DC 13

Développement limité par intégration terme à terme

a. Montrer que $Arctan(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3 + o_1((x-1)^4)$.

b. En déduire les valeurs de $Arctan^{(2)}(1), Arctan^{(3)}(1)\ et\ Arctan^{(4)}(1)$.

Prolongement par continuité

Soit $f: \left(x \mapsto \frac{Arctan^2(x)}{\ln(\cos(x))}\right)$.

a. Montrer que $\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o_0(x^5)$.

b. En déduire que $f(x) = -2 + \frac{5}{3}x^2 + o_0(x^3)$.

c. En déduire que f est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement $\tilde{f}$ est dérivable en 0 et donner l'équation de la tangente à $C\tilde{f}$ en 0 et la position de $C\tilde{f}$ par rapport à cette tangente .

Asymptote

On donne $288 = 9 \times 8 \times 4$ et $2087 = 29 \times 9 \times 8 - 1$

Soit $f(x) = \sqrt[3]{8x^3 + x^2} e^{\frac{3x-1}{x^2}}$.

a. Montrer que $f(x) = 2x + \frac{73}{12} + \frac{2087}{288x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$.

b. Justifier l'existence d'une asymptote de Cf en $+\infty$, donner son équation et sa position par rapport à Cf au vois. de $+\infty$.

EXERCICE FACULTATIF : DL d'une bijection réciproque

Soit $\forall x \in [0,1], \varphi(x) = \ln(x + \mathrm{e}^x)$

a. Montrer que $\varphi(x) = 2x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 + o_0(x^3)$.

b. Montrer que φ est bijective de $[0,1]$ sur un intervalle J à déterminer.

c. Justifier que φ^{-1} est de classe C^∞ sur J.

d. Justifier que φ^{-1}admet un $DL_3(0)$.

e. Montrer que $\varphi^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{16}x^2 + \frac{5}{192}x^3 + o_0(x^3)$.