - 16 = -12 = i^2 2^2 \sqrt{3}^2 = (2\sqrt{3}i)^2$ et les solutions de $(e.c)$ sont $r_1 = -1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $r_2 = -1 - i\sqrt{3}$. Donc, il existe deux constantes réelles α et β telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(\alpha \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \beta \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right) 2^n$. De plus, $u_0 = 1 = \alpha$ et $u_1 =$

$$1 = \left(\alpha \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \beta \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) 2 = \left(-\frac{1}{2} + \beta \frac{\sqrt{3}}{2}\right) 2. \text{ Donc } \alpha = 1 \text{ et } \beta = \frac{2}{\sqrt{3}}. \text{ Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right) 2^n$$

La suite u est divergente car (u_{3n}) et (u_{3n+2}) tendent respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$.

2. Trouver toutes les suites réelles vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = e^n + n$.

■ Cherchons d'abord Trouver toutes les suites réelles (h_n) vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, h_{n+2} + 2h_{n+1} + h_n = 0$.

Posons $(e.c) : r^2 + 2r + 1 = (r + 1)^2 = 0$. Alors les suites (h_n) recherchées sont les suites $((\alpha + \beta n)(-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

■ Une suite v vérifiant : $(*) \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} + 2v_{n+1} + v_n = e^n$. Cherchons cette suite de la forme $v_n = ae^n$ tq a cste réelle. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} + 2v_{n+1} + v_n = ae^{n+2} + 2ae^{n+1} + ae^n = (ae^2 + 2ae + a)e^n$. Donc pour que v vérifie $(*)$, il suffit de choisir a tel que $ae^2 + 2ae + a = 1$. Donc, $a = \frac{1}{e^2 + 2e + 1} = \frac{1}{(e+1)^2}$ convient.

■ Cherchons une suite w vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} + 2w_{n+1} + w_n = n$. Cherchons cette suite de la forme $v_n = an + b$ tq a, b cstes réelles.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} + 2v_{n+1} + v_n = a(n+2) + b + 2a(n+1) + b + an + b = 4an + 3a + 4b$. Donc pour que v vérifie $(*)$, il suffit de choisir

$$a \text{ et } b \text{ tels que } \begin{cases} 4a = 1 \\ 3a + 4b = 0 \end{cases} \text{ Donc, } \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = -\frac{3}{16} \end{cases} \text{ conviennent.}$$

■ CCL : les solutions de notre problème initial sont toutes les suites $((\alpha + \beta n)(-1)^n + \frac{e^n}{(e+1)^2} + \frac{1}{16}(4n - 3))_{n \in \mathbb{N}}$.

3. Déterminer toutes les fonctions $f: \mathbb{R}^{**} \rightarrow \mathbb{R}^{**}$ telles que : $\forall x > 0, f(f(x)) = 6x - f(x)$.

Analyse : supposons qu'il existe une fonction $f: \mathbb{R}^{**} \rightarrow \mathbb{R}^{**}$ telles que : $\forall x > 0, f(f(x)) = 6x - f(x)$.

Soit $x > 0$ et $u_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. On montre facilement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n > 0$. Alors, $\forall n \in$

$\mathbb{N}, f(f(u_n)) = 6u_n - f(u_n)$ i.e. $u_{n+2} + u_{n+1} - 6u_n = 0$. Posons $(e.c) : r^2 + r - 6 = (r - 2)(r + 3) = 0$. Donc, il existe deux constantes réelles α et β telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha 2^n + \beta (-3)^n$.

Montrons par l'absurde que $\beta = 0$. Imaginons un instant que $\beta \neq 0$. Alors comme $|-3| > |2|$, $2^n = o_{+\infty}((-3)^n)$ et par conséquent, puisque $\beta \neq 0$, $u_n \sim_{+\infty} \beta (-3)^n$. Cela implique que u_n change sans cesse de signe quand $n \rightarrow +\infty$ puisque c'est le cas de son équivalent. Or c'est

impossible puisque $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. J'en déduis que $\beta = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha 2^n$. De plus, $\alpha = u_0 = x$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = x 2^n$. En particulier, $f(x) = u_1 = x 2^1 = 2x$.

CCL° de l'analyse : la seule candidate solution de notre problème est la fonction $(x \mapsto 2x)$.

Synthèse : Soit $f: (\mathbb{R}^{++} \rightarrow \mathbb{R}^{++})$. Alors $\forall x > 0, f(f(x)) = f(2x) = 2(2x) = 6x - 2x = 6x - f(x)$ OK! Donc f est solution et d'après l'analyse f est l'unique solution de notre problème.

Remarque : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$ existe et est une fonction de $\mathbb{R}^{++}$ dans $\mathbb{R}^{++}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}(x)$.

V. Suites périodiques

23Def : (u_n) est une suite périodique lorsqu'il existe un entier naturel p non nul tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = u_n$.
 p est une période de u .

24NB : Une suite p -périodique est une suite de la forme $u = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_{p-1}, a_0, a_1, a_2, \dots, a_{p-1}, a_0, a_1, a_2, \dots, a_{p-1}, \dots)$ i.e.
 $u = a_0 u^{(0)} + a_1 u^{(1)} + a_2 u^{(2)} + \dots + a_{p-1} u^{(p-1)}$ où $u^{(l)} = (u_n^{(l)})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_n^{(l)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv l[p] \\ 0 & \text{si } n \not\equiv l[p] \end{cases}$.

25Ex : les suites 3-périodiques sont les suites de la forme $\forall n, u_n = \begin{cases} a & \text{si } n \equiv 0[3] \\ b & \text{si } n \equiv 1[3] \\ c & \text{si } n \equiv 2[3] \end{cases}$ i.e. de la forme :

$$u = (a, b, c, a, b, c, a, b, c, \dots) = au^{(0)} + bu^{(1)} + cu^{(2)}$$

où $\forall n, u_n^{(0)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0[3] \\ 0 & \text{si } n \equiv 1[3] \\ 0 & \text{si } n \equiv 2[3] \end{cases}, u_n^{(1)} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \equiv 0[3] \\ 1 & \text{si } n \equiv 1[3] \\ 0 & \text{si } n \equiv 2[3] \end{cases}, u_n^{(2)} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \equiv 0[3] \\ 0 & \text{si } n \equiv 1[3] \\ 1 & \text{si } n \equiv 2[3] \end{cases}$.

26Propriétés Toute suite p -périodique prend au plus p valeurs distinctes, est bornée et ne tend jamais vers l'infini.

27 Théorème : Une suite périodique est convergente sietssi elle est constante.

VI. Suites récurrentes vérifiant une relation de la forme : $u_{n+1} = f(u_n)$

28 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur D . Soit u une suite réelle telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

On dit que u est une suite récurrente associée à f .

29 Alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+3} = f \circ f(u_{2n+1})$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n})$ i.e. (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont récurrentes associées à $f \circ f$.

1) Définition de u : pour que u soit bien défini il faut et il suffit que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in D$.

30Prop : Si $f(D) \subset D$ et $u_0 \in D$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in D$ et u est bien définie.

31 Désormais, $f(D) \subset D$ et $u_0 \in D$ donc u est bien définie.

Conséquence : Si D est bornée ou f est bornée (resp. majorée, minorée) sur D alors u est bornée (resp. majorée, minorée).

2) Limites possibles de u :

32Prop : Si $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $L' = \lim_{x \rightarrow L} f(x)$ alors $L = L'$.

En particulier, Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ réel et f est continue en L alors $L = f(L)$ i.e. L est un point fixe de f .

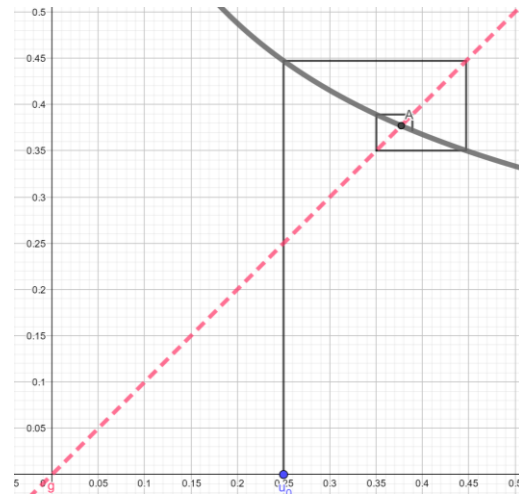
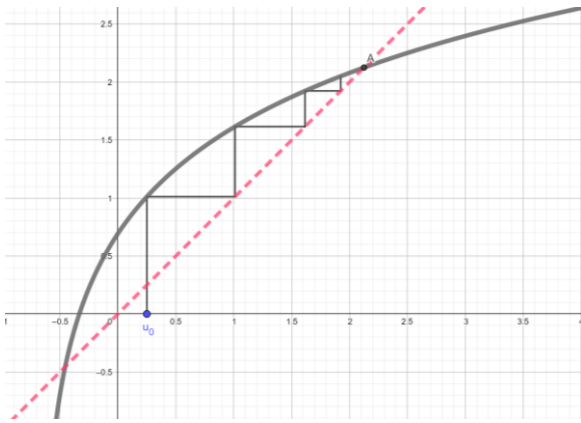
33Conséquence : Si f est continue sur D et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in D$ alors les limites possibles de u sont les points fixes de f dans D et les bords T , finis ou infinis, de D qui n'appartiennent pas à D et qui vérifient $\lim_{x \rightarrow T} f(x) = T$.

3) Monotonie de u :

34Prop : Si f est croissante alors u est monotone (croissante si $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 \geq 0$ et décroissante si $u_1 - u_0 \leq 0$ et lorsque u_0 n'est pas connu, on étudie le signe de $g(x) = f(x) - x$ en fonction de x pour connaître le sens de monotonie suivant la valeur de u_0 .

35Prop : Si f est décroissante alors les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de monotonie contraire. Lorsque la valeur de u_0 n'est pas connue, on doit étudier le signe de $h(x) = f \circ f(x) - x$ pour connaître le sens de monotonie.

36 Illustration :



4) Cas où f est contractante i.e. lipschitzienne de rapport $M \in [0, 1[$

37 Def : f est lipschitzienne sur D lorsqu'il un réel M tel que pour tous a et b de D , $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$. M est le rapport de Lipchitz de f . f est contractante sur D lorsqu'il un réel $M \in [0, 1[$ tel que pour tous a et b de D , $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$ i.e. lorsque f est lipschitzienne de rapport strictement inférieur à 1. NB : toute fonction lipschitzienne sur D est continue sur D .

38 A savoir démontrer : si f est contractante sur D , de rapport M et L est un point fixe de f dans D alors L est l'unique point fixe de f sur D et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ et $\forall n, |u_n - L| \leq M^n |u_0 - L|$. **Démo**

39 Exemples :

1) Soit u une suite définie par : u_0 réel et $\forall n, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$. Etudiez la convergence de u et trouvez-en un équivalent simple.

On montre facilement par un récurrence simple que $\forall n \geq 1, u_n \geq 1$. De plus, $u_{n+1}^2 - u_n^2 = 1 > 0$. Donc $u_{n+1} > u_n$ et la suite u est strictement croissante. Donc u admet une limite L , réelle supérieure à 1 ou égale à $+\infty$.

Imaginons un instant que L soit réelle. Alors $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + u_n^2} = \sqrt{1 + L^2}$. Donc $L^2 = 1 + L^2$ ce qui est impossible. Par conséquent, $L = +\infty$. Enfin, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}^2 - u_n^2 = 1$. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^2 - u_k^2) = \sum_{k=0}^{n-1} 1$ Donc, $u_n^2 - u_0^2 = n$. Ainsi, $u_n = \sqrt{n + u_0^2} \sim \sqrt{n}$.

2) Etudier la convergence de u telle que : $\forall n, u_{n+1} = u_n^2 + u_n$ et $u_0 = \alpha$ réel. Illustrer ce résultat.

$\forall n, u_n$ existe et $\forall n, u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geq 0$. Donc, (u_n) est croissante donc a une limite L réelle ou $L = +\infty$.

Si L est finie alors $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^2 + u_n = L^2 + L$ et par suite $L^2 = 0$ donc $L = 0$. Ainsi, 0 et $+\infty$ sont les seules limites possibles de u .

$\forall n, u_{n+1} = u_n(u_n + 1) = f(u_n)$ où $f: (x \mapsto x(x + 1))$.

$f:]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[\subset \mathbb{R}^{++}$. Donc, si $u_0 \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$, $u_1 \in \mathbb{R}^{++}$ et par conséquent $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

$f:]-1, 0[\subset]-1, 0[$. Donc, si $u_0 \in]-1, 0[$, $\forall n, u_n \in]-1, 0[$ et par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$x + 1$		$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$		$+$	0	$-\frac{1}{4}$	$+$

3) Etudier la convergence de u telle que $u_0 \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + 2u_n)$. Illustrer ce résultat.

Soit $f: (x \mapsto \ln(1 + 2x))$. $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$ et $u_0 \in \mathbb{R}^+$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \geq 0$. Donc u est minorée.

Limites possibles de u : comme f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{R}^+$, les limites possibles de u sont les points fixes de f sur $\mathbb{R}^+$, s'ils existent, et $+\infty$. Cherchons les points fixes de f sur $\mathbb{R}^+$. Posons $g: (x \mapsto f(x) - x)$. Alors g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall x \geq 0, g'(x) = \frac{2}{1+2x} - 1 = \frac{1-2x}{1+2x}$.

g s'annule donc une et une seule fois en un réel a et $a > 1/2$. Donc f admet un et un seul point fixe a .

x	0	$\frac{1}{2}$	a	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$-$		
$g(x)$	0	$+$	0	$-\infty$
$f(x)$	0		a	$+\infty$

f est strictement croissante (puisque $(x \mapsto 1 + 2x)$ et $\ln$ le sont). Par conséquent u est monotone.

De plus, 1^{er} cas : $u_0 \in]0, a[$. Alors $g(u_0) \geq 0$ i.e. $u_1 - u_0 \geq 0$ donc u est croissante. De plus, $f:]0, a[\subset]0, a[$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0, a[$. Donc u est majorée et par suite u converge vers a la seule limite possible de u .

Et si $u_0 \in]a, +\infty[$ alors $g(u_0) < 0$ i.e. $u_1 - u_0 < 0$ donc u est décroissante. De plus, $f(]a, +\infty[) \subset]a, +\infty[$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]a, +\infty[$. Donc u est minorée et par suite u converge vers a la seule limite possible de u .

si $u_0 = 0$ alors u est constante nulle. si $u_0 = a$ alors u est constante égale à a .

Soit u la suite définie par : $u_0 \in \left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{1}{4} \sin \frac{1}{u_n}$.

- Montrer que u est bien définie et que u n'a qu'une seule limite possible notée λ .
- Montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et convergentes.
- Prouver la convergence de la suite u .
- Montrer que $|u_n - \lambda| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.
- Ecrire un programme en python qui prend en entrée un réel $\varepsilon > 0$ et qui retourne une valeur approchée de λ à ε près.

Soit $f: \left(x \mapsto 1 + \frac{1}{4} \sin \left(\frac{1}{x}\right)\right)$ $Df = \mathbb{R}^*$ et $f(\mathbb{R}^*) \subset \left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$ donc $f\left(\left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]\right) \subset \left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$. Comme de plus, $u_0 \in \left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right], \forall n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \in \left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$. Donc u est bornée. Comme f est continue sur $\left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$, les limites possibles de u sont donc les points fixes de f dans $\left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$.

Posons $g: (x \mapsto f(x) - x)$. g est continue et dérivable sur $\left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$ et $\forall x \in \left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right], g'(x) = f'(x) - 1 = -\frac{1}{4x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) - 1 < 0$. Donc g est strictement décroissante sur $\left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$ tout comme f . De plus, $g\left(\frac{3}{4}\right) = 1 + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{4}{3}\right) - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}\left(1 + \sin\left(\frac{4}{3}\right)\right) > 0$ et $g\left(\frac{5}{4}\right) = 1 + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{4}{5}\right) - \frac{5}{4} = \frac{1}{4}\left(\sin\left(\frac{4}{5}\right) - 1\right) < 0$. Donc g s'annule une et une seule fois sur $\left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$ en un réel λ .

Comme f est strictement décroissante sur $\left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right], (u_{2n})$ et (u_{2n+1}) sont monotones de monotonie contraire. Comme elles sont extraites de u , elles sont bornées et par conséquent, elles sont convergentes.

Montrons que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite.

Comme (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont récurrentes associées à $f \circ f$, fonction continue sur $\left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$, les limites possibles de (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont les points fixes de $f \circ f$. Posons $h: (x \mapsto f \circ f(x) - x)$. h est continue et dérivable sur $\left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$ et $\forall x \in \left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right], h'(x) = f'(x)f'(f(x)) - 1$.

Or, $\forall x \in \left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right], |f'(x)| = \left|-\frac{1}{4x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq \frac{1}{4x^2} \leq \frac{1}{4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{4}{9}$. Donc, $|f'(x)f'(f(x))| \leq \frac{16}{81}$ i.e. $-\frac{16}{81} \leq f'(x)f'(f(x)) \leq \frac{16}{81}$ et par conséquent, $h'(x) < 0$.

Donc h est strictement décroissante sur $\left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$. Donc h s'annule au plus une fois sur $\left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$. Or, $h(\lambda) = f(f(\lambda)) - \lambda = f(\lambda) - \lambda = 0$. Donc λ est l'unique point fixe de $f \circ f$ et donc l'unique limite possible de (u_{2n}) et de (u_{2n+1}) . Comme ces deux suites convergent, (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers λ .

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \lambda| &= |f(u_n) - f(\lambda)| = \left| \frac{1}{4} \sin\left(\frac{1}{u_n}\right) - \frac{1}{4} \sin\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right| = \frac{1}{4} \left| \sin\left(\frac{1}{u_n}\right) - \sin\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right| = \frac{1}{4} \left| 2 \sin\left(\frac{1}{2u_n} - \frac{1}{2\lambda}\right) \cos\left(\frac{1}{2u_n} + \frac{1}{2\lambda}\right) \right| \\ |u_{n+1} - \lambda| &= \frac{1}{2} \left| \sin\left(\frac{1}{2u_n} - \frac{1}{2\lambda}\right) \right| \left| \cos\left(\frac{1}{2u_n} + \frac{1}{2\lambda}\right) \right| \leq \frac{1}{2} \left| \sin\left(\frac{1}{2u_n} - \frac{1}{2\lambda}\right) \right| = \frac{1}{2} \left| \sin\left(\frac{\lambda - u_n}{2\lambda u_n}\right) \right| \leq \frac{1}{2} \left| \frac{\lambda - u_n}{2\lambda u_n} \right| = \frac{1}{4\lambda} \frac{1}{|u_n|} |u_n - \lambda| \\ |u_{n+1} - \lambda| &\leq \frac{16}{4 \times 9} |u_n - \lambda| \leq \frac{4}{9} |u_n - \lambda| \leq \frac{1}{2} |u_n - \lambda|. \end{aligned}$$

Alors, par récurrence, on montre alors $\forall n, |u_n - \lambda| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - \lambda| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$. Comme $\left|\frac{1}{2}\right| < 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$ et par conséquent, on

retrouve bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lambda$.

Programme de Python donnant une valeur approchée de la limite à ε près :

```
from math import*
def approximation(e):
    s=1
    i=0
    While 1/(2^i)>e:
        s=1+sin(1/s)/4
        i=i+1
    print(s,i)
```

VII. Suites implicites

40Déf : Une suite implicite est une suite dont le terme de rang n , u_n , est la solution d'une équation $\varphi_n(x) = 0$ dans un intervalle I_n donné. u_n est alors entièrement défini par : $\begin{cases} \varphi_n(u_n) = 0 \\ u_n \in I_n \end{cases}$.

41Exemples :

1. Soit $n \geq 2$ et (E_n) l'équation $\sum_{k=1}^n x^k = 1$ d'inconnue x réelle.

- Justifier que : pour tout $n \geq 2$, l'équation (E_n) admet une unique solution positive. On note λ_n cette solution.
- Montrer que la suite (λ_n) est monotone et convergente.
- Déterminer la limite de la suite (λ_n) .

- Soit $n \geq 2$. $\varphi_n: (x \mapsto (\sum_{k=1}^n x^k) - 1)$ est polynomiale donc continue et même de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$. De plus, φ_n est la somme de fonctions strictement croissantes : $(x \mapsto x - 1), (x \mapsto x^2), \dots, (x \mapsto x^n)$. Donc φ_n est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$. Donc, le TBCSM assure que φ_n est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $f(\mathbb{R}^+) = [f(0), \lim_{+\infty} f] = [-1, +\infty[$. Alors comme $0 \in [-1, +\infty[, 0$ admet un unique antécédent par φ_n . Ainsi, l'équation (E_n) admet une unique solution positive. Notons λ_n cette solution positive. De plus $\varphi_n(0) = -1$ et $\varphi_n(1) = n - 1 > 0$. Donc $0 < \lambda_n < 1$.

Alors pour tout $n \geq 2, 0 < \lambda_n < 1$ et $\sum_{k=1}^n (\lambda_n)^k = 1$ i.e. $\varphi_n(\lambda_n) = 0$. Ainsi, la suite (λ_n) existe et est bornée.

- Soit $n \geq 2$. $\varphi_n(\lambda_n) = 0$ et $\varphi_{n+1}(\lambda_{n+1}) = 0$ i.e. $\sum_{k=1}^{n+1} (\lambda_{n+1})^k = 1$.

Alors, $\varphi_n(\lambda_{n+1}) = [\sum_{k=1}^n (\lambda_{n+1})^k] - 1 = [\sum_{k=1}^{n+1} (\lambda_{n+1})^k] - \lambda_{n+1}^{n+1} - 1 = \varphi_{n+1}(\lambda_{n+1}) - \lambda_{n+1}^{n+1} = -\lambda_{n+1}^{n+1} < 0$ car $0 \leq \lambda_{n+1} < 1$.
Donc, $\varphi_n(\lambda_{n+1}) < \varphi_n(\lambda_n)$. Comme φ_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, $\lambda_{n+1} < \lambda_n$. Ainsi, la suite (λ_n) est strictement décroissante et bornée donc **convergente**. Notons L la limite de la suite (λ_n) .

b. Soit $n \geq 2$. $\forall x \in [0,1], \varphi_n(x) = (\sum_{k=1}^n x^k) - 1 = x \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - 1 = \frac{-1+2x-x^{n+1}}{1-x}$.

Donc $\frac{-1+2\lambda_n-(\lambda_n)^{n+1}}{1-\lambda_n} = 0$ et par suite, comme $\lambda_n > 0$, $-1+2\lambda_n - e^{(n+1)\ln(\lambda_n)} = 0$ et par suite $2\lambda_n - 1 = e^{(n+1)\ln(\lambda_n)}$; j'en déduis que $1 > \lambda_n >$

$1/2$ et comme la suite (λ_n) est décroissante, $1 > L \geq \frac{1}{2}$.

Alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) \ln(\lambda_n) = -\infty$ et par passage à la limite dans (**), $0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2\lambda_n - 1 e^{(n+1)\ln(\lambda_n)} = 2L - 1$ et ainsi, $L = \frac{1}{2}$.

2. On définit la suite u par : pour tout entier naturel n , u_n est l'unique solution de l'équation $\tan(x) = x$ dans $]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$.

a. Justifier que $\forall n, u_n$ est bien défini. Représenter la suite u .

b. Etudier la monotonie et la limite de la suite u .

c. Montrer que $u_n - n\pi \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2}$.

d. Déterminer des réels a, b et c tels que : $u_n = an + b + \frac{c}{n} + o_{+\infty}(\frac{1}{n})$.

a. Soit $\varphi(x) = \tan(x) - x$. φ est continue et dérivable sur chaque intervalle $I_n =]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$.

$\forall x \in I_n, \varphi'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x) \geq 0$ et $\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = n\pi$. Donc φ' ne s'annule qu'au point isolé $n\pi$ de l'intervalle I_n . Donc φ est continue et strictement croissante sur chaque intervalle I_n .

Donc φ est bijective de $I_n =]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$ sur $\varphi(I_n) =]\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2} + n\pi)^+} \varphi, \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + n\pi)^-} \varphi[= \mathbb{R}$. Alors 0 a un unique antécédent u_n par φ dans chaque

intervalle I_n . Ainsi, $\forall n, u_n$ est défini par : $\begin{cases} \tan(u_n) = u_n \\ u_n \in]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[\end{cases}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_n \in]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$ et $u_{n+1} \in]-\frac{\pi}{2} + (n+1)\pi, \frac{\pi}{2} + (n+1)\pi[=]\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{3\pi}{2} + n\pi[$ Donc, $u_n < \frac{\pi}{2} + n\pi < u_{n+1}$. Ainsi, (u_n) est une suite strictement croissante. Et $\forall n, -\frac{\pi}{2} + n\pi < u_n$, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{\pi}{2} + n\pi = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

c. $\tan(u_n) = u_n$ et $u_n \in]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$ donc $\tan(u_n - n\pi) = u_n$ et $u_n - n\pi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Par conséquent, $u_n - n\pi = \text{Arctan}(u_n)$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(u_n) = \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}^*$. J'en déduis que $u_n - n\pi \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2}$.

d. Alors $u_n - n\pi = \frac{\pi}{2} + o_{+\infty}(1)$ donc $u_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o_{+\infty}(1)$ i.e. $u_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \varepsilon_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$.

Cherchons un équivalent de ε_n quand $n \rightarrow +\infty$.

$u_n - n\pi = \text{Arctan}\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + o_{+\infty}(1)\right) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + o_{+\infty}(1)}\right)$. Et $\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + o_{+\infty}(1)} \sim_{+\infty} \frac{1}{n\pi}$ et $\text{Arctan}(t) \sim_{t \rightarrow 0} t$ donc

$\text{Arctan}\left(\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + o_{+\infty}(1)}\right) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + o_{+\infty}(1)} \sim_{+\infty} \frac{1}{n\pi}$. Donc, $\text{Arctan}\left(\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + o_{+\infty}(1)}\right) = \frac{1}{n\pi} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n\pi}\right) = \frac{1}{n\pi} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Ainsi, $u_n - n\pi = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$ i.e. $u_n = \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{=a} n + \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{=b} + \underbrace{\left(-\frac{1}{\pi}\right)}_{=c} \frac{1}{n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$.

42 Méthode : Etude d'une telle suite :

1) **Définition** : on fixe n arbitrairement, on écrit l'équation donnée sous la forme $\varphi_n(x) = 0$ et on vérifie que cette équation a bien une et une seule solution dans l'intervalle I_n : on étudie φ_n et on prouve que φ_n s'annule une et une seule fois sur I_n grâce au TVI et à la stricte monotonie ... (TBCSM).

On justifie ainsi que la suite (u_n) est bien définie.

NB : φ_n est parfois bijective sur I_n alors $0 = \varphi_n(u_n)$ s'écrit $u_n = \varphi_n^{-1}(0)$. Il suffit alors d'étudier φ_n^{-1} au voisinage de 0.

2) **Monotonie** : a) les intervalles I_n permettent parfois de conclure directement. Sinon.

b) on cherche le signe de $\varphi_n(u_{n+1})$ (en utilisant $\varphi_{n+1}(u_{n+1}) = 0$) et on utilise la monotonie de φ_n pour conclure.

Si par exemple $\varphi_n(u_{n+1}) > 0 = \varphi_n(u_n)$ et φ_n décroissante alors $u_n > u_{n+1}$ et la suite (u_n) est décroissante.

3) **Bornée** : a) les intervalles I_n permettent parfois de conclure directement. Sinon.

b) Par le TVI appliqué à φ_n entre deux valeurs bien choisies, on peut encadrer la suite.

4) **Convergence** : a) les intervalles I_n permettent parfois de conclure directement.

b) Si l'on sait que u a une limite (parce que u monotone par exemple), on passe à la limite dans la relation $\varphi_n(u_n) = 0$, il est parfois utile de la transformer et d'utiliser les propriétés de la suite (u_n) et notamment son caractère borné.

5) **Développement asymptotique** : le plus souvent on l'obtient en plusieurs étapes :

a) On obtient un équivalent α_n de u_n pour n au voisinage de $+\infty$ en utilisant des développements limités et équivalents usuels dans la relation $\varphi_n(u_n) = 0$. On pose alors :

$$u_n = \alpha_n + \varepsilon_n \text{ tel que } \varepsilon_n = o_{+\infty}(\alpha_n)$$

b) On obtient un équivalent δ_n de ε_n pour n au voisinage de $+\infty$ en réinjectant dans $\varphi_n(\alpha_n + \varepsilon_n) = 0$ utilisant des développements limités et équivalents usuels dans la relation $\varphi_n(u_n) = 0$ On pose alors :

$$\varepsilon_n = \delta_n + \mu_n \text{ tel que } \mu_n = o_{+\infty}(\varepsilon_n) \quad \dots$$

c) Et on recommence !!!!

NB : D'autres méthodes sont souvent suggérées par l'énoncé. Laissez-vous guider.