

# Limites et continuité d'une fonction réelle de variable réelle

## 1 RAPPELS préliminaires :

1. Tout réel est la limite d'une suite de nombres rationnels et la limite d'une suite de nombres irrationnels.
2. Si  $\lambda$  est un réel tel que :  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, 0 \leq \lambda \leq \varepsilon$  alors  $\lambda = 0$ .

**Dans tout le cours on considère une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , définie sur un domaine  $D$  contenant au moins un intervalle non trivial ( i.e. un intervalle qui contient un infinité de réels).**

## 2 Définition préliminaire :

La bornée supérieure de  $f$  sur  $D$  est  $\sup_D f = \sup(f(D)) = \sup\{f(x)/x \in D\}$ . Si  $f$  admet un maximum sur  $D$  alors, par définition, ce maximum est atteint par  $f$  et est un majorant de  $f$  et sera aussi la borne sup de  $f$  sur  $D$  : il existe  $x_0$  dans  $D$  tel que :  $f(x_0) = \max_D f = \sup_D f$ .

La bornée inférieure de  $f$  sur  $D$  est  $\inf_D f = \inf(f(D)) = \inf\{f(x)/x \in D\}$

## 3 Rappel sur les voisinages :

■ Soit  $a$  un point ou un bord réel ou infini de  $D$ .

Si  $a$  est un réel alors  $Df \cap [a - \delta, a + \delta]$  tel que  $\delta \in \mathbb{R}^{++}$  est un voisinage de  $a$  dans  $D$ .

Si  $a$  est un réel alors  $Df \cap [a, a + \delta]$  tel que  $\delta \in \mathbb{R}^{++}$  est un voisinage à droite de  $a$  dans  $D$ .

Si  $a$  est un réel alors  $Df \cap [a - \delta, a]$  tel que  $\delta \in \mathbb{R}^{++}$  est un voisinage à gauche de  $a$  dans  $D$ .

Si  $a = +\infty$  alors  $Df \cap [M, +\infty[$  tel que  $M \in \mathbb{R}^{++}$  est un voisinage de  $+\infty$  dans  $D$ .

Si  $a = -\infty$  alors  $Df \cap ]-\infty, M]$  tel que  $M \in \mathbb{R}^{-*}$  est un voisinage de  $-\infty$  dans  $D$ .

$a$  est un point ou un bord de  $Df$  non isolé lorsque tout voisinage de  $a$  dans  $D$  contient un autre réel que  $a$ .

Si  $I$  est un intervalle non trivial inclus dans  $D$  et  $a$  est un bord ou un élément de  $I$  alors  $a$  est non isolé dans  $D$ .

Si  $a$  est un point non isolé de  $D$  alors l'intersection de deux voisinages de  $a$  dans  $D$  est encore un voisinage non vide de  $a$  dans  $D$ .

Si  $a$  et  $b$  sont deux réels ou infinis distincts de  $D$  alors il existe un voisinage  $V_a$  de  $a$  et un  $V_b$  de  $b$  dans  $I$  tq  $V_a \cap V_b = \emptyset$ .

**NB :** si  $a$  est un point isolé de  $D$  alors pour  $x$  très proche et distinct de  $a$ ,  $f(x)$  n'existe pas et il est donc insensé d'étudier la limite de  $f$  en  $a$ .

**Désormais,  $a$  est un point non isolé de  $Df$ .**

**Il existe alors des réels  $x$  aussi proches de  $a$  que je le souhaite et tels que  $f(x)$  existe.**

■ Soit  $L$  un réel ou un infini. ( en utilisant la notation  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ , on écrira  $L \in \overline{\mathbb{R}}$  ).

Si  $L$  est un réel alors  $[L - \varepsilon, L + \varepsilon]$  tel que  $\varepsilon \in \mathbb{R}^{++}$  est un voisinage de  $L$  (dans  $\mathbb{R}$ ).

Si  $L = +\infty$  alors  $[A, +\infty[$  tel que  $A \in \mathbb{R}^{++}$  est un voisinage de  $L = +\infty$  (dans  $\mathbb{R}$ ).

Si  $L = -\infty$  alors  $] -\infty, B]$  tel que  $B \in \mathbb{R}^{-*}$  est un voisinage de  $L = -\infty$  (dans  $\mathbb{R}$ ).

## I Les définitions de limite d'une fonction réelle.

### 4 Définition générale

Soit  $L \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ , et  $f$  une fonction  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $a$  un point non isolé de  $D = Df$ .

On dit que  $f(x)$  tend  $L$  quand  $x$  tend vers  $a$  lorsque :

quel que soit le voisinage  $V$  de  $L$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$ , il existe un voisinage  $W$  de  $a$  dans  $Df$  tel que  $\forall x \in W, f(x) \in V$ .

Cela signifie que les réels  $f(x)$  sont aussi proches que je le souhaite de  $L$  à condition que  $x$  soit suffisamment proche de  $a$ .

5 On note  $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  ou  $L = \lim_a f$  ou  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$  et  $L$  est la limite de  $f$  en  $a$ .

(\*\*) unicité de cette limite démontrée dans la suite.

## 6 Définitions détaillées

### ■ Cas $L \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ :

$f(x)$  tend vers le réel  $L$  quand  $x$  tend vers le réel  $a$  lorsque  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \delta \in \mathbb{R}^+ / \forall x \in Df, (|x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon)$ .

$f(x)$  tend vers le réel  $L$  quand  $x$  tend vers le réel  $a$  lorsque  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \delta \in \mathbb{R}^+ / \forall x \in Df, (x \in [a - \delta, a + \delta] \Rightarrow f(x) \in [L - \varepsilon, L + \varepsilon])$ .

$f(x)$  tend vers le réel  $L$  qd  $x$  tend vers le réel  $a$  lorsque  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \delta_{(\varepsilon)} \in \mathbb{R}^+ / \forall x \in \underbrace{Df \cap [a - \delta, a + \delta]}_{\text{un voisinage de } a \text{ dans } Df}, f(x) \in \underbrace{[L - \varepsilon, L + \varepsilon]}_{\text{un voisinage de } L \text{ dans } \mathbb{R}}$ .



Cela signifie que la distance entre  $f(x)$  et  $L$  est aussi petite (proche de 0) que je le souhaite dès que la distance entre  $x$  et  $a$  est suffisamment petite (proche de 0). Graphiquement,  $C_f$  se rapproche du point  $A(a, L)$  quand  $x$  tend vers  $a$ .

### ■ Cas $L \in \mathbb{R}$ et $a = +\infty$ :

$f(x)$  tend le réel  $L$  qd  $x$  tend vers  $+\infty$  lorsque :  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists M \in \mathbb{R}^+ / \forall x \in Df, (x \geq M \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon)$ .

$f(x)$  tend le réel  $L$  qd  $x$  tend vers  $+\infty$  lorsque :  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists M \in \mathbb{R}^+ / \forall x \in \underbrace{Df \cap [M, +\infty[}_{\text{un voisinage de } +\infty \text{ dans } Df}, f(x) \in \underbrace{[L - \varepsilon, L + \varepsilon]}_{\text{un voisinage de } L \text{ dans } \mathbb{R}}$ .

Cela signifie que la distance entre  $f(x)$  et  $L$  est aussi petite (proche de 0) que je le souhaite de  $L$  dès que  $x$  est suffisamment grand. Graphiquement,  $C_f$  se rapproche de la droite d'équation  $y = L$  quand  $x$  s'approche de  $+\infty$ .



### ■ Cas $L \in \mathbb{R}$ et $a = -\infty$ :

$f(x)$  tend le réel  $L$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$  lorsque  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists M_\varepsilon \in \mathbb{R}^- / \forall x \in Df, (x \leq M \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon)$ .

$f(x)$  tend le réel  $L$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$  lorsque  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists M \in \mathbb{R}^- / \forall x \in \underbrace{Df \cap ]-\infty, M]}_{\text{un voisinage de } -\infty \text{ dans } Df}, f(x) \in \underbrace{[L - \varepsilon, L + \varepsilon]}_{\text{un voisinage de } L \text{ dans } \mathbb{R}}$ .

Cela signifie que la distance entre  $f(x)$  et  $L$  est aussi petite (proche de 0) que je le souhaite de  $L$  dès que  $x$  est suffisamment petit (très négatif). Graphiquement,  $C_f$  se rapproche de la droite d'équation  $y = L$  quand  $x$  s'approche de  $-\infty$ .

### ■ Cas $L = +\infty$ et $a \in \mathbb{R}$ :

$f(x)$  tend vers  $+\infty$  qd  $x$  tend vers le réel  $a$  lorsque  $\forall A \in \mathbb{R}^+, \exists \delta_A \in \mathbb{R}^+ / \forall x \in Df, (|x - a| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq A)$ .

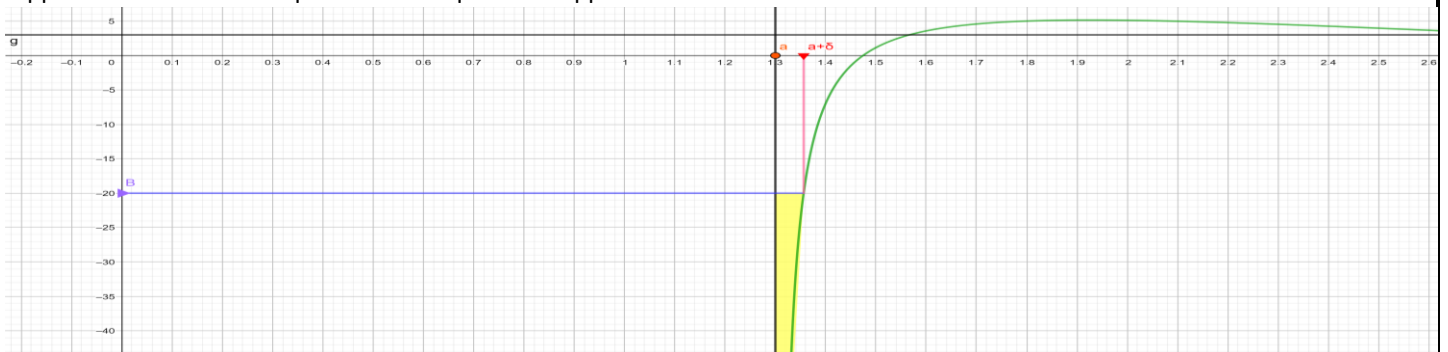
Cela signifie que  $f(x)$  est aussi grand que je le veux dès que  $x$  est suffisamment proche de  $a$ . Graphiquement,  $C_f$  se rapproche de la droite d'équation  $x = a$  quand  $x$  s'approche de  $a$ .

### ■ Cas $L = -\infty$ et $a \in \mathbb{R}$ :

$f(x)$  tend vers  $-\infty$  qd  $x$  tend vers le réel  $a$  lorsque  $\forall B \in \mathbb{R}^-, \exists \delta_{(B)} \in \mathbb{R}^+ / \forall x \in Df, (|x - a| \leq \delta \Rightarrow f(x) \leq B)$ .

$f(x)$  tend vers  $-\infty$  qd  $x$  tend vers le réel  $a$  lorsque  $\forall B \in \mathbb{R}^-, \exists \delta \in \mathbb{R}^+ / \forall x \in \underbrace{Df \cap [a - \delta, a + \delta]}_{\text{un voisinage de } a \text{ dans } Df}, f(x) \in \underbrace{]-\infty, B]}_{\text{un voisinage de } -\infty \text{ dans } \mathbb{R}}$ .

Cela signifie que  $f(x)$  est aussi proche de  $-\infty$  que je le veux dès que  $x$  est suffisamment proche de  $a$ . Graphiquement,  $C_f$  se rapproche de la droite d'équation  $x = a$  quand  $x$  s'approche de  $a$ .



**Cas  $L = +\infty$  et  $a = +\infty$ :**

$f(x)$  tend vers  $+\infty$  qd  $x$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $\forall A \in \mathbb{R}^{++}, \exists M \in \mathbb{R}^{++} / \forall x \in Df, (x \geq M \Rightarrow f(x) \geq A)$ .

Cela signifie que  $f(x)$  est aussi grand que je le veux dès que  $x$  est assez grand. Graphiquement,  $Cf$  s'éloigne vers le Nord-Est.

**Cas  $L = -\infty$  et  $a = +\infty$ :**

$f(x)$  tend vers  $-\infty$  qd  $x$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $\forall B \in \mathbb{R}^{-}, \exists M \in \mathbb{R}^{++} / \forall x \in Df, (x \geq M \Rightarrow f(x) \leq B)$ .

Cela signifie que  $f(x)$  est aussi proche de  $-\infty$  que je veux dès que  $x$  est assez grand.  $Cf$  s'éloigne vers le Sud-Est.

**Cas  $L = -\infty$  et  $a = -\infty$ :**

$f(x)$  tend vers  $-\infty$  qd  $x$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $\forall B \in \mathbb{R}^{-}, \exists M \in \frac{\mathbb{R}^{-*}}{\forall x} \in Df, (x \leq M \Rightarrow f(x) \leq B)$ .

Cela signifie que  $f(x)$  est négatif que je le veux dès que  $x$  est très négatif.  $Cf$  s'éloigne alors vers le S.O.

**Cas  $L = +\infty$  et  $a = -\infty$ :**

$f(x)$  tend vers  $-\infty$  qd  $x$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $\forall A \in \mathbb{R}^{++}, \exists M \in \mathbb{R}^{-*} / \forall x \in Df, (x \leq M \Rightarrow f(x) \geq A)$ .

Cela signifie que  $f(x)$  est aussi grand que je le veux dès que  $x$  est très négatif. Graphiquement,  $Cf$  s'éloigne vers le N.O.

**7 Exemples : 1)** Montrons avec la définition que  $\lim_{x \rightarrow -2} x^2 = 4$ .

Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}^{++}$ . Je cherche  $r \in \mathbb{R}^{++}$  tel que :  $\forall x \in [-2 - r, -2 + r], x^2 \in [4 - \varepsilon, 4 + \varepsilon]$ .

Considérons  $x \in [-4, 0]$ . Alors,  $x^2 \in [4 - \varepsilon, 4 + \varepsilon] \Leftrightarrow |x^2 - 4| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |x - 2||x + 2| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |x + 2| \leq \frac{\varepsilon}{|x - 2|}$ .

De plus,  $2 \leq |x - 2| \leq 6$  donc  $\frac{1}{|x - 2|} \leq \frac{1}{2}$ . Donc  $\frac{\varepsilon}{|x - 2|} \geq \frac{\varepsilon}{6}$ . Par suite, posons alors  $r = \min(\frac{\varepsilon}{6}, 2)$ . Alors  $r \geq |x + 2| \Rightarrow \begin{cases} x \in [-4, 0] \\ \frac{\varepsilon}{|x - 2|} \geq |x + 2| \end{cases} \Rightarrow x^2 \in [4 - \varepsilon, 4 + \varepsilon]$ .

Donc  $r = \min(\frac{\varepsilon}{6}, 2)$  convient.

2) Montrer que toute application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  périodique et admettant une limite en  $+\infty$  est constante.

Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $T$ -périodique (où  $T$  réel strictement positif) et admettant une limite  $L$  en  $+\infty$ .

Montrons que  $f$  est constante.

- Imaginons un instant que  $L$  soit infinie. Soit  $B \in \mathbb{R}^{++}$ . Il existe un réel  $A$  strictement positif tel que :  $\forall t \in [A, +\infty[, f(t) \geq B$ .

Or,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nT = +\infty$  il existe un entier naturel  $n$  tel que  $nT \in [A, +\infty[$ . Et par suite  $f(nT) \geq B$ . Or  $f$  est  $T$ -périodique, donc  $f(0) = f(nT)$ . Alors,  $f(0) \geq B$ .

J'en déduis que  $\forall B \in \mathbb{R}^{++}, f(0) \geq B$ . Donc,  $f(0)$  est un réel supérieur à tous les réels positifs..... ce qui est impossible !!!

Donc  $L$  n'est pas infinie. J'en conclus que  $L$  est finie.

- Montrons que  $f$  est constante égale à  $L$ .

Soit  $x$  un réel. Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}^{++}$ . Il existe un réel  $A$  strictement positif tel que :  $\forall t \in [A, +\infty[, |f(t) - L| \leq \varepsilon$

Or,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x + nT = +\infty$  il existe un entier naturel  $n$  tel que  $x + nT \in [A, +\infty[$ . Et par suite  $|f(x + nT) - L| \leq \varepsilon$ . Or  $f(x) = f(x + nT)$  puisque  $f$

est  $T$ -périodique. Donc,  $|f(x) - L| \leq \varepsilon$ . J'en déduis que  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{++}, |f(x) - L| \leq \varepsilon$ . Donc,  $|f(x) - L|$  est un réel positif inférieur à tous les réels strictement positifs. Cela signifie que  $|f(x) - L| = 0$  autrement dit,  $f(x) = L$ . J'en conclus que  $f$  est constante égale à  $L$ .

**8 Propriété d'unicité de la limite**

- Il y a unicité de la limite d'une fonction en un « point » donné si cette limite existe. (on dit  **$la$**  limite de  $f$  en  $a$ ).
- Si  $a \in Df$  alors  $f(a)$  est la seule limite possible de  $f$  en  $a$ .

**9 Définition d'une limite à gauche ou à droite :** Soit  $a$  un réel et  $L$  un réel ou un infini.

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$  ou  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = L$  lorsque  $\lim_{x \rightarrow a} f|_{]a, +\infty[ \cap Df}(x) = L$ .

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$  ou  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = L$  lorsque  $\lim_{x \rightarrow a} f|_{]-\infty, a[ \cap Df}(x) = L$ .

Lorsqu'elle existe,  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  est la limite à droite (**à gauche**) de  $f$  en  $a$  et elle est unique !

**Détails (exemples) :**

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \in \mathbb{R}$  lorsque  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{++}, \exists \delta \in \mathbb{R}^{++} / \forall x \in \underbrace{Df \cap ]a, a + \delta]}_{\text{voisinage à droite de } a \text{ dans } Df}, f(x) \in [L - \varepsilon, L + \varepsilon]$ .

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$  lorsque  $\forall B \in \mathbb{R}^{-}, \exists \delta \in \mathbb{R}^{++} / \forall x \in Df, (x \in [a - \delta, a[ \Rightarrow f(x) \in ] - \infty, B])$ .

**10 Exemple :** Montrons avec cette définition que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2-x}{x-1} = -\infty$ .

Soit  $A < 0$ . Je cherche  $r > 0$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, (0 < 1 - x \leq r \Rightarrow \frac{2-x}{x-1} < A)$ .

Soit  $x$  un réel tel que  $0 < x < 1$ . Alors,  $\frac{2-x}{x-1} < A (< 0) \Leftrightarrow \frac{2-x}{1-x} > -A (> 0) \Leftrightarrow \frac{1-x}{2-x} < \frac{-1}{A} \Leftrightarrow 1 - x < \frac{-1}{A}(2 - x)$ .

Or,  $0 > 2 - x > 1$  et  $0 > \frac{-1}{A}(2 - x) > \frac{-1}{A}$ . Posons donc  $r = \min(1, \frac{-1}{A})$ .

Alors  $0 < 1 - x < r \Rightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 1 - x < \frac{-1}{A}(2 - x) \end{cases} \Rightarrow \frac{2-x}{x-1} < A$ . Donc  $r = \min(1, \frac{-1}{A})$  convient. J'en conclus que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2-x}{x-1} = -\infty$ .

**9 Définition d'une limite par valeurs supérieures :** Soit  $L$  un réel.

La notation  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L^+$  (resp.  $L^-$ ) lorsque  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  et sur un voisinage de  $a$ ,  $f(x) > L$  (resp.  $f(x) < L$ ). On dit que  $f$  tend vers  $L$  en  $a$  par valeurs supérieures ( resp. inférieures)

# II Caractère borné et caractérisations.

## 1. Caractère borné

### 11 Caractère borné

- Si  $f$  a une limite finie  $L$  en  $a$  alors  $f$  est bornée sur un voisinage de  $a$  dans  $Df$  et pour tous réels  $u$  et  $v$  tels que :  $u < L < v$ , il existe un voisinage  $V$  de  $a$  tel que :  $\forall x \in V, u < f(x) < v$ .
- Si  $f$  tend vers une limite strictement positive (respectivement négative) en  $a$  alors  $f$  est strictement (négative) positive sur un voisinage de  $a$  dans  $Df$ . (la réciproque est fautive)
- Une fonction ayant une limite  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) « quelque part » n'est pas majorée (resp. minorée).

**12 Exemples :** Soit  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs. Montrer qu'il existe un réel  $A$  tel que :  $\forall x > A, \left(\frac{\frac{1}{a^x+b^x}}{2}\right)^x \in \left[\frac{\sqrt{ab}}{2}, \frac{3\sqrt{ab}}{2}\right]$ .

Étudions la limite de  $f(x) = \left(\frac{\frac{1}{a^x+b^x}}{2}\right)^x$  quand  $x \rightarrow +\infty$  : Tout d'abord,  $f(x) = \left(\frac{\frac{1}{a^x+b^x}}{2}\right)^x \stackrel{\text{car } \frac{a^x+b^x}{2} > 0}{=} e^{x \ln\left(\frac{\frac{1}{a^x+b^x}}{2}\right)}$ . Posons  $h(x) = x \ln\left(\frac{\frac{1}{a^x+b^x}}{2}\right)$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{a^x+b^x}}{2} = 1$  et  $\ln(t) \sim_1(t-1)$ ,  $h(x) = x \ln\left(\frac{\frac{1}{a^x+b^x}}{2}\right) \sim_{+\infty} x \left[\frac{\frac{1}{a^x+b^x}}{2} - 1\right]$ .

De plus,  $\frac{\frac{1}{a^x+b^x}}{2} - 1 = \frac{e^{-\frac{\ln(a)}{x}} + e^{-\frac{\ln(b)}{x}} - 2}{2} = \frac{1 + \frac{\ln(a)}{x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) + 1 + \frac{\ln(b)}{x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) - 2}{2} = \frac{\frac{\ln(ab)}{x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)}{2}$

Ainsi,  $\frac{\frac{1}{a^x+b^x}}{2} - 1 = \frac{\ln(ab)}{2x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$ . Donc,  $x \left[\frac{\frac{1}{a^x+b^x}}{2} - 1\right] = \frac{\ln(ab)}{2} + o_{+\infty}(1)$ . Et par conséquent,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{\frac{1}{a^x+b^x}}{2} - 1\right] = \frac{\ln(ab)}{2}$ .

Alors,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^{\frac{\ln(ab)}{2}} = e^{\ln(\sqrt{ab})} = \sqrt{ab}$ . Comme  $\frac{\sqrt{ab}}{2} < \sqrt{ab} < \frac{3\sqrt{ab}}{2}$  (puisque  $\sqrt{ab} > 0$ ), il existe donc un réel  $A$  tel que :  $\forall x > A, \left(\frac{\frac{1}{a^x+b^x}}{2}\right)^x \in \left[\frac{\sqrt{ab}}{2}, \frac{3\sqrt{ab}}{2}\right]$ .

## 2. Caractérisations

### 13 Caractérisation d'une LIMITE FINIE Ici $L$ est un réel.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0 \Leftrightarrow f(x) = L + o_a(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} |f(x) - L| = 0$$

$\Leftrightarrow$  il existe une fonction  $h$  telle que pour tout  $x$  de  $Df$  au voisinage de  $a$ ,  $|f(x) - L| \leq h(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0$

### 14 Caractérisation par la limite à droite et à gauche

Ici  $a$  désigne un réel non isolé, bord ou élément de  $Df$  tel que  $\forall r > 0, ]a, a+r[ \cap Df \neq \emptyset$  et  $]a-r, a[ \cap Df \neq \emptyset$ . Soit  $L \in \overline{\mathbb{R}}$ .

**1<sup>er</sup> cas  $a \notin Df$ .** Alors,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ .

**2<sup>er</sup> cas  $a \in Df$ .** Alors,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow L = f(a)$  et  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \Leftrightarrow f$  est continue en  $a$ .

### 15 Exemples :

1) Étudier la limite de  $h(x) = \frac{|1-2x|}{2-\sqrt{8x}}$  quand  $x \rightarrow \frac{1}{2}$ .

$$\forall x > \frac{1}{2}, \frac{|1-2x|}{2-\sqrt{8x}} = \frac{2x-1}{2-2\sqrt{2x}} = \frac{1}{2} \frac{2x-1}{1-\sqrt{2x}} = \frac{1}{2} \frac{(\sqrt{2x}-1)(\sqrt{2x}+1)}{1-\sqrt{2x}} = -\frac{1}{2} (\sqrt{2x}+1) \xrightarrow{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} -1.$$

$$\forall x \in ]0, \frac{1}{2}[, \frac{|1-2x|}{2-\sqrt{8x}} = -\frac{2x-1}{2-2\sqrt{2x}} = -\frac{1}{2} \frac{2x-1}{1-\sqrt{2x}} = -\frac{1}{2} \frac{(\sqrt{2x}-1)(\sqrt{2x}+1)}{1-\sqrt{2x}} = \frac{1}{2} (\sqrt{2x}+1) \xrightarrow{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} 1. \text{ Donc la limite de } h \text{ en } \frac{1}{2} \text{ n'existe pas.}$$

2) Étudier les limites de  $g(x) = \frac{|x|}{x}$  en  $0^+$  et en  $0^-$  et en  $+\infty$ .

$$\forall x \in ]0, 1[, |x| = 0 \text{ donc } \frac{|x|}{x} = 0 \text{ et par suite, } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 0.$$

$$\forall x \in ]-1, 0[, |x| = -1 \text{ donc } \frac{|x|}{x} = -\frac{1}{x} \text{ et par suite, } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -\infty. \text{ Donc la limite de } g \text{ en } 0 \text{ n'existe pas.}$$

3) Existe un réel  $L$  tel que  $f: \begin{cases} x \mapsto \begin{cases} \frac{(1+x)^{\frac{\ln(x)}{x}} - x}{x^2 \ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ L & \text{si } x = 0 \\ \frac{(\sin x)^{1/x^2}}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{cases}$  soit continue en  $0$  ?

$$\frac{(1+x)^{\frac{\ln(x)}{x}} - x}{x^2 \ln(x)} = \frac{e^{\frac{\ln(x)}{x} \ln(1+x)} - x}{x^2 \ln(x)} = \frac{e^{\frac{\ln(x)}{x} (x - \frac{x^2}{2} + o_0(x^2))} - x}{x^2 \ln(x)} = \frac{e^{\ln(x)(1 - \frac{x}{2} + o_0(x))} - x}{x^2 \ln(x)} = \frac{e^{\ln(x) - \frac{x \ln(x)}{2} + o_0(x \ln(x))} - x}{x^2 \ln(x)} = \frac{x e^{\frac{x \ln(x)}{2} + o_0(x \ln(x))} - x}{x^2 \ln(x)} =$$

$$\frac{e^{-\frac{x \ln(x)}{2} + o_0(x \ln(x))} - 1}{x \ln(x)} \underset{\sim 0}{\sim} \frac{\left[\frac{-x \ln(x)}{2} + o_0(x \ln(x))\right]}{x \ln(x)} \underset{\sim 0}{\sim} -\frac{1}{2}. \text{ Donc, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{\ln(x)}{x}} - x}{x^2 \ln(x)} = -\frac{1}{2}. \text{ Donc si } L \text{ existe alors } L = -\frac{1}{2}.$$

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} = e^{\frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)} = e^{\frac{1}{x^2} \ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + o_0(x^2)\right)} = e^{\frac{1}{x^2} \left(-\frac{x^2}{6} + o_0(x^2)\right)} = e^{-\frac{1}{6} + o_0(1)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{6}}. \text{ Donc si } L \text{ existe alors } L = e^{-\frac{1}{6}} = -\frac{1}{2}. \text{ Ainsi } L \text{ n'existe pas.}$$

### 16 Théorème de caractérisation séquentielle de la limite TCSL

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \text{toute suite } (u_n) \text{ de nombres réels telle que } \begin{cases} \forall n, u_n \in Df \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a \end{cases} \text{ vérifie } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = L.$$

### 17 APPLICATIONS :

1) Au calcul de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n)$ . si  $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \end{cases}$  alors « par composition » ou par (TCSL  $\Rightarrow$ ),  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = L$ .

2) Pour montrer qu'une fonction  $f$  ne tend pas vers  $L$  en  $a$ , il suffit de trouver une suite  $(u_n)$  telle que  $\forall n, u_n \in Df$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) \neq L$  par (TCSL $\Leftarrow$ ).

3) Pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite en  $a$ , il suffit de trouver deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  nombres réels telle que  $\forall n, u_n \in Df, v_n \in Df$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n)$  par (TCSL $\Leftarrow$ ).

**18 Exemples :** 1) Justifier que sinus, cosinus et tangente et cotangente n'ont pas de limite en  $\pm\infty$ .

$(2n\pi)$  et  $(2n\pi + \frac{\pi}{4})$  sont deux suites qui tendent vers  $+\infty$ . Or,  $\cos(2n\pi) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$  et  $\cos(2n\pi + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Comme  $\frac{\sqrt{2}}{2} \neq 1$ , j'en déduis que  $\cos$  n'a pas de limite en  $+\infty$ .

2) Démontrer que  $f: \left( x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right) & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases} \right)$  n'a pas de limite en 1.

Comme  $f(1)$  existe, la seule limite possible de  $f$  en 1 est  $f(1) = 0$ . Montrons que  $f$  ne tend pas vers 0 en 1.

Cherchons une suite  $(u_n)$  telle que  $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1^+ \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) \neq 0 \end{cases}$ . Et pour cela on va construire une suite  $(u_n)$  telle que  $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 \\ f(u_n) = \frac{1}{2} \end{cases}$

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{u_n-1}}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{u_n-1}} = \frac{\pi}{6} + 2n\pi \Leftrightarrow \frac{1}{u_n-1} = \left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right)^2 \Leftrightarrow u_n - 1 = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right)^2} \Leftrightarrow u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right)^2}$$

Posons  $u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right)^2}$ . Alors,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$  et  $\forall n, f(u_n) = \frac{1}{2}$ . Donc,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) \neq 0$ . J'en déduis que  $f$  ne peut pas tendre vers 0 en 1 donc  $f$  n'a pas de limite en 1.

3) Soit  $f(x) = (-1)^{|x|}$ . Montrer que  $f$  n'a pas de limite en  $+\infty$ .

$f(2n) = (-1)^{2n} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$  et  $f(2n+1) = (-1)^{2n+1} = -1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n = +\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n+1$ , je peux affirmer que  $f$  n'a pas de limite en  $+\infty$ .

### III Propriétés

**19 Théorème d'opérations sur les limites :** Soit  $b, f$  et  $g$  des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définies sur un même voisinage de  $a$  réel ou infini. On suppose que  $b$  est bornée et  $f$  et  $g$  ont chacune une limite en  $a$ .

Soit  $L$  et  $L'$  réels ou infinis tels que  $\lim_{t \rightarrow a} f(t) = L$  et  $\lim_{t \rightarrow a} g(t) = L'$ .

Soit un réel non nul  $\alpha$  indépendant de  $t$ .

a.  $|f|$  et  $\alpha f$  ont une limite en  $a$  et  $\lim_{t \rightarrow a} |f(t)| = |L|$  et  $\lim_{t \rightarrow a} \alpha f(t) = \alpha L$ .

b. Si  $L = 0$  alors  $\lim_{t \rightarrow a} b(t)f(t) = 0$ .

c. Si  $L = \pm\infty$  alors  $\lim_{t \rightarrow a} b(t) + f(t) = \pm\infty$ .

d. Si  $L + L'$  n'est pas une forme indéterminée (« FI ») alors  $f + g$  a une limite en  $a$  et  $\lim_{t \rightarrow a} f(t) + g(t) = L + L'$ .

e. Si  $L \times L'$  n'est pas une forme indéterminée alors  $f g$  a une limite en  $a$  et  $\lim_{t \rightarrow a} f(t) \times g(t) = L \times L'$ .

f. Si  $\frac{L}{L'}$  n'est pas une forme indéterminée et  $\frac{1}{g}$  définie au voisinage de  $a$  alors  $\frac{f}{g}$  a une limite en  $a$  et  $\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{L}{L'}$ .

**20 NB :**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f^2(x) = 0$ . Ce résultat est faux si la limite est non nulle.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|$ . Mais la réciproque est fautive. Contre-exemple :  $f(x) = (-1)^{|x|}$ .

**21 Généralisation limite d'une somme finie ou d'un produit fini de fonctions admettant des limites :**

Si  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lim_{t \rightarrow a} f_k(t) = L_k$  et  $\sum_{k=1}^n L_k$  n'est pas une FI alors  $\lim_{t \rightarrow a} \sum_{k=1}^n f_k(t) = \sum_{k=1}^n L_k$ .

Si  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lim_{t \rightarrow a} f_k(t) = L_k$  et  $\prod_{k=1}^n L_k$  n'est pas une FI alors  $\lim_{t \rightarrow a} \prod_{k=1}^n f_k(t) = \prod_{k=1}^n L_k$ .

**22 Application aux fonctions polynômes :** si  $n \in \mathbb{N}$  et  $a, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}$  tq  $b_n \neq 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} \sum_{k=0}^n b_k x^k = \sum_{k=0}^n b_k a^k$  et  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sum_{k=0}^n b_k x^k = \begin{cases} \text{sgn}(b_n) \infty & \text{si } n \geq 1 \\ b_0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$ .

**23 Théorème de limite d'une fonction composée**

Soit  $\varphi$  une fonction telle que  $f \circ \varphi$  est définie sur un voisinage de  $a$ .

Si  $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow a} \varphi(t) = b \\ \lim_{x \rightarrow b} f(x) = L \end{cases}$  alors  $f \circ \varphi$  a une limite en  $a$  et  $\lim_{t \rightarrow a} f(\varphi(t)) = L$ .

**24 Théorème de Changement de variable pour se ramener à une limite en 0 :**

a. Ici  $a$  est un réel. Posons  $t = x - a$  et  $g(t) = f(x) = f(t + a)$ .

Alors,  $\lim_{t \rightarrow 0} g(t)$  existe et vaut  $L$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe et vaut  $L$ .

b. Ici  $a = \pm\infty$ . Posons  $t = \frac{1}{x}$  et  $g(t) = f(x) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ .

Alors,  $\lim_{t \rightarrow 0^+ (0^-)} g(t)$  existe et vaut  $L$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow +\infty (-\infty)} f(x)$  existe et vaut  $L$ .

**25 Théorème de limite par encadrement:** Soit  $L$  un réel.

- a. Si  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  au voisinage de  $a$  et  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$  alors  $g$  a une limite en  $a$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ .
- b. Si  $f(x) \leq g(x)$  au voisinage de  $a$  et  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  alors  $g$  a une limite en  $a$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ .
- c. Si  $f(x) \geq g(x)$  au voisinage de  $a$  et  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  alors  $g$  a une limite en  $a$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ .

**25bis Exercices :** Etudier la limite de  $g(x) = \frac{|x|}{x}$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ . $\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 < |x| \leq x$ . Par conséquent,Si  $x > 0$ ,  $1 - \frac{1}{x} < \frac{|x|}{x} \leq 1$ . Les deux expressions qui encadrent  $g(x)$  tendent vers 1 en  $+\infty$ , j'en déduis que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ .Si  $x < 0$ ,  $1 - \frac{1}{x} > \frac{|x|}{x} \geq 1$ . Les deux expressions qui encadrent  $g(x)$  tendent vers 1 en  $-\infty$ , j'en déduis que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$ .J'en déduis que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$ .**26 Théorème de limite d'une fonction monotone**Soit  $a$  et  $b$  deux réels ou infinis tq  $a < b$ .Si  $f$  est une fonction définie et monotone sur  $]a, b[$  alors

1.  $f$  admet une limite en  $a^+$  et une limite en  $b^-$  qui sont, non respectivement (cela dépend du sens de monotonie de  $f$ ),  $\inf_{]a,b[} f$  et  $\sup_{]a,b[} f$  et éventuellement infinies. Plus précisément,

$$\begin{cases} f \text{ croissante} \\ f \text{ majorée sur } ]a, b[ \\ f \text{ minorée} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1 = \inf_{]a,b[} f \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = L_2 = \sup_{]a,b[} f \in \mathbb{R} \\ \forall x \in ]a, b[, L_1 \leq f(x) \leq L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f \text{ décroissante} \\ f \text{ non majorée sur } ]a, b[ \\ f \text{ minorée} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \sup_{]a,b[} f = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \inf_{]a,b[} f = L_2 \in \mathbb{R} \text{ OU } (\dots) \\ \forall x \in ]a, b[, L_2 \leq f(x) \end{cases}$$

2.  $f$  admet, en tout réel  $c$  de  $]a, b[$ , des limites finies en  $c^+$  et en  $c^-$  et  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \text{ si } f \text{ croissante} \\ \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \geq f(c) \geq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \text{ si } f \text{ décroissante} \end{cases}$

**27 Théo de passage à la limite dans une inégalité :**Si  $f$  et  $g$  tendent vers respectivement  $L_1$  et  $L_2$  en  $a$  et que sur un voisinage de  $a$ ,  $f(x) \leq g(x)$  alors  $L_1 \leq L_2$ .**28 NB :** ce théorème ne permet pas de prouver l'existence de limites, il permet juste de comparer des limites dont je connais déjà l'existence**29 QUELQUES OUTILS :**Utiliser les symétries de  $Cf$ 

Utiliser les limites à droite et à gauche

Repérer une suite bornée

Encadrer

Mettre les termes dominants en facteurs dans le  $\ln$ , sous une racineFaire apparaître des croissances comparées ( $FI \frac{\infty}{\infty}$  ou  $0 \times \infty$ ).Factoriser par  $(x - a)$  quand on cherche une limite en un réel  $a$  de deux quotients de polynômes (ou presque) s'annulant en  $a$ . ( $FI \frac{0}{0}$ )Faire apparaître des taux d'accroissement ( $FI: \frac{0}{0}$ )

Utiliser la quantité conjuguée ou tout autre propriété de fonction

Faire apparaître un taux d'accroissement

Utiliser les équivalents et les développements limités usuels

Utiliser les suites pour prouver qu'une fonction n'a pas de limite quelque part !

**30 Exercices :**

1. Calculons les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right), \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4-16}{\sqrt{x^3+8}} \text{ et } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(x+1)}{\sqrt{1-x^2}} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\tan(3x)}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^4-x+1}}{4-3x^2}, \lim_{x \rightarrow -\infty} x + e^{\frac{1}{x}} \sqrt{x^2-x+2}, \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\ln(\sin(x))}\right) \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(x)}{(1+x)^x - x}}{x^2 \ln(x)}, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln(3 + \cos(x)) \sin\left(\frac{1}{x}\right), \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\operatorname{ch}(x)} - \sqrt{\operatorname{sh}(x)}.$$

2. Etudier les limites en 0 et en
- $\pm\infty$
- de
- $f(x) = \frac{|x|}{x}$
- .

3. Etudier la limite en 0 de
- $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$
- .

## IV Continuité

**31 Définitions :** Ici  $a \in Df$  et  $a$  non isolé dans  $Df$ . Et  $D$  un sous ensemble de  $\mathbb{R}$  (ou de  $Df$ ).

1.  $f$  est continue en  $a$  lorsque  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  (i.e. lorsque  $f$  a une limite en  $a$ ).
2.  $f$  est continue à droite en  $a$  lorsque  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ .
3.  $f$  est continue à gauche en  $a$  lorsque  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ .
4.  $f$  est continue sur  $D$  lorsque  $f$  est continue en tout point de  $D$ .

**32 NB :** Le domaine de continuité de  $f$  i.e. le domaine sur lequel  $f$  est continue est inclus dans  $Df$ .

**33 Interprétation graphique :**

- $f$  est continue en  $a$  lorsque la courbe de  $f$  passe par le point  $A(a, f(a))$  et que  $Cf$  est ininterrompue au voisinage de  $A$ .
- **Attention**, si  $D$  n'est pas un intervalle et  $f$  est continue sur  $D$  alors la courbe de  $f$  s'interrompt à chaque trou de  $D$ .

**34 Caractérisations et propriétés :**

1. Si  $f$  est continue en  $a$  alors  $f$  est bornée sur un voisinage de  $a$  dans  $Df$ .
2.  $f$  est continue en  $a$  si et si  $f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  si et si  $f$  est continue à droite et à gauche en  $a$ .
3.  $f$  est continue en  $a$  si et si pour toute suite  $u$  telle que  $\begin{cases} \forall n, u_n \in Df \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a \end{cases}$ , on a:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(a)$ .
4.  $f$  n'est pas continue en  $a$  dès qu'il existe une suite  $u$  telle que :  $\begin{cases} \forall n, u_n \in Df \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) \neq f(a) \end{cases}$ .

**Théorème d'opérations sur les fonctions continues :**

- a. Une combinaison linéaire de deux fonctions continues sur un domaine  $D$  est continue sur  $D$ .
- b. Le produit de deux fonctions continues sur un domaine  $D$  est continue sur  $D$ .
- c. Le quotient de deux fonctions continues sur un domaine  $D$  est continue sur  $D$  dès que la fonction du dénominateur ne s'annule jamais sur  $D$ .
- d. La valeur absolue d'une fonction continue sur  $D$  est continue sur  $D$ .
- e. Si  $f$  est continue sur  $D$  et  $g$  est continue sur  $E$  et  $\forall x \in D, f(x) \in E$ , alors la composée  $g \circ f$  est continue sur  $D$ .

**Conséquence :** toute fonction dont l'expression n'est constituée que de fonctions continues sur leur domaine de définition respectif est continue sur son propre domaine de définition.

**35 Continuité d'autres fonctions usuelles.** Les fonctions identité, puissances (entières, rationnelles et réelles), racine carrée, cosinus, sinus, Arcsinus, Arccosinus, Arctangente, racine nième, logarithme et exponentielle, les fonctions, polynomiales, tangente, cotangente, valeur absolue, sont continues sur leur domaine de définition respectif.

La fonction partie entière est continue uniquement sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

**Parmi nos fonctions usuelles, seule la partie entière n'est pas continue sur tout son domaine de définition.**

**36 NB :** il n'existe aucun théorème d'opérations entre une fonction  $h$  non continue sur tout son domaine de définition et une fonction continue sur son domaine de définition. Il faudra étudier point par point la continuité. Les deux exercices précédents illustrent qu'on ne peut rien conclure avant étude !

**37 Exercices :**

1. Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application telle que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| < \sqrt{|x - y|}$ . Montrer que  $f$  est continue.

Soit  $a$  un réel.  $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq |f(x) - f(a)| < \sqrt{|x - a|}$ . Comme  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{|x - a|} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x) - f(a)| = 0$  ce qui signifie que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

J'en conclus que  $f$  est continue en  $a$ . Et finalement,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

2. Montrer que  $f$  définie par  $f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

$\forall x \in \mathbb{R}, x \geq [x]$  donc  $f(x)$  existe. Ainsi,  $Df = \mathbb{R}$ .

Dans l'expression de  $f$ , seule la fonction partie entière n'est pas continue sur tout son domaine de définition. Cette fonction partie entière n'est continue que sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ . Par conséquent,  $f$  est continue au moins sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ . (ou bien considérons  $a$  un réel non entier.

$\forall x \in ]a, [a] + 1[, f(x) = [a] + \sqrt{x - [a]}$ . Donc,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = [a] + \sqrt{a - [a]} = f(a)$ . J'en déduis que  $f$  est continue en  $a$ .)

Soit  $a$  un entier relatif.

$\forall x \in ]a, a + 1[, f(x) = a + \sqrt{x - a}$ . Donc,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a + \sqrt{a - a} = a = f(a)$ . J'en déduis que  $f$  est continue à droite en  $a$ .

$\forall x \in ]a - 1, a[, f(x) = a - 1 + \sqrt{x - (a - 1)}$ . Donc,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a - 1 + \sqrt{a - (a - 1)} = a - 1 + \sqrt{1} = a = f(a)$ . J'en déduis que  $f$  est continue à gauche en  $a$ . Ainsi,  $f$  est continue en  $a$ . J'en déduis que  $f$  est continue en tout point de  $\mathbb{R}$ .

3. Pour quelles valeurs réelles de  $a, b$  et  $c$ , la fonction  $f$  est-elle continue sur  $\mathbb{R}$  où  $f: x \mapsto \begin{cases} \frac{ax+1}{x^3+8} & \text{si } x \in ]-\infty; -2[ \\ bx & \text{si } x \in [-2; 2] \\ \frac{\sin(2-x)}{x^2-4} + c & \text{si } x \in ]2; +\infty[ \end{cases}$  ?

Posons  $g(x) = \frac{ax+1}{x^3+8}$  et  $p(x) = bx$  et  $h(x) = \frac{\sin(2-x)}{x^2-4} + c$ .

$g$  est définie et continue sur  $] -\infty; -2[$ ,  $p$  est définie et continue sur  $[-2; 2]$  et  $h$  est définie et continue sur  $]2; +\infty[$ . J'en déduis que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et continue au moins sur  $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$  et  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} p(x) = p(2) = 2b$  et  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} p(x) = p(2) = -2b$ .

Étudions les limites de  $f$  en  $2^+$  et  $(-2)^-$  :

$\forall x < -2, \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{ax+1}{x^3+8} = \begin{cases} \infty & \text{si } -2a + 1 \neq 0 \\ \text{Fl} & \text{si } -2a + 1 = 0 \end{cases}$ . Donc pour que  $f$  soit continue en  $(-2)$  il faut que  $a = \frac{1}{2}$ . Est-ce suffisant ?

$\frac{\frac{1}{2}x+1}{x^3+8} = \frac{\frac{1}{2}(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{1}{2(x^2-2x+4)}$  donc  $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{\frac{1}{2}x+1}{x^3+8} = \frac{1}{24}$ . Donc pour que  $f$  soit continue en  $(-2)$ , il faut et il suffit que  $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ -2b = \frac{1}{24} \end{cases}$  i.e.  $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{48} \end{cases}$ .

Désormais  $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{48} \end{cases}$ .

$\forall x > 2, \frac{\sin(2-x)}{x^2-4} + c = -\frac{\sin(2-x)}{(2-x)(x+2)} + c = -\frac{1}{x+2} \frac{\sin(2-x)}{(2-x)} + c$  donc  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sin(2-x)}{x^2-4} + c = -\frac{1}{4} + c$ .

Donc pour que  $f$  soit continue en  $2$ , il faut et il suffit que  $-\frac{1}{4} + c = 2b = -\frac{1}{24}$  i.e.  $c = \frac{1}{4} - \frac{1}{24} = \frac{5}{24}$ .

J'en conclus que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{48} \\ c = \frac{5}{24} \end{cases}$ .

4. Déterminer le domaine de continuité de  $f: (x \mapsto \lfloor 2x - 1 \rfloor)$ .

$Df = \mathbb{R}$ . Dans l'expression de  $f$ , seule la fonction partie entière n'est pas continue sur tout son domaine de définition. Cette fonction partie entière n'est continue que sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

De plus,  $2x - 1 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z} / 2x - 1 = p \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z} / x = \frac{p+1}{2} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / x = \frac{k}{2}$ . Donc  $2x - 1 \notin \mathbb{Z} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z} / x \neq \frac{k}{2}$ .

J'en déduis que  $f$  est continue au moins sur  $\mathbb{R} \setminus \{\frac{k}{2} / k \in \mathbb{Z}\}$ .

Soit  $k \in \mathbb{Z}$ . Étudions la continuité de  $f$  en  $\frac{k}{2}$ . On sait que  $f(\frac{k}{2}) = \lfloor k - 1 \rfloor = k - 1$ .

Or,  $\forall x \in ]\frac{k-1}{2}, \frac{k}{2}[$ ,  $2x \in ]k-1, k[$  et  $2x - 1 \in ]k-2, k-1[$  donc  $f(x) = k-2 \neq f(\frac{k}{2})$ . Donc  $f$  n'est pas continue à gauche en  $\frac{k}{2}$ . Ainsi,  $f$

n'est pas continue en  $\frac{k}{2}$ . J'en conclus que  $f$  est continue uniquement sur  $\mathbb{R} \setminus \{\frac{k}{2} / k \in \mathbb{Z}\}$ .

5. Déterminer toutes les fonctions continues en 0 et telles que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$ .

Les fonctions constantes sont solutions.

Soit  $f$  un solution de notre problème i.e.  $f$  est continue en 0 et telle que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$ . Alors,  $\forall X \in \mathbb{R}, f(X) \stackrel{(*)}{=} f(\frac{X}{2})$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .  $f(x) \stackrel{(*)}{=} f(\frac{x}{2}) \stackrel{(*)}{=} f(\frac{x}{2^2}) = f(\frac{x}{2^2}) \stackrel{(*)}{=} f(\frac{x}{2^3}) = f(\frac{x}{2^3}) \stackrel{(*)}{=} \dots \stackrel{(*)}{=} f(\frac{x}{2^n})$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Donc la suite  $(f(\frac{x}{2^n}))_{n \in \mathbb{N}}$  est constante égale à  $f(x)$  donc sa limite quand  $n \rightarrow +\infty$  est  $f(x)$ .

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{2^n} = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = f(0)$ , le TCSL (ou la composition) assure que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(\frac{x}{2^n}) = f(0)$ . Alors par unicité de la limite d'une suite,  $f(x) = f(0)$ . Ainsi,  $f$  est constante.

J'en conclus que les fonctions constantes sont les solutions de notre problème.

6. Soit  $D$  une partie de  $\mathbb{R}$  telle que : tout réel est la limite d'une suite d'éléments de  $D$ . On considère  $f$  et  $g$  deux applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , continues et qui vérifient :  $\forall d \in D, f(d) = g(d)$ . Montrons :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)$  i.e.  $f = g$ .

Soit  $x$  un réel. Alors il existe une suite  $(d_n)$  d'éléments de  $D$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = x$ . Alors  $\forall n, f(d_n) = g(d_n)$ .

Comme  $\lim_{t \rightarrow x} f(t) = f(x)$  (puisque  $f$  est continue en  $x$ ) et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = x$ , le TCSL assure que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(d_n) = f(x)$ . De même,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(d_n) = g(x)$ . Et par suite,  $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(d_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(d_n) = g(x)$ . Ainsi,  $f = g$ .

7. Soit  $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x^2 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ . Montrer que  $f$  n'est continue qu'en 0 et en 1.

• Soit  $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0, 1\}$ . Alors  $f(a) = a$ .

D'après le cours (chap Suites, paragraphe suites extraites), il existe une suite  $(y_n)$  d'éléments de  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  qui tend vers  $a$ . Alors  $\forall n, f(y_n) = y_n^2$  et par conséquent,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) = a^2 \neq a = f(a)$ . Donc, le TCSL assure que  $f$  ne peut pas tendre vers  $f(a)$  en  $a$ ; autrement dit,  $f$  n'est pas continue en  $a$ .

• Soit  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Alors  $f(a) = a^2$ .

D'après le cours (chap Suites, paragraphe suites extraites), il existe une suite  $(x_n)$  d'éléments de  $\mathbb{Q}$  qui tend vers  $a$ . Alors  $\forall n, f(x_n) = x_n$  et par conséquent,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = a \neq a^2 = f(a)$ . Donc, le TCSL assure que  $f$  ne peut pas tendre vers  $f(a)$  en  $a$ ; autrement dit,  $f$  n'est pas continue en  $a$ .

• Soit  $a = 1$ . Alors  $f(a) = 1$ . Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$ , il existe  $r_1 \in \mathbb{R}^{+*}$  tel que :  $\forall x \in [1 - r_1, 1 + r_1], |x^2 - 1| \leq \varepsilon$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow 1} x = 1$ , il existe  $r_2 \in \mathbb{R}^{+*}$  tel que :  $\forall x \in [1 - r_2, 1 + r_2], |x - 1| \leq \varepsilon$ . ( $r_2 = \varepsilon$  convient)

Posons  $r_0 = \min(r_1, r_2)$ . Alors :  $\forall x \in [1 - r_0, 1 + r_0], |x^2 - 1| \leq \varepsilon$  et  $|x - 1| \leq \varepsilon$  donc  $|f(x) - 1| \leq \varepsilon$ .

Cela prouve que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 = f(1)$ . Ainsi,  $f$  est continue en 1.

• Soit  $a = 0$ . Alors  $f(a) = 0$ . Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ , il existe  $r_1 \in \mathbb{R}^{+*}$  tel que :  $\forall x \in [-r_1, r_1], |x^2| \leq \varepsilon$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ , il existe  $r_2 \in \mathbb{R}^{+*}$  tel que :  $\forall x \in [-r_2, r_2], |x| \leq \varepsilon$ . ( $r_2 = \varepsilon$  convient)

Posons  $r_0 = \min(r_1, r_2)$ . Alors :  $\forall x \in [-r_0, r_0], |x^2| \leq \varepsilon$  et  $|x| \leq \varepsilon$  donc  $|f(x) - 0| \leq \varepsilon$ . Cela prouve que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ . Ainsi,  $f$  est continue en 0.

J'en conclus que  $f$  n'est continue qu'en 0 et en 1.



**38 Définition :** Soit  $a$  un réel au bord non isolé de  $Df$  mais n'appartenant pas à  $Df$ .  $f$  est prolongeable par continuité en  $a$  lorsque  $f$  a une limite finie  $L$  en  $a$ . La fonction  $\tilde{f}$  définie sur  $Df \cup \{a\}$  par :  $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in Df \\ L & \text{si } x = a \end{cases}$  est continue en  $a$  et est appelé le prolongement par continuité de  $f$  en  $a$ .

**39 Exercice :** Soit  $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$  tel que  $p \neq q$ . Montrer que  $f: (x \mapsto \frac{x^p-1}{x^q-1})$  est prolongeable par continuité en 1 et donner son prolongement.

Posons  $g(t) = f(t+1)$ . Alors  $g(t) = \frac{(1+t)^p-1}{(1+t)^q-1} = \frac{1+pt+o_0(t)-1}{1+qt+o_0(t)-1} = \frac{pt+o_0(t)}{qt+o_0(t)} = \frac{t(p+o_0(1))}{t(q+o_0(1))} = \frac{p+o_0(1)}{q+o_0(1)}$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} g(t) = \frac{p}{q}$ . Ainsi  $f$  est prolongeable par continuité en 1 par la valeur  $\frac{p}{q}$ .

**Autre méthode :**  $\frac{x^p-1}{x^q-1} = \frac{(x-1)(1+x+x^2+\dots+x^{p-1})}{(x-1)(1+x+x^2+\dots+x^{q-1})} = \frac{(1+x+x^2+\dots+x^{p-1})}{(1+x+x^2+\dots+x^{q-1})}$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{p}{q}$ .

**40 Définition :**  $f$  est lipschitzienne sur  $D$  lorsqu'il un réel  $M$  tel que pour tous  $a$  et  $b$  de  $D$ ,  $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$ .  $M$  est le rapport de Lipchitz de  $f$ .  $f$  est contractante sur  $D$  lorsqu'il un réel  $M \in [0,1[$  tel que pour tous  $a$  et  $b$  de  $D$ ,  $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$  i.e. lorsque  $f$  est lipschitzienne de rapport strictement inférieur à 1.

**41 Théo :** Toute fonction lipschitzienne sur  $D$  est continue sur  $D$ .

## V Propriétés fondamentales des fonctions continues sur un intervalle.

**42 Théorème des valeurs intermédiaires TVI :**

**Version 1 :** Si  $f$  est continue sur le segment  $[a, b]$  alors tout réel compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  a au moins un antécédent par  $f$  dans  $[a, b]$ .

**Version 2 :** Si  $f$  est continue sur l'intervalle  $I$  alors  $f(I)$  est un intervalle et les extrémités de  $f(I)$  sont  $\inf f$  et  $\sup f$  i.e.  $f(I) = ]\inf f, \sup f[$ .

**43 Exercice :** Soit  $f: (x \mapsto x \sin(\frac{1}{1-x}))$ . Décrire  $f([0,1[$ .

$f$  est continue que l'intervalle  $[0,1[$ . Donc  $f([0,1[)$  est un intervalle dont les extrémités sont les bornes inf et sup de  $f([0,1[)$ .

Déterminons ces bornes :

$\forall x \in [0,1[, -1 \leq \sin(\frac{1}{1-x}) \leq 1$  et  $0 \leq x < 1$  donc  $-1 < f(x) < 1$ . Ainsi,  $f(I)$  est borné donc ses bornées sont finies.

Montrons que  $1 = \sup f(I)$ .

1 majore  $f(I)$ . Cherchons, ensuite, une suite d'éléments de  $f(I)$  de limite 1. Il faut alors trouver une suite  $(u_n)$  telle que  $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = 1 \\ \forall n, u_n \in [0,1[ \end{cases}$ .

pour que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \sin(\frac{1}{1-u_n}) = 1$  avec  $u_n < 1$ , il suffit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1^-$  et  $\sin(\frac{1}{1-u_n}) = 1$ .

Or,  $\sin(\frac{1}{1-u_n}) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1-u_n} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \Leftrightarrow 1 - u_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \Leftrightarrow u_n = 1 - \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ .

Posons  $\forall n, u_n = 1 - \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ . Alors,  $\forall n, u_n < 1$   $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1^-$  et  $\sin(\frac{1}{1-u_n}) = 1$ . Donc,  $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = 1 \\ \forall n, u_n \in [0,1[ \end{cases}$ . La suite  $(f(u_n))$  est une suite d'éléments de  $f(I)$  de limite 1. J'en conclus que  $1 = \sup f(I)$ .

Montrons que  $-1 = \inf f(I)$ .

$-1$  minore  $f(I)$ . Cherchons, ensuite, une suite d'éléments de  $f(I)$  de limite  $-1$ . Il faut alors trouver une suite  $(u_n)$  telle que  $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = -1 \\ \forall n, u_n \in [0,1[ \end{cases}$ . Pour que

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \sin(\frac{1}{1-u_n}) = -1$  avec  $u_n < 1$ , il suffit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1^-$  et  $\sin(\frac{1}{1-u_n}) = -1$ .

Or,  $\sin(\frac{1}{1-u_n}) = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{1-u_n} = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi \Leftrightarrow 1 - u_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \Leftrightarrow u_n = 1 - \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ .

Posons  $\forall n, u_n = 1 - \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ . Alors,  $\forall n, u_n < 1$   $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1^-$  et  $\sin(\frac{1}{1-u_n}) = -1$ . Donc,  $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = -1 \\ \forall n, u_n \in [0,1[ \end{cases}$ . La suite  $(f(u_n))$  est une suite d'éléments de  $f(I)$  de limite  $-1$ . J'en conclus que  $-1 = \inf f(I)$ .

**44 Conséquences du TVI :**

- 1) Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . Si  $f$  est continue sur le segment  $[a, b]$  et  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signes contraires (i.e.  $f(a)f(b) < 0$ ) alors  $f$  s'annule au moins un fois sur  $[a, b]$ .
- 2) Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . Si  $f$  est continue et strictement monotone sur le segment  $[a, b]$  et  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signes contraires (i.e.  $f(a)f(b) < 0$ ) alors  $f$  s'annule exactement une fois sur  $[a, b]$ .
- 3) Soit  $a$  et  $b$  deux réels ou infinis tels que  $a < b$ . Si  $f$  est continue sur  $]a, b[$  et  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$  existent et sont de signes contraires alors  $f$  s'annule au moins un fois sur  $]a, b[$ .
- 4) Si  $f$  est continue sur l'intervalle  $I$  et  $f$  ne s'annule pas sur  $I$  alors  $f$  ne change pas de signe sur  $I$  (ou bien  $f$  est strictement positive sur  $I$  ou bien  $f$  est strictement négative sur  $I$ ).

**45 Exercice :** Trouver toutes les fonctions  $f$  continues sur  $\mathbb{R}$  telles que :  $\forall x \in \mathbb{R}, (f(x))^2 = 1 + x^2$ .

La fonction  $(x \mapsto \sqrt{1+x^2})$  est solution. Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  telles que :  $\forall x \in \mathbb{R}, (f(x))^2 = 1 + x^2$ . Alors  $\forall x \in \mathbb{R}, (f(x))^2 > 0$  donc  $f(x) \neq 0$ .

Comme  $f$  est continue sur l'intervalle  $\mathbb{R}$ ,  $f$  ne change pas de signe sur  $\mathbb{R}$ . De plus,  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \pm\sqrt{1+x^2}$ . Par conséquent, Ou bien  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$  et

par suite,  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{1+x^2}$  ou bien  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0$  et par suite,  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -\sqrt{1+x^2}$ . Les candidates solutions sont donc les deux fonctions  $(x \mapsto \sqrt{1+x^2})$  et  $(x \mapsto -\sqrt{1+x^2})$ . Ces deux candidates sont continues sur  $\mathbb{R}$  telles que :  $\forall x \in \mathbb{R}, (f(x))^2 = 1 + x^2$  donc sont solutions.

Ainsi,  $(x \mapsto \sqrt{1+x^2})$  et  $(x \mapsto -\sqrt{1+x^2})$  sont les solutions de notre problème.

**46 Application :** Toute fonction de  $[a, b]$  dans  $[a, b]$  continue admet un point fixe.

Soit  $f$  une application de  $[a, b]$  dans  $[a, b]$  continue.

Montrons que  $f$  admet un point fixe sur  $[a, b]$ . i.e. qu'il existe un réel  $c$  dans  $[a, b]$  tel que  $f(c) = c$ .

Je remarque que :  $x$  point fixe de  $f \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$ .

Par conséquent, introduisons  $g(x) = f(x) - x$  et montrons que  $g$  s'annule sur  $[a, b]$ .

$g$  est définie et continue sur  $[a, b]$  (puisque  $g$  est la différence  $f$  et  $id_{[a,b]}$  qui sont définies et continues sur  $[a, b]$ ).

Comme  $\forall t \in [a, b], a \leq f(t) \leq b, a \leq f(a)$  et  $f(b) \leq b$  et par conséquent,  $g(a) = f(a) - a \geq 0$  et  $g(b) = f(b) - b \leq 0$ .

Alors, le TVI assure que  $g$  s'annule au moins une fois sur  $[a, b]$  en un réel  $c$ . Alors  $c$  est un point fixe de  $f$  sur  $[a, b]$ .

**47 Application :** Toute fonction polynomiale réelle de degré impair a au moins une racine réelle.

Soit  $P$  une fonction polynomiale réelle de degré  $d$  impair. Posons  $d = 2m + 1$  et  $a_{2m+1}t^{2m+1}$  le terme dominant de  $P$  tq  $a_{2m+1}$  réel non nul. Alors

$P(t) \sim_{\pm\infty} a_{2m+1}t^{2m+1}$ . Donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} a_{2m+1}t^{2m+1} = \text{sgn}(a_{2m+1})\infty$  et  $\lim_{t \rightarrow -\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} a_{2m+1}t^{2m+1} = -\text{sgn}(a_{2m+1})\infty$ . Donc  $P$  prend une valeur

positive et une valeur négative. De plus,  $P$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . Le TVI assure alors que  $P$  s'annule au moins une fois sur  $\mathbb{R}$ .

**48 Théorème fonction continue sur un segment TFCS (admis). Deux énoncés équivalents :**

- Si  $f$  est continue sur le segment  $[a, b]$  alors  $f$  admet un maximum  $M = f(d) = \max_D f$  et un minimum  $m = f(c) = \min_D f$  sur  $[a, b]$  et  $f([a, b]) = [m, M] = [f(c), f(d)]$  où  $c$  et  $d$  deux réels de  $[a, b]$ .
- L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

- L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

**49 Conséquence :** Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

**50 Exercices :**

1) Montrons que toute fonction périodique et continue sur  $\mathbb{R}$  est bornée et atteint ses bornes une infinité de fois.

Soit  $f$  une fonction  $T$ -périodique et continue sur  $\mathbb{R}$  où  $T$  réel strictement positif fixé.

Alors  $f$  est continue sur le segment  $[0, T]$  ; par conséquent, il existe  $m$  et  $M$  réels tels que  $f([0, T]) = [m, M]$  et il existe deux réels  $a$  et  $b$  dans  $[0, T]$  tels que  $m = f(a)$  et  $M = f(b)$ .

Soit  $x$  un réel. Comme  $\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [kT, kT + T]$ , il existe  $k_0 \in \mathbb{Z}$  tel que  $x \in [k_0T, k_0T + T]$ . Donc  $x - k_0T \in [0, T]$ . Par conséquent,  $f(x - k_0T) \in [m, M]$ .

Comme  $f$  est  $T$ -périodique,  $f(x - k_0T) = f(x)$ . Par conséquent,  $f(x) \in [m, M]$ . Ainsi,  $f$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  par  $m$  et  $M$ . Comme  $m = f(a)$  (resp.  $M = f(b)$ ),  $m$  (resp.  $M$ ) est atteint et est le minimum ( resp. maximum ) de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . De plus  $\forall k \in \mathbb{Z}, m = f(a) = f(a + kT)$ . Donc ce minimum est atteint une infinité de fois.

2) Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ . Justifier que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(\sin(x))}{\sqrt{x}} = 0$ .

$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) \in [-1, 1]$ . Comme  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ ,  $f$  est continue sur le segment  $[-1, 1]$  donc il existe  $m$  et  $M$  deux réels tels que  $\forall t \in [-1, 1], m \leq f(t) \leq M$ . Par suite,  $\forall x \in \mathbb{R}, m \leq f(\sin(x)) \leq M$ . Donc, la fonction  $(x \mapsto f(\sin(x)))$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ . Comme de plus,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ , je peux conclure que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(\sin(x))}{\sqrt{x}} = 0.$$

**51 Théorème des bijections continues et strictement monotones TBCSM:**

Si  $f$  est continue et strictement monotone sur l'intervalle  $I$  alors

- 1)  $J = f(I)$  est un intervalle de même nature (ouvert, segment, semi-ouvert) que  $I$  et ses extrémités sont les limites de  $f$  aux bords de  $I$ .
- 2) Tout élément de  $J$  a exactement un antécédent par  $f$  dans  $I$ . Autrement dit,  $f$  est bijective de  $I$  sur  $J$ .
- 3)  $f^{-1}: J \rightarrow I$  est continue et strictement monotone sur  $J$  et de même monotonie que  $f$ .

**52 Exercice :** Montrer que l'équation (E) :  $e^{x^2} = 1 + x$  admet exactement deux solutions : 0 et une solution strictement positive.

Posons  $f(x) = e^{x^2} - (1 + x)$ .  $Df = \mathbb{R}$ .  $f$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Et  $\forall x, f'(x) = 2xe^{x^2} - 1$ .

D'une part,  $\forall x, f'(x) < 0$ ; donc,  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}^-$ . Comme  $f(0) = 0, \forall x < 0, f(x) < 0$ . Par conséquent, (E) n'a aucune solution sur  $\mathbb{R}^-$ .

D'autre part,  $\forall x \geq 1, f'(x) > 0$  et, par suite,  $f$  est strictement croissante sur  $[1, +\infty[$ . Comme  $f(1) = e - 2 > 0, \forall x \geq 1, f(x) > 0$ . Par conséquent, (E) n'a aucune solution sur  $[1, +\infty[$ .

Enfin, sur l'intervalle  $[0, 1]$ ,  $f'$  est continue et dérivable et  $\forall x, f''(x) = (4x^2 + 2)e^{x^2} > 0$ . Donc  $f'$  est strictement croissante sur  $[0, 1]$  et  $f'(0) < 0 < f'(1)$ . Alors le corollaire du TVI assure que  $f'$  s'annule une et une seule fois sur  $[0, 1]$  en un réel  $\alpha$ .

Et  $\forall x \in [0, \alpha], f'(x) < 0$  et  $\forall x \in ]\alpha, 1], f'(x) > 0$ . Ainsi,  $f$  est strictement décroissante sur  $[0, \alpha]$  et strictement croissante sur  $]\alpha, 1]$ . Comme  $f(0) = 0, f(\alpha) < 0$ . De plus,  $f(1) > 0$ . Donc le corollaire du TVI assure que  $f$  s'annule une unique fois sur  $]\alpha, 1]$  en un réel  $\beta$ . J'en conclus que  $f$  s'annule une unique fois sur  $\mathbb{R}$  en  $\beta$ .

## VI Méthode de dichotomie

**53** Soit  $f$  une fonction continue et strictement monotone sur  $[a, b]$  et telle que :  $f(a)f(b) < 0$  (i.e.  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signes opposés). Alors le TBCSM assure que  $f$  s'annule une seule fois sur  $[a, b]$  en un réel  $\alpha \in ]a, b[$ . Lorsque l'équation  $f(x) = 0$  est impossible à résoudre de manière algébrique, la méthode de dichotomie permet alors, dans cette situation, de déterminer une valeur approchée de  $\alpha$  à une précision  $\varepsilon$  choisie. Voici le principe de dichotomie :

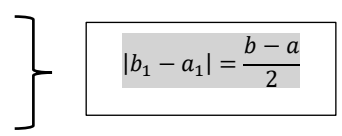
**Etape 1 :** On calcule  $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ . Ou bien  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$  alors  $\alpha = \frac{a+b}{2}$ . Et c'est fini : on a trouvé la valeur exacte de  $\alpha$ .

Ou bien  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$  alors

Soit  $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$  est de signe opposé à  $f(a)$ . Alors  $\alpha \in ]a, \frac{a+b}{2}[$ . Posons  $a_1 = a$  et  $b_1 = \frac{a+b}{2}$ .

Soit  $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$  est de signe opposé à  $f(b)$ . Alors  $\alpha \in ]\frac{a+b}{2}, b[$ . Posons  $a_1 = \frac{a+b}{2}$  et  $b_1 = b$ .

Alors  $\alpha \in ]a_1, b_1[$  et  $a_1$  et  $b_1$  sont deux valeurs approchées de  $\alpha$  par défaut et excès à la précision  $\frac{b-a}{2}$



**Etape 2 :** On calcule  $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ . Ou bien  $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$  alors  $\alpha = \frac{a_1+b_1}{2}$ . Et c'est fini.

Ou bien  $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) \neq 0$  alors

Soit  $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$  est de signe opposé à celui de  $f(a_1)$ . Alors  $\alpha \in ]a_1, \frac{a_1+b_1}{2}[$ . Posons  $a_2 = a_1$  et  $b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$ .

Soit  $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$  est de signe opposé  $f$  à celui de  $f(b_1)$ . Alors  $\alpha \in ]\frac{a_1+b_1}{2}, b_1[$ . Posons  $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$  et  $b_2 = b_1$ .

Alors  $\alpha \in ]a_2, b_2[$  et  $a_2$  et  $b_2$  sont deux valeurs approchées de  $\alpha$  par défaut et excès à la précision  $\frac{b-a}{2^2}$

...

**On itère ce procédé !!**

**Etape n :** On calcule  $f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right)$ . Ou bien  $f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right) = 0$  alors  $\alpha = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ . Et c'est fini.

Ou bien  $f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right) \neq 0$  alors

Soit  $f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right)$  et  $f(a_{n-1})$  sont de signes opposés. Alors  $\alpha \in ]a_{n-1}, \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}[$ . Posons  $a_n = a_{n-1}$  et  $b_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ .

Soit  $f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right)$  et  $f(b_{n-1})$  sont de signes opposés. Alors  $\alpha \in ]\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, b_{n-1}[$ . Posons  $a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$  et  $b_n = b_{n-1}$ .

Alors  $\alpha \in ]a_n, b_n[$  et  $a_n$  et  $b_n$  sont deux valeurs approchées de  $\alpha$  par défaut et excès à la précision  $\frac{b-a}{2^n}$ .

L'étape se resserre donc autour de la racine  $\alpha$  de  $f$  sur  $]a, b[$ . Il suffit de savoir quel entier  $n$  choisir pour obtenir la précision  $\varepsilon$  souhaitée. Il suffit de choisir  $n \in \mathbb{N}$  tel que :  $\frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon$ .

Or,  $0 < \frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2^n}{b-a} \geq \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow 2^n \geq \frac{b-a}{\varepsilon} \Leftrightarrow \ln(2^n) \geq \ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) \Leftrightarrow n \ln(2) \geq \ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)}$ .

Prenons  $n_0 = \left\lceil \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)} \right\rceil + 1$ . Alors  $a_{n_0}$  et  $b_{n_0}$  sont deux valeurs approchées de  $\alpha$  par défaut et excès à la précision  $\varepsilon$ .

**54** Ce principe se programme évidemment Cf programme ci-contre et dans les différents exemples ci-dessous.

```
def dichotomie(f, a, b, e):
    delta = 1
    while delta > e:
        m = (a + b) / 2
        delta = abs(b - a)
        if f(m) == 0:
            return m
        elif f(a) * f(m) > 0:
            a = m
        else:
            b = m
    return a, b
```

**55 Exercices :**

1.a. Justifier que  $f : (x \mapsto x^3 - x + 3)$  a une seule racine réelle et deux racines complexes conjuguées. On note  $x_1, x_2$  et  $x_3$  ses racines telles que  $x_1 \in \mathbb{R}$ .

1.b. Cherchons une valeur approchée de  $x_1$  à  $10^{-2}$  par dichotomie.

1.c. Calculer  $x_1 + x_2 + x_3, x_1x_2x_3$  et  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ .

a. D'après ce qui précède,  $f$  est polynomiale de degré 3 impair, donc  $f$  admet au moins une racine réelle.

Etudions  $f$  pour montrer que cette racine réelle est la seule :

$f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x, f'(x) = 3x^2 - 1 = 3\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ . D'où le tableau des variations suivantes :

$x$	$-\infty$	$x_1$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					$+\infty$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 3 = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + 3 = \frac{-2}{3\sqrt{3}} + 3 > 0.$$

Donc, d'après les variations de  $f, f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) > 0$ .

$f$  est continue et strictement croissante sur  $]-\infty, \frac{1}{\sqrt{3}}]$  et  $f$  prend une valeur strictement négative et une valeur strictement positive, donc  $f$  s'annule une et une seule fois sur  $]-\infty, \frac{1}{\sqrt{3}}]$  d'après le TBCSM. De plus, les variations de  $f$  sur  $[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty[$  et le signe de  $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$  assurent que  $f$  ne s'annule pas sur  $[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty[$ . J'en conclus que  $f$  n'annule une et une seule fois sur  $\mathbb{R}$ . Notons  $x_1$  cette racine réelle. Alors on peut factoriser  $f(x)$  par  $x - x_1$  et l'autre facteur  $T(x)$  est polynomiale réelle, de degré 2 et sans racine réelle. Donc  $\Delta_T < 0$  et  $T$  admet deux racines complexes non réelles et conjuguées notées  $x_2$  et  $x_3$ .

b.  $f(-1) = 3 > 0 > -2 = f(-2)$ . Donc  $x_1 \in ]-2, -1[$ .

```
1 A=-2
2 B=-1
3 while B-A>1/1000:
4     if ((A+B)/2)**3-(A+B)/2+3<0:
5         A=(A+B)/2
6     else:
7         B=(A+B)/2
8     print(A,B)
9
10
11 def approx(
12     A=-2      OU
13     B=-1
14     while B-A>E:
15         if ((A+B)/2)**3-(A+B)/2+3<0:
16             A=(A+B)/2
17         else:
18             B=(A+B)/2
19     return A,B
20 print(approx(1/100))
21
```

Réponse :

-1.671875 -1.6708984375  
(-1.671875, -1.6640625)

c. Alors  $\forall x, f(x) = x^3 - x + 3 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_3x_1 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3$ .

Alors par unicité des coefficients de notre fonction polynomiale,  $x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1x_2 + x_3x_1 + x_2x_3 = -1$  et  $x_1x_2x_3 = -3$ .

Par conséquent,  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_3x_1 + x_2x_3) = 2$ .

**2. Donner une valeur approchée de l'unique point fixe de la fonction cosinus.**

Soit  $g(x) = \cos(x) - x$ .  $g$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x, g'(x) = -\sin(x) - 1 \leq 0$  et  $g'$  ne s'annule qu'en des points isolés.

Donc  $g$  est strictement décroissante. De plus,  $g(\pi) < 0$  et  $g(-\pi) = -1 + \pi > 0$ . Donc  $g$  s'annule une seule fois sur  $\mathbb{R}$ . J'en conclus que  $\cos$  n'a qu'un seul point fixe. En appliquant la méthode de dichotomie à  $g$  :

```
22 from math import *
23 def pointfixe(E):
24     A=-pi
25     B=pi
26     while B-A>E:
27         if cos((A+B)/2)-(A+B)/2>0:
28             A=(A+B)/2
29         else:
30             B=(A+B)/2
31     return A,B
32 print(pointfixe(1/100))
```

Réponse :

(0.7363107781851077, 0.7424467013366)