TD 11 Suites particulières

Suites récurrentes

Ex 1 Soit u une suite réelle telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ et v la suite réelle définie par : $\begin{cases} u_0 = v_0 \\ \forall n \geq 1, v_n = \frac{v_{n-1}+u_n}{1+u_n v_{n-1}} \end{cases}$.

1. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n$ existe et $0 < v_n < 1$.
2. Justifier que v est convergente .
3. Déterminer la limite de v.

Ex 2 Soit a_0 et b_0 deux réels tels que : $0 < a_0 < b_0$ et $\forall n, a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n+b_n}$ et $b_{n+1} = \frac{b_n^2}{a_n+b_n}$

1. Montrer que la suite $a - b$ est constante.
2. Etudier la convergence des suites a et b.

Ex 3 Déterminer une forme explicite des suites récurrrentes suivantes :

1. $u_0 = 1$ et $\forall n, u_{n+1} = ne^n u_n$
2. $\forall n, \sqrt[5]{u_n}\sqrt[3]{u_{n+1}} = e.$
3. $u_0 = 1$ et $\forall n, u_{n+1} = 2u_n - n + 1.$

Ex 4 Déterminer une forme explicite des suites récurrrentes suivantes :

1. $u_0 = 1, u_1 = -1$ et $\forall n, u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n + 1$
2. $u_0 = 1, u_1 = -1$ et $\forall n, 4u_{n+2} = 4u_{n+1} + u_n + n - 1$
3. $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n, \sqrt{u_n}\sqrt{u_{n+2}} = 1.$
4. $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = 1$ et $\forall n, u_{n+2} = \frac{2(u_{n+1})^2}{u_n}.$

Suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

Ex 5 Soit $a > 0$ et u la suite définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{6}{2+u_n^2}$. Etudier la monotonie de u et l'existence et la valeur de la limite de la suite u.

Ex 6 Soit $a > 0$ et u la suite définie par : $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.

1) Etudier la monotonie de u et déterminer la limite de la suite u.
2) Soit $v_n = e^{-u_n}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n}$.
3) En déduire un équivament simple de u_n quand $n \to +\infty$, en appliquant judicieusement le théorème de Césaro.

Ex 7 Soit la suite u définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \frac{(1+2u_n)}{1+3u_n}$. Trouver un équivalent de u_n en étudiant $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.

Ex 8 Soit $a > 0$ et u la suite définie par : $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$. Etudier la monotonie de u et l'existence et la valeur de la limite de la suite u.

Ex 9 Soit la suite u définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n(1 + u_n)$.

1. Etudier la monotonie de u et l'existence et la valeur de la limite de la suite u selon la valeur de u_0.
2. On suppose que $u_0 > 0$. On pose $v_n = \frac{1}{2^n}\ln(u_n)$.

a) Montrer que v est croissante

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2^{n+1}u_n}$.

c) En déduire qu'il existe un entier N tel que : $\forall n \geq N, v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n}$.

d) En déduire que v est convergente .

Suites implicites

Ex 10

a) pour tout entier naturel n , justifier que l'équation $xe^x = n$ admet une seule solution strictement positive notée u_n.
b) Etudier la monotonie de u.
c) Déterminer la limite de u
d) Montrer que : $u_n \sim_{+\infty} \ln(n)$.

Ex 11 a) pour tout entier naturel n , justifier que l'équation $x^5 + nx = 1$ admet une seule solution notée u_n.
b) Etudier la monotonie et la limite de (u_n).
c) Montrer que : $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^5} + \frac{5}{n^{11}} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^{11}}\right)$.

Ex 12 On définit la suite x par : pour tout entier naturel n , x_n est l'unique solution dans $\mathbb{R}^{*+}$ de l'équation : $x + \ln(x) = n$.

a. Justifier que $\forall n, x_n$ est bien défini. Représenter la suite x.
b. Etudier la monotonie et la limite de la suite x.
c. Montrer que $x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.

Suites complexes

ATTENTION : si Z est un nombre complexe alors $\ln(Z)$ est une horreur !!!!!!

EX 13

1. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{sin(n)}{1+in}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{i-1}{2}\right)^n$.
2. Justifier que $((1-i)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'ont pas de limite. Représenter ces suites.
3. Soit $\alpha = \frac{1-i}{2\sqrt{2}}$. Représenter les points M_n d'affixe α^n tq $n \in \mathbb{N}$.

EX 14 Soit $z \in \mathbb{C}$. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1 + z^{2^k}\right)$. Calculer $(1-z)P_n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$ lorsque $|z| < 1$.

EX 15 $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = e^z$. (indication : chercher la forme trigonométrique puis algébrique de T_n)

EX 16 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}i$ et u_n affixe de M_n .

a) Montrer que tous les points M_n sont alignés.
b) Exprimer u_n en fonction de n. Déterminer la limite des suites $Re(u_n)$ et $Im(u_n)$.

EX 17 Soit (z_n) la suite de nombres complexes définie par : $z_0 = i$ et $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{z_n + 2(1-i)}{z_n - 3i}$ $(**)$.

On note M_n le point image de z_n.

a) Calculer z_1 et z_2 .
b) Trouver deux suites constantes égales à p et q (telles que $|p| > |q|$.)qui vérifient la même relation de récurrence $(**)$ que la suite (z_n) .
c) Montrer que la suite $\left(\frac{z_n - p}{z_n - q}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
d) En déduire z_n en fonction de n et Déterminer la limite des suites $Re(z_n)$ et $Im(z_n)$.