Programme de colle 14

Chap 9 Développements limités.

III Développements limités .

- **Définition** d'un développement limité en un réel et en particulier en 0. **Unicité** de ce DL.

Si au voisinage de $x_0, f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots..+a_n(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \cdots..+b_n(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n)$ alors $\forall k \in [\![0, n]\!], a_k = b_k$.

- **Propriétés des DL :**
  - ✓ Equivalent

Si au voisinage de $x_0, f(x) = a_p(x - x_0)^p + \cdots..+a_n(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n)$ $avec\ p \leq n\ et\ a_p \neq 0$ alors $f(x) \sim_{x_0} a_p(x - x_0)^p$.

  - ✓ « se ramener en 0 »

Soit f définie au voisinage du réel x_0. Posons $g(t) = f(x_0 + t)$ i.e. $f(x) = g(x - x_0)$. Alors,

$$g\ admet\ le\ DL_n(0) suivant\ g(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots..+a_nt^n + o_0(t^n)$$
$$\Leftrightarrow f\ admet\ le\ DL_n(x_0) suivant:\ f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots..+a_n(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n)$$

  - ✓ Troncature

Si f admet le $DL_n(x_0)$ suivant: $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots..+a_n(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n)$
alors f admet $le\, DL_{n-1}(x_0) suivant$: $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots..+a_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + o_{x_0}((x - x_0)^{n-1})$

  - ✓ Développement limité en 0 d'une fonction paire ou impaire

Si f est paire et admet un $DL_n(0)$ alors ce $DL_n(0)$ est de la forme $f(t) = a_0 + a_2t^2 + a_4t^4 \ldots.. + \begin{cases} a_nt^n + o_0(t^n)\ si\ n\ pair \\ a_{n-1}t^{n-1} + o_0(t^n)\ si\ n\ impair \end{cases}$.

Si f est impaire et admet un $DL_n(0)$ alors ce $DL_n(0)$ est de la forme $f(t) = a_1t + a_3t^3 \ldots.. + \begin{cases} a_nt^n + o_0(t^n)\ si\ n\ impair \\ a_{n-1}t^{n-1} + o_0(t^n)\ si\ n\ pair \end{cases}$.

- **Développements limités usuels :**
  - ✓ Développement limité en 0 de $\frac{1}{1-x}$ obtenu par somme géométrique puis de $\frac{1}{1+x}$ e

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n\ + x^n o_0(1) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o_0(x^n)$.

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n\ + x^n o_0(1) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + o_0(x^n)$.

  - ✓ **Théorème de Taylor-Young** et développement limité en 0 de $e^x, \cos(x), \sin(x), sh(x), ch(x), (1 + x)^\alpha$.

Si f est de classe C^n un voisinage de x_0 contenant x_0 alors f admet le $DL_n(x_0)$: $f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}_{Q_n(x-x_0)} + \underbrace{o_{x_0}((x - x_0)^n)}_{reste}$.

Si f est de classe C^n sur un voisinage de 0 contenant 0 alors f admet le $DL_n(0)$: $f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}_{P_n(x)} + \underbrace{o_0(x^n)}_{reste}$.

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n o_0(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o_0(x^n)$.
$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} o_0(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_0(x^{2n+2})$.
$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} o_0(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o_0(x^{2n+1})$.
$\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} o_0(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_0(x^{2n+2})$.
$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} o_0(1) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o_0(x^{2n+1})$.
$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)..(\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n o_0(1)$.

  - ✓ **Théorème d'intégration terme à terme** et développement limité en 0 de $\ln(1 + x)$, $Arctan(x)$, $\underbrace{\tan(x)\ et\ Arcsin(x)}_{ordre\ 5\ uniquement}$.

•Si f est dérivable sur un voisinage de 0 contenant 0 et f' admet le $DL_n(0\ )$ suivant : $f'(x) = a_0 + a_1 x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + o_0(x^n)$
alors f admet le $DL_{n+1}(0\ )$ suivant : $f(x) = f(0) + a_0x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o_0(x^{n+1})$.

•Si f est dérivable sur un voisinage de x_0 contenant x_0 et f' admet le $DL_n(x_0\ )$ suivant :

$$f'(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n)$$

alors f admet le $DL_{n+1}(x_0\ )$ suivant : $f(x) = f(x_0) + a_0(x - x_0) + a_1 \frac{(x-x_0)^2}{2} + \cdots + a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} + o_{x_0}((x - x_0)^{n+1})$.

$Arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o_0(x^{2n+1})$.
$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + o_0(x^{n+1})$.
$Arcsin(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + x^5 o_0(1)$.
$tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5 o_0(1)$.

- **Opérations sur les DL :** Combinaison linéaire et produit. Composition. Inverse et quotient.

Soit $\alpha\ et\ \beta$ deux constantes réelles . Si $f\ et\ g$ admettent les $DL_n\ (0)$ suivants : $f(x) = P(x) + o_0(x^n)$ et $g(x) = Q(x) + o_0(x^n)$
alors $\alpha f + \beta g\ et\ fg$ admettent chacune un $DL_n\ (0)$ et
$\alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha P(x) + \beta Q(x) + o_0(x^n)$.
$f(x) \times g(x) = [somme\ des\ termes\ de\ degré\ inférieur\ ou\ égal\ à\ n\ de\ \ P(x) \times Q(x)] + o_0(x^n)$.

Si f admet le $DL_n\ (0)$ et $\lim_{x \to 0} f(x) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ admet un $DL_n\ (0)$.

Si f et g admettent des DL_n (0) et $\lim_{x\to 0} f(x) \neq 0$ alors $\frac{g}{f}$ admet un DL_n (0) .

Si f admet le DL_n (0) et $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ et g admet un DL_n (0) alors $g \circ f$ admet le DL_n (0).

- **Applications :**
  - ✓ Recherche de limite et d'équivalent
  - ✓ Caractérisation de la dérivabilité d'une fonction en un point a par son DL_1 (a) et position de la courbe par rapport à son asymptote

●Si f est définie en x_0 $et\ au\ voisinage\ de\ x_0\ alors$
f admet le DL_1 (x_0) $f(x) = A + B(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0) \Leftrightarrow f$ est dérivable en x_0 , $f(x_0) = A$ et $f'(x_0) = B$.
●Si f est définie $au\ voisinage\ de\ x_0\ mais\ pas\ en\ x_0\ alors$
f admet le DL_1 (x_0) $f(x) = A + B(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0) \Leftrightarrow f$ est prolongeable par continuité en x_0 par la valeur A et son prolongement $\tilde{f}$ est dérivable en x_0 , $\tilde{f}\,(x_0) = A$ et $\tilde{f}'(x_0) = B$.

  - ✓ Recherche d'asymptote et position de la courbe par rapport à son asymptote
  - ✓ Recherche de DL d'une fonction dont l'expression est définie par une intégrale.
  - ✓ Recherche de DL d'une bijection réciproque.

Chap 10 Suites réelles et suites complexes.

I Définitions

- ➢ suite réelle , suite complexe , représentation
- ➢ suite bornée
- ➢ suite réelle majorée, minorée, croissante, décroissante
- ➢ suite ayant une limite finie :

Une suite réelle (u_n) tend vers le réel L lorsque : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow |u_n - L| \leq \varepsilon)$

- ➢ suite réelle ayant une limite infinie :

Une suite réelle (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ lorsque : $\forall A \in \mathbb{R}^{+*}, \exists n_A \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_A \Longrightarrow u_n \geq A)$.
Une suite réelle (u_n) tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ lorsque : $\forall B \in \mathbb{R}^{-*}, \exists n_B \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_B \Longrightarrow u_n \leq B)$.

- ➢ suite convergente, suite divergente.

II Propriétés fondamentales des suites

- ➢ Caractère borné ou pas :

Toute suite convergente est bornée.

Si (u_n) est une suite réelle de limite finie L et a et b sont deux réels tels que : $a < L < b$ alors à partir d 'un certain rang, $a \leq u_n \leq b$. En particulier, toute suite ayant une limite strictement positive est strictement positive à partir d'un certain rang.

Toute suite réelle ayant une limite infinie n'est pas bornée...

- ➢ Théorème Unicité de la limite.

Une suite (u_n) ne peut avoir qu'une seule limite quand $n \to +\infty$. On note $\lim_{n\to+\infty} u_n$ cette limite lorsqu'elle existe.

- ➢ Caractérisation d'une suite convergente : Soit une suite (u_n)réelle (resp. complexe) et L un réel (resp. complexe)

$\lim_{n\to+\infty} u_n = L \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n - L = \cdots \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |u_n - L| = \cdots \Leftrightarrow |u_n - L| \leq \varepsilon_n\ tel\ que\ \lim_{n} \varepsilon_n = 0.$

- ➢ Théorème des gendarmes ou de limite par encadrement :

Soit u, v et w des suites réelles.

Si à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = L \in \mathbb{R}$ alors (v_n) converge et $\lim_{n\to+\infty} v_n = L$.

Si à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$et $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Si à partir d'un certain rang, $v_n \leq w_n$ et $\lim_{n\to+\infty} w_n = -\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

III Densité.

- ➢ Définition :

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$. A est dense dans B lorsqu'entre deux éléments quelconques et distincts de B se trouve au moins un élément de A.

- ➢ Caractérisation séquentielle.

Soient B un intervalle de $\mathbb{R}$ et A une partie de B. A est dense dans B sietssi tout élément de B est la limite d'une suite d'élément de A.

- ➢ Densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

IV Borne sup. ou inf.

- Définition et théorème d'existence :

L'ensemble des majorants d'une partie A de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet un plus petit élément appelé borne supérieure de A et noté $sup(A)$; $sup(A)$ est donc le plus petit majorant de A.

L'ensemble des minorants d'une partie A de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet un plus grand élément appelé borne inférieure de A et noté $inf(A)$; $inf(A)$ est donc le plus grand minorant de A.

Lorsque A n'est pas majorée, $\sup(A) = +\infty$. Lorsque A n'est pas minorée, $\sup(A) = -\infty$.

- Relation entre plus petit (resp. grand) élément et borne inférieure (resp. supérieure). Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

Si il existe un élément m de A qui minore A alors $m = \min(A) = \inf(A)$.

Si il existe un élément m' de A qui majore A alors $m' = \max(A) = \sup(A)$.

Si A admet une borne inf M' et $M' \notin A$ alors A n'admet pas de minimum.

Si A admet une borne sup M et $M \notin A$ alors A n'admet pas de maximum.

- Caractérisation par les epsilon d'une borne sup. ou inf. finie.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée et m un réel. Alors, $m = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, a \leq m \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists a_\varepsilon \in A / m - \varepsilon < a_\varepsilon. \end{cases}$

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée et m un réel. Alors, $m = \inf(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, a \geq m \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists a_\varepsilon \in A / m + \varepsilon > a_\varepsilon. \end{cases}$

- Caractérisation séquentielle d'une borne sup. ou inf. (même infinie).

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et m un réel ou un infini.

$$m = \inf(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, a \geq m \\ il\ existe\ une\ suite\ (a_n)\ d'éléments\ A\ telle\ que\ \lim_{n\to+\infty} a_n = m. \end{cases}$$

$$m = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, a \leq m \\ il\ existe\ une\ suite\ (a_n)\ d'éléments\ A\ telle\ que\ \lim_{n\to+\infty} a_n = m. \end{cases}$$

V Autres propriétés fondamentales des suites :

- Théorème d'opérations sur les limites
- Limite d'une suite monotone

Toute suite monotone a un limite (finie ou infinie).
Une suite croissante (resp. décroissante) admet une limite finie sietssi cette suite est majorée (resp. minorée).

- Passage à la limite dans une inégalité

Si u et v sont deux suites réelles telles que $\lim_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n$ existent et à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n$.

CONNAITRE ET SAVOIR ENONCER TOUS LES DEFINTIONS, PROPRIETES ET THEOREMES DU COURS.

Savoir énoncer et démontrer les résultats suivants :

1. Théorème d'unicité d'un DL. Application au $DL(0)$ d'une fonction impaire.
2. Caractérisation d'une fonction dérivable en a par son $DL_1(a)$.
3. Si u tend vers les réels L_1 et L_2 alors $L_1 = L_2$.
4. Toute suite convergente est bornée.
5. Soit (u_n) suite réelle et a, b et L des réels. si $a < L < b$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = L$ alors $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, u_n \in [a, b]$.
6. la caractérisation séquentielle d'une borne supérieure
7. le produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle est une suite de limite nulle.
8. Si u et v convergent vers respectivement L_1 et L_2 alors $u + v$ converge vers $L_1 + L_2$.
9. Si u tend vers 0^+ alors $\frac{1}{u}$ converge vers $+\infty$.
10. Une suite réelle croissante a une limite.