TD 12 Limites et continuité

I De la technique

Ex 1 Etudier l'existence de la limite de f en a et le cas échéant, la valeur de cette limite :

1. $f(x) = \lfloor 2x-3 \rfloor$, $a \in \mathbb{R}$.
2. $f(x) = x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$, $a = +\infty$ *puis* $a = 0$.
3. $f(x) = \frac{|x^3-(a+1)x+a|}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$, $a \in \mathbb{R}^+$
4. $f(x) = sin\left(x\left\lfloor \frac{\pi}{x} \right\rfloor\right)$, $a = 0$
5. $f(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$, $a = +\infty$
6. $f(x) = \sin(\sqrt{x+1}) - \sin(\sqrt{x})$, $a = +\infty$
7. $f(x) = Arctan(x)\cos\left(\frac{1}{x+1}\right)$, $a = -1$
8. $f(x) = (x^2-4)\cos(\ln(2-x))$, $a = 2$
9. $f(x) = \frac{cos^n x - ncos(x)+n-1}{Arcsin^4 x}$ et $a = 0$ où $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$
10. $f(x) = (2^x+3^x-12)^{tan\frac{\pi x}{4}}$, $a = 2$
11. $f(x) = \frac{a^x - x^a}{x^x - a^a}$, $a \in \mathbb{R}^{+*}$
12. $f(x) = \frac{x^x}{\lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor}}$, $a = +\infty$
13. $f(x) = \frac{Arcos(x)}{\sqrt{1-x}}$, $a = 1$
14. $f(x) = \frac{Arctan(2sinx)-\frac{\pi}{4}}{\cos(3x)}$, $a = \frac{\pi}{6}$
15. $f(x) = \frac{1}{\cos(3x)} + \frac{1}{\ln\left(\frac{6x}{\pi}\right)}$, $a = \frac{\pi}{6}$

II Définition et propriétés de la limite, de la continuité

Ex 2 Soit $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que :

■il existe un réel a tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{ax}f(x) = 0$

■■il existe un réel b tel que $(x \mapsto e^{bx}f(x))$ ne tend pas vers 0 quand $x \to +\infty$.

1. Justifier l'existence du réel $\lambda = sup\{c \in \mathbb{R} / \lim\limits_{x\to+\infty} e^{cx}f(x) = 0\}$.
2. Montrer que $\forall\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{(\lambda-\varepsilon)x}f(x) = 0$
3. Montrer que $\forall\varepsilon > 0$, $(x \mapsto e^{(\lambda+\varepsilon)x}|f(x)|$n'est majorée sur aucun voisinage de $+\infty$.

Ex 3 Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) + f'(x) = 0$.

1. On pose $h(x) = f(x) + f'(x)$. f est donc solution de l'edl1 : $y' + y = h(x)$.
   Montrer qu'il existe une constante réelle c telle que : $\forall x \geq 0, f(x) = e^{-x}\int_0^x h(t)e^t dt + ce^{-x}$.
2. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Ex 4 Soit f et g deux fonctions continues sur $[-1,1]$. On définit, pour tout réel x, $M(x) = sup_{t\in[-1,1]}\{f(t) + xg(t)\}$.

1. Expliciter $M(x)$ lorsque $f(t) = \sqrt{1-t^2}$ et $g(t) = t$.
2. Montrer que $M: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bien définie.
3. Montrer que $\forall h > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, $M(x) + h \times inf_{[-1,1]}g \leq M(x+h) \leq M(x) + h \times sup_{[-1,1]}g$.
4. En déduire que M est continue sur $\mathbb{R}$.

III Caractérisation séquentielle

Ex 5 Soit $f: \left(x \mapsto \begin{cases} x-1 \; si \; x \in \mathbb{Q} \\ x+1 \; si \; x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}\right)$. Montrer que f est bijective et discontinue en tout point. Décrire f^{-1}.

Ex 6

1. Montrer que si f et g sont continues de $\mathbb{R}$ $dans$ $\mathbb{R}$ et coïncident sur $\mathbb{Q}$ alors $f = g$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soient f et g fonctions de de $\mathbb{R}$ $dans$ $\mathbb{R}$ continues et telles que : $\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) < g(x)$.
   a. Montrer que $f \leq g$.
   b. Montrer qu'on n'a pas nécessairement $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < g(x)$.
3. Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f_{/\mathbb{Q}}$ est strictement croissante sur $\mathbb{Q}$. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

IV Fonction lispchitzienne

Ex 7 Montrer que la fonction $(x \mapsto x^2)$ est lipschitzienne sur $[0,1]$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

V Fonction monotone

Ex 8 Soit $f: \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, croissante et telle que $g: \left(x \mapsto \frac{f(x)}{x}\right)$ soit décroissante. Montrer que f est continue.

Ex 9 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : pour $n \in \mathbb{N}$ et pour $x \in [0,1[$, $f_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} dt$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ $fixé$.
   a) Justifier que f_n est bien définie sur [0,1[.
   b) Calculer f_0 et sa limite I_0 en 1^-.
   c) Montrer que la fonction $f_n$est majorée par I_0 .
   d) En déduire l'existence de la limite I_n de f_n en 1^-.
2. a) Montrer que la suite (I_n) est monotone et convergente.
   b) Trouver une relation entre $f_n$et f_{n-2}, pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$
   c) En déduire la relation $nI_n = (n-1)\, I_{n-2}$ valable pour tout entier naturel $n \geq 2$.
   d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = W_n$ par deux méthodes.

VI Continuité sur un intervalle Soit a et b réels tels que $a < b$

Ex 10 Soit $f : \begin{pmatrix}]0,1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f est bijective.
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} f^{-1}(2^{-n})$ puis trouver deux réels a et b tels que : $f^{-1}(2^{-n}) = a + \frac{b}{2^n} + o\left(\frac{1}{2^n}\right)$.
3. Déterminer une expression de f^{-1}.

Ex 11 Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I telles que : $\forall x \in I, |f(x)| = |g(x)|$ et $f(x) \neq 0$. Montrer que $f = g$ ou $f = -g$.

Ex 12 Déterminer les fonctions continues sur un $\mathbb{R}$ et prenant un nombre fini de valeurs.

Ex 13 Soit f: $([0,1] \to \mathbb{R})$ continue vérifiant $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe deux réels x_1 et $x_2 \in [0,1]$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$ et $x_1 - x_2 = \frac{1}{2}$.

Ex 14 Montrer que $[a,b] = \{ta + (1-t)b / t \in [0,1]\} = \left\{\frac{p}{p+q}a + \frac{q}{p+q}b \;/ p,q \in \mathbb{R}^+ et\ p+q \neq 0\right\}$.
Soit f:$[a,b] \to \mathbb{R}$,continue et $p\ et\ q$ des réels positifs . Démontrer qu'il existe un réel c de $[a,b]$ tel que : $pf(a) + qf(b) = (p+q)f(c)$.

Ex 15 Soit f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, l'une bornée , l'autre continue. Montrer que $f \circ g\ et\ g \circ f$ sont bornées.

Ex 16 Soit f et g deux applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, continues et telles que : $\forall x \in [0,1], f(x) < g(x)$. Montrer qu'il existe un réel $m > 0$ tel que : $\forall x \in [0,1], f(x) + m \leq g(x)$.

Ex 17 Un train parcourt 120 km en 3 heures . Montrer qu'il existe un intervalle d'une heure durant laquelle ce train a parcouru 40 km exactement .

Ex 18 Soit f: $(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ continue.

1. Montrer que si f a une limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$ alors f est bornée. Atteint-elle ses bornes ?
2. Montrer que si f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et en $-\infty$ alors f admet un minimum global.

VII Continuité et intégration Soit a et b réels tels que $a < b$.

Ex 19 Soit f : $[a,b] \to \mathbb{R}$, continue. Montrer qu'il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que : $\underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}_{\substack{moyenne\ de\ f \\ sur\ [a,b]}} = f(c)$.

Ex 20 Soit f une fonction continue, positive sur $[a,b]$. Montrer que : $\exists c \in [a,b] / f(c) > 0 \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx > 0$.
Compléter, par contraposée, le théorème suivant : « Une fonction continue, positive et d'intégrale nulle sur $[a,b]$ est ………………… ».

Ex 21 Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n f(x)\, dx = 0$.

Ex 22 Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f(x^n)\, dx = f(0)$. En déduire un équivalent simple en $+\infty$ de $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$. (on pourra faire une $I.P.P$).

VIII Des équations fonctionnelles avec hypothèses de continuité

Ex 23 Déterminons toutes les applications continues sur $\mathbb{R}$ et telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, f^2(x) = f(x)$.

Ex 24 Déterminons toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et continues en 0 et en 1 et telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x^2) = f(x)$.

Ex 25 Déterminons toutes les applications définies et continues sur $[0,1]$ et telles que : $\forall x \in [0,1], f(x^2) \leq f(x)$ et $f(0) = f(1)$.

Ex 26 Soit f continue sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)\cos(x)\ et\ f(0) = 1$.

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

b. En déduire que: $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Est-ce cohérent avec la continuité de f ?

Ex 27 Soit $a \in \mathbb{R}$ et u la suite définie par : $u_0 = a\ et\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n{}^2}$. Etudier la convergence de la suite u. En déduire les applications f définies et continues sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}\ \ , f(x) = f\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$.

Ex 28 Nous allons déterminer toutes les applications continues sur $\mathbb{R}$ et telles que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$.

a. Trouver une solution « évidente » à notre problème.

b. **ANALYSE** : Soit f l'une des solutions.
   i. Calculer $f(0)$.
   ii. Montrer que f est impaire.
   iii. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f(nx) = nf(x)$.
   iv. En déduire que $\forall \beta \in \mathbb{Q}\ , f(\beta) = \beta f(1)$.
   v. En utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}\ , f(x) = xf(1)$.

c. **SYNTHESE**. Donner toutes les solutions de de notre problème.

d. Déterminer toutes les applications continues sur $\mathbb{R}$ et telles que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x)f(y)$.

e. Déterminer toutes les applications continues sur $\mathbb{R}^{+*}$ et telles que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+*2}, f(x+y) = f(x)f(y)$.