

CORRIGE DL 8

Equations différentielles d'ordre 1 non linéaire

Soit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0; 1\}$ et l'équation de Bernoulli (B_n) : $y'(x) + a(x)y(x) + b(x)y(x)^n = 0$

où a et b sont des fonctions réelles et continues sur un même intervalle I , y la fonction inconnue et x la variable de dérivation, élément de I . Cette équation de Bernoulli n'est pas linéaire. Une solution de (B_n) sur I est toute fonction $y: I \rightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur I , ne s'annulant pas sur I et telle que: $\forall x \in I, y'(x) + a(x)y(x) + b(x)y(x)^n = 0$

Soit y une fonction dérivable sur I et ne s'annulant pas sur I . On pose $z(x) = \frac{1}{y(x)^{n-1}}$.

1. Montrer que: y est solution de (B_n) sur I **sietssi** z est solution sur I d'une équation différentielle linéaire (E_n) d'ordre 1.

Comme y est une fonction dérivable sur I , ne s'annulant pas sur I , z est une fonction dérivable sur I et $\forall x \in I, z(x) = y(x)^{1-n}$ et $z'(x) = (1-n)y'(x)y(x)^{-n}$. Alors,

$$\forall x \in I, y'(x) + a(x)y(x) + b(x)y(x)^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in I, y'(x)y(x)^{-n} + a(x)y(x)y(x)^{-n} + b(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in I, y'(x)y(x)^{-n} + a(x)y(x)^{1-n} + b(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in I, \frac{1}{1-n}z'(x) + a(x)z(x) + b(x) = 0 \text{ edl1 CQFD!}$$

2. Application :

a) Déterminer toutes les fonctions y qui sont dérivables et ne s'annulent pas sur $I =]1; +\infty[$ et qui vérifient :

$$\forall x \in I, -x^2 y'(x) + xy(x) = y^2(x) \text{ (équation notée } (B_2))$$

Soit y une fonction dérivable sur I et ne s'annulant pas sur I . On pose $z(x) = \frac{1}{y(x)}$. D'après 1.,

$$\forall x \in I, -x^2 y'(x) + xy(x) = y^2(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in I, y'(x) - \frac{1}{x}y(x) + \frac{1}{x^2}y^2(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in I, -z'(x) - \frac{1}{x}z(x) + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in I, z'(x) + \frac{1}{x}z(x) = \frac{1}{x^2} \text{ (E}_2\text{)edl1}$$

Posons $a(x) = \frac{1}{x}$. Alors, $A: (x \mapsto \ln(x))$ est une primitive de a sur I et $e^{-A(x)} = e^{-\ln(x)} = e^{\ln(\frac{1}{x})} = \frac{1}{x}$. Donc, les solutions de (E_2H) sont toutes les fonctions de la forme $(x \mapsto \frac{k}{x})$ tel que $k \in \mathbb{R}$.

Recherche d'une solution particulière de E_2 : je cherche une solution de la forme $f(x) = \frac{k(x)}{x}$ tel que k dérivable sur I . Alors

f est dérivable sur I et $\forall x \in I, f'(x) = \frac{k'(x)}{x} - \frac{k(x)}{x^2}$. Alors

$$f \text{ solution de } E_2 \text{ sur } I \Leftrightarrow \forall x \in I, f'(x) + \frac{1}{x}f(x) = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \forall x \in I, \frac{k'(x)}{x} - \frac{k(x)}{x^2} + \frac{k(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \forall x \in I, k'(x) = \frac{1}{x}.$$

Prenons $k_0(x) = \ln(x)$ et $f_0(x) = \frac{\ln(x)}{x}$. Alors f_0 est une solution particulière de E_2 sur I . Donc, les solutions de (E_2) sont toutes les fonctions de la forme $(x \mapsto \frac{k+\ln(x)}{x})$ tel que $k \in \mathbb{R}$. Et les solutions de (E_2) sur I ne s'annulant pas sur I , sont toutes les fonctions de la forme $(x \mapsto \frac{k+\ln(x)}{x})$ tel que $k \in \mathbb{R}^+$.

Alors les fonctions y solution de (B_2) qui sont dérivables et ne s'annulent pas sur $I =]1; +\infty[$ sont toutes les fonctions de la forme $(x \mapsto \frac{x}{k+\ln(x)})$ tel que $k \in \mathbb{R}^+$.

b) Montrer que pour chacune des fonctions f solutions de (B_2) sur I trouvées à la question précédente (i.e. f ne s'annulant pas sur I), il existe un réel $\beta \in [1, +\infty[$ tel que $\forall x \in I, f(x) = \frac{x}{\ln(\beta x)}$.

Soit $f: (x \mapsto \frac{x}{k+\ln(x)})$ tel que $k \in \mathbb{R}^+$. Posons $\beta = e^k$. Alors $A \in [1, +\infty[, \beta = \ln(A)$ et $\forall x \in I, f(x) = \frac{x}{\ln(\beta)+\ln(x)} = \frac{x}{\ln(\beta x)}$.

c) Pour $\beta \in [1, +\infty[$, on note (C_β) la courbe d'équation $y = \frac{x}{\ln(\beta x)}$. Montrer que (C_β) est l'image de (C_1) par une homothétie de centre O dont on précisera le rapport.

Posons $J = [\frac{1}{\beta}, +\infty[$. $C_1 = \{M(t, \frac{t}{\ln(t)}) / t \in I\} \stackrel{\text{en posant}}{=} \{M(\beta x, \frac{\beta x}{\ln(\beta x)}) / x \in J\}$. De plus, $C_\beta = \{M(x, \frac{x}{\ln(\beta x)}) / x \in J\}$

$$t = \beta x \Leftrightarrow x = \frac{t}{\beta}$$

$$t > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{\beta}$$

Soit $x \in I \cap J$. Alors, $M(\beta x, \frac{\beta x}{\ln(\beta x)}) \in C_1$ et $M'(x, \frac{x}{\ln(\beta x)}) \in C_\beta$ et $\overrightarrow{OM} = \beta \cdot \overrightarrow{OM'}$.

Donc, (C_β) est l'image de (C_1) par une homothétie de centre O dont on précisera le rapport.

1. Soit l'intervalle $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et l'équation différentielle $(E_1): \cos(t)z''(t) - 2\sin(t)z'(t) - \cos(t)z(t) = 0$.

Résoudre (E_1) sur I en effectuant le changement de fonction $\varphi(t) = \cos(t)z(t)$.

2. Soit $J =]-1, 1[$ et $(E_2): (1-x^2)y''(x) - 3xy'(x) - y(x) = 0$.

Soit $y: J \rightarrow \mathbb{R}$, deux fois dérivable sur J . On pose $\forall x \in J, t = \text{Arcsin}(x)$ et $z(t) = y(x)$.

2.1. Montrer que y est solution de (E_2) sur $J \Leftrightarrow z$ est solution de (E_1) sur I .

2.2. En déduire toutes les solutions de (E_2) sur J .

A1. Soit z une fonction deux fois dérivable sur I .

On pose $\varphi(t) = \cos(t)z(t)$. Alors φ est deux fois dérivable sur I

et $\forall t \in I, \varphi'(t) = -\sin(t)z(t) + \cos(t)z'(t)$ et $\varphi''(t) = -\cos(t)z(t) - 2\sin(t)z'(t) + \cos(t)z''(t)$

Donc,

$$z \text{ sol de } (E_1) \text{ sur } I \Leftrightarrow \forall t \in I, \varphi''(t) = 0 \Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 / \forall t \in I, \varphi(t) = at + b \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{car} \\ \forall t \in J, \\ \cos(t) \neq 0 \end{matrix} \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 / \forall t \in I, z(t) = \frac{at+b}{\cos(t)}.$$

Ainsi, les solutions de (E_1) sur J sont toutes les fonctions de la forme $\left(\begin{matrix}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{at+b}{\cos(t)} \end{matrix} \right)$ tq a, b constantes réelles.

A2. Soit y une fonction deux fois dérivable sur J .

2.1 $\forall x \in J$, on pose $t = \text{Arcsin}(x)$ et $z(t) = y(x)$. Alors $t \in I$ et $z(t) = y(\sin(t))$ et $y(x) = z(\text{Arcsin}(x))$.

Donc, z est deux fois dérivable sur I .

$$\text{et } \forall x \in J, y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} z'(\text{Arcsin}(x)) \text{ et } y''(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} z'(\text{Arcsin}(x)) + \frac{1}{1-x^2} z''(\text{Arcsin}(x)) \text{ et}$$

Donc, y est solution de (E_2) sur $J \Leftrightarrow \forall x \in J, (1-x^2)y''(x) - 3xy'(x) - y(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \forall x \in J, (1-x^2) \left[\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} z'(\text{Arcsin}(x)) + \frac{1}{1-x^2} z''(\text{Arcsin}(x)) \right] - 3x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} z'(\text{Arcsin}(x)) - z(\text{Arcsin}(x)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in J, \left[\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} z'(\text{Arcsin}(x)) + z''(\text{Arcsin}(x)) \right] - 3x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} z'(\text{Arcsin}(x)) - z(\text{Arcsin}(x)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in J, \left[xz'(\text{Arcsin}(x)) + (1-x^2)^{\frac{1}{2}} z''(\text{Arcsin}(x)) \right] - 3\sin(t)z'(\text{Arcsin}(x)) - (1-x^2)^{\frac{1}{2}} z(\text{Arcsin}(x)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in I, \left[\sin(t)z'(t) + (1-\sin^2(t))^{\frac{1}{2}} z''(t) \right] - 3\sin(t)z'(t) - (1-\sin^2(t))^{\frac{1}{2}} z(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in I, [\sin(t)z'(t) + \cos(t)z''(t)] - 3\sin(t)z'(t) - \cos(t)z(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in I, \cos(t)z''(t) - 2\sin(t)z'(t) - \cos(t)z(t) = 0$$

$\Leftrightarrow z$ est solution de (E_1) sur I .

$$2.2 \text{ Donc, } y \text{ est solution de } (E_2) \text{ sur } J \Leftrightarrow \exists (a, b) \in \frac{\mathbb{R}^2}{\forall t} \in I, z(t) = \frac{at+b}{\cos(t)} \\ \Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 / \forall t \in J, y(x) = z(\text{Arcsin}(x)) = \frac{a\text{Arcsin}(x)+b}{\cos(\text{Arcsin}(x))} = \frac{a\text{Arcsin}(x)+b}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ainsi, les solutions de (E_2) sur J sont toutes les fonctions de la forme $\left(\begin{matrix}]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{a\text{Arcsin}(x)+b}{\sqrt{1-x^2}} \end{matrix} \right)$ tq a, b constantes réelles.

B. Dans cette partie, on considère f une solution de (E_2) sur J .

3. Montrer que f est de classe C^∞ sur J .

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in J, (1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+3)xf^{(n+1)}(x) - (n+1)^2f^{(n)}(x) = 0$.

5. On pose $a_n = f^{(n)}(0)$. Etablir une relation entre a_{n+2} et a_n .

6. Soit $p \in \mathbb{N}$. Exprimer a_{2p+1} et a_{2p} en fonction de respectivement $a_1 = f'(0)$ et $a_0 = f(0)$ et à l'aide de factorielles.

3. Alors, f est de la forme $\left(\begin{matrix}]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{a\text{Arcsin}(x)+b}{\sqrt{1-x^2}} \end{matrix} \right)$. Or Arcsin et $(x \mapsto \sqrt{1-x^2})$ sont de classe C^∞ sur J . De plus,

$(t \mapsto \sqrt{t})$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{++}$ et $\forall x \in J, 1-x^2 > 0$ donc $(x \mapsto \sqrt{1-x^2})$ sont de classe C^∞ sur J et ne s'annule pas sur J . Par conséquent, **f est de classe C^∞ sur J .**

4. Je sais que $\forall x \in J, \frac{(1-x^2)}{\alpha(x)} f''(x) - \frac{3x}{\beta(x)} f'(x) - f(x) = 0$. Comme $\alpha, \beta, f, f', f''$ sont de classe C^∞ sur J , je peux

appliquer Leibniz :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in J, \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^{(k)}(x) (f'')^{(n-k)}(x) \right] - \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \beta^{(k)}(x) (f')^{(n-k)}(x) \right] - f^{(n)}(x) = 0.$$

Alors, comme $\forall k \geq 3, \alpha^{(k)} = 0$ et $\forall k \geq 2, \beta^{(k)} = 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in J,$

$$\left[(1-x^2)f^{(n+2)}(x) + n(-2x)f^{(n+1)}(x) + \frac{n(n-1)}{2}(-2)f^{(n)}(x) \right] - \left[3xf^{(n+1)}(x) + 3nf^{(n)}(x) \right] - f^{(n)}(x) = 0.$$

$$\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in J, (1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+3)xf^{(n+1)}(x) - (n+1)^2f^{(n)}(x) = 0$$

5. On pose $a_n = f^{(n)}(0)$.

En prenant $x = 0 \in J$ dans la relation précédente, on a $\forall n \in \mathbb{N}, (1-0^2)f^{(n+2)}(0) - (2 \times n + 3) \times 0 \times f^{(n+1)}(0) - (n+1)^2f^{(n)}(0) = 0$.

Donc, **$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} - (n+1)^2a_n = 0$**

7. $\forall n \geq 2, a_n = (n-1)^2 a_{n-2}$ et $\forall n \geq 4, a_{n-2} = (n-3)^2 a_{n-4}$ donc $a_n = (n-1)^2 (n-3)^2 a_{n-4} (\dots)$.

Donc si $n = 2p$ est pair alors $a_n = (n-1)^2 (n-3)^2 (n-5)^2 (n-7)^2 \dots 1^2 a_0$

$$a_{2p} = (2p-1)^2 (2p-3)^2 (2p-5)^2 (2p-7)^2 \dots 1^2 a_0 = [(2p-1)(2p-3)(2p-5) \dots 3.1]^{2a_0}$$

$$a_{2p} = \left[\frac{2p(2p-1)(2p-2)(2p-3)(2p-4)(2p-5) \dots 3.2.1}{2p(2p-2)(2p-4) \dots 2} \right]^2 a_0 = \left[\frac{(2p)!}{2^p p!} \right]^2 a_0. \text{ Ainsi, } a_{2p} = \left[\frac{(2p)!}{2^p p!} \right]^2 a_0$$

Donc si n est impair alors $a_{2p+1} = (2p)^2 (2p-2)^2 (2p-4)^2 (2p-6)^2 \dots 2^2 a_1 = [2^p p!]^2 a_1$

Application au DL.

7. En appliquant le théorème de Taylor Young à une bonne solution particulière de (E_2) , déterminer le développement limité de $h: (x \rightarrow \frac{\text{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}})$ à l'ordre $2n+1$ au voisinage de 0.

8. En appliquant le théorème de Taylor Young à une bonne solution particulière de (E_2) , déterminer le développement limité de $g: (x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}})$ à l'ordre $2n$ au voisinage de 0.

9. En déduire le développement limité de Arcsin à l'ordre $2n+1$ au voisinage de 0.

7. En prenant $a = 1, b = 0$, on prouve que $h: \left(x \mapsto \frac{\text{Arcsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}} \right)$ est une solution de (E_2) .

Comme $h(0) = 0$ et $h'(0) = 1$, d'après 6., $h^{(2p+1)}(0) = a_{2p+1} = [2^p p!]^2$ et $h^{(2p)}(0) = a_{2p} = 0$.

h étant de classe C^∞ sur J , on peut appliquer Taylor-Young à h en 0 à tout ordre et on obtient alors

$$h(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o_0(x^{2n+1}) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} x^k + o_0(x^{2n+1}) = \sum_{0 \leq 2p+1 \leq 2n+1} \frac{h^{(2p+1)}(0)}{(2p+1)!} x^{2p+1} + o_0(x^{2n+1})$$

$$\frac{\text{Arcsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{p=0}^n \frac{[2^p p!]^2}{(2p+1)!} x^{2p+1} + o_0(x^{2n+1})$$

8. En prenant $a = 0, b = 1$, on prouve que $g: \left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right)$ est une solution de (E_2) .

Comme $g(0) = 1$ et $g'(0) = 0$, d'après 6., $g^{(2p+1)}(0) = 0$ et $g^{(2p)}(0) = \left[\frac{(2p)!}{2^p p!} \right]^2$.

g étant de classe C^∞ sur J , on peut appliquer Taylor-Young à g en 0 à tout ordre et on obtient alors

$$g(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k + o_0(x^{2n}) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k + o_0(x^{2n}) = \sum_{0 \leq 2p \leq 2n} \frac{f^{(2p)}(0)}{(2p)!} x^{2p} + o_0(x^{2n})$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{p=0}^n \frac{\left[\frac{(2p)!}{2^p p!} \right]^2}{(2p)!} x^{2p} + o_0(x^{2n}) = \sum_{p=0}^n \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} x^{2p} + o_0(x^{2n}) = \sum_{p=0}^n \frac{1}{4^p} \binom{2p}{p} x^{2p} + o_0(x^{2n})$$

9. g étant la dérivée de Arcsin , le théorème d'intégration terme à terme d'un DL assure que

$$\text{Arcsin}(x) = \text{Arcsin}(0) + \sum_{p=0}^n \frac{1}{4^p} \frac{\binom{2p}{p} x^{2p+1}}{2p+1} + o_0(x^{2n+1}) = \sum_{p=0}^n \frac{1}{4^p} \frac{1}{(2p+1)} \binom{2p}{p} x^{2p+1} + o_0(x^{2n+1})$$